Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ $\{f(z_1),\dots,f(z_n)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть T – класс функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, регулярных и типично вещественных в круге $U=\{z:|z|<1\}$.

В настоящей работе рассмотрена задача о множестве значений $D_n(T)$ системы

$$I_n(f)=\{f(z_1),f(z_2),\dots,f(z_n)\},\quad n\geqslant 1,$$

в классе T, где $z_j\in U$ – различные заданные точки такие, что $\operatorname{Im} z_j\neq 0$ $(j=1,2,\dots,n)$.

Множество $D_1(T)$ было найдено Рогозинским [1], множества $D_2(T)$ и $D_3(T)$ исследованы в работах [2, 3] и [4], соответственно.

В данной работе дана характеристика множества $D_n(T)$ и описаны все граничные функции. Это позволило найти множество значений $f(z_n)$ на подклассе функций из T с фиксированными значениями $f(z_k)$, $k=1,2,\dots,n-1$.

Как и в предыдущих работах автора [2–5], в данной работе использованы известные результаты в степенной проблеме моментов. Эти результаты были впервые применены для класса T в работе [5] при характеристике множества значений системы

$$\{f(z_1),f'(z_1),\dots,f^{(m_1)}(z_1),\dots,f(z_n),f'(z_n),\dots,f^{(m_n)}(z_n)\}.$$

Ранее в [6] аналогичная задача была решена для C-функций Каратеодори с использованием результатов в тригонометрической проблеме моментов.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Программы 2004 г. фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследования в фундаментальных областях современной математики”.

§1

Пусть

$$\zeta_j = z_j + z_j^{-1}, \quad w_j = f(z_j),$$
$$\varkappa_j = w_j(\zeta_j^2 - 4), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Имеет место

Теорема 1. 1. *Множество значений $D_n(T)$ есть множество всех точек*

$$X_n = X(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n,$$

в которых неотрицательна эрмитова форма

$$\begin{aligned} H_n(X) = |\xi_0|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\operatorname{Im} w_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} \right) |\xi_j|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} w_j \, \overline{\xi}_0 \, \xi_j + \\ + 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \frac{\overline{w}_j - w_k}{\zeta_k - \overline{\zeta}_j} \, \overline{\xi}_j \xi_k + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\operatorname{Im} \varkappa_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} - 1 \right) |\eta_j|^2 + \\ + 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \left(\frac{\overline{\varkappa}_k - \varkappa_j}{\overline{\zeta}_k - \zeta_j} - 1 \right) \eta_j \overline{\eta}_k . \end{aligned}$$

2. *Для того чтобы некоторая точка $X_n \in \mathbb{C}^n$ была внутренней точкой множества $D_n(T)$ необходимо и достаточно, чтобы эрмитова форма $H_n(X)$ была положительно определенной.*

3. *Каждой точке $X \in \partial D_n(T)$ соответствует только одна функция класса T вида*

$$f_X(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k z + z^2},$$

где

$$\lambda_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,$$

$$t_j \neq t_k \quad \textit{при} \quad j \neq k \quad \textit{и либо} \quad -1 < t_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

$$\textit{либо} \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -1, \quad -1 < t_k < 1, \quad k = 3, 4, \dots, n+1.$$

Пусть ω_j $(j=1,2,\dots,n-1)$ – заданные комплексные числа и пусть при $w_j=\omega_j$ $(j=1,2,\dots,n-1)$ выполняется условие

$$X(w_1,w_2,\dots,w_{n-1})\in \operatorname{Int} D_{n-1}(T).$$

Введем класс

$$T_{n-1}=\bigl\{f\in T: f(z_j)=\omega_j,\, j=1,2,\dots,n-1\bigr\},\quad n\geqslant 2.$$

Обозначим через $D(T_{n-1})$ множество значений $f(z_n)$ на классе T_{n-1}.

Для нахождения $\{f(z_n)\}$ введем следующие обозначения.

Положим

$$
\begin{aligned}
&a_{00}=1,\ a_{0l}=1+w_l(\overline{\zeta}_n-\zeta_l),\ a_{l0}=\overline{a}_{0l},\ l=1,2,\dots,n;\\
&a_{jj}=1-\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_j}\operatorname{Im}\bigl[w_j(\zeta_n-\zeta_j)(\overline{\zeta}_n-\zeta_j)\bigr],\\
&a_{jn}=1+\overline{w}_j(\overline{\zeta}_n-\overline{\zeta}_j),\ a_{nj}=\overline{a}_{jn},\ j=1,2,\dots,n-1;\\
&a_{lj}=1-\frac{1}{\overline{\zeta}_l-\zeta_j}\Bigl[\overline{w}_l(\overline{\zeta}_n-\overline{\zeta}_l)(\zeta_n-\overline{\zeta}_l)-w_j(\zeta_n-\zeta_j)(\overline{\zeta}_n-\zeta_j)\Bigr],\\
&a_{jl}=\overline{a}_{lj},\ 0<j<l<n;\ a_{nn}=1;\\
&A=A(w_1,\dots,w_n)=|a_{jl}|_0^n,\quad \widetilde{A}=A(\omega_1,\dots,\omega_{n-1},w_n),\\
&A_1(w_1,\dots,w_{n-1})=|a_{jl}|_1^{n-1},\quad \widetilde{A}_1=A_1(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}),\\
&A_2(w_1,\dots,w_{n-1})=|a_{jl}|_0^{n-1},\quad \widetilde{A}_2=A_2(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}),\\
&A_3(w_1,\dots,w_{n-1})=|a_{jl}|_1^{n},\quad \widetilde{A}_3=A_3(\omega_1,\dots,\omega_{n-1});\\
&A_2^0=A_2^0(w_1,\dots,w_{n-1})=|c_{jl}|_1^n,\quad \text{где}\ \ c_{1n}=0,\ c_{jl}=a_{(j-1)l};\\
&A_3^0=A_3^0(w_1,\dots,w_{n-1})=|c_{jl}|_0^n,\quad \text{где}\ \ c_{0n}=c_{n0}=0,\ c_{jl}=a_{jl};\\
&\widetilde{A}_2^0=A_2^0(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}),\quad \widetilde{A}_3^0=A_3^0(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Положим, далее,

$$b_{11}=\frac{\operatorname{Im}\varkappa_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}-1,\quad b_{nn}=|\zeta_n-\zeta_1|^2 b_{11},$$

$$b_{1j}=\overline{\zeta}_j-\overline{\zeta}_1+(\overline{\zeta}_1-\zeta_n)\frac{\operatorname{Im}\varkappa_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}+\frac{(\overline{\varkappa}_j-\varkappa_1)(\zeta_n-\overline{\zeta}_j)}{\overline{\zeta}_j-\zeta_1},$$

$$b_{j1}=\overline{b}_{1j},\quad j=2,3,\dots,n;$$

$$b_{ln}=(\zeta_l-\zeta_1)(\overline{\zeta}_1-\overline{\zeta}_n)+|\zeta_n-\overline{\zeta}_1|^2\frac{\operatorname{Im}\varkappa_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}+$$

$$+(\varkappa_1-\varkappa_l)2i\operatorname{Im}\zeta_n-\frac{1}{\zeta_l-\overline{\zeta}_1}(\varkappa_l-\overline{\varkappa}_1)(\zeta_n-\overline{\zeta}_1)(\overline{\zeta}_n-\zeta_l),$$

$$b_{nl}=\overline{b}_{ln},\quad l=2,3,\dots,n-1;$$

$$b_{kl}=(\zeta_k-\zeta_1)(\overline{\zeta}_1-\overline{\zeta}_l)+\frac{1}{\overline{\zeta}_l-\zeta_k}(\overline{\varkappa}_l-\varkappa_k)(\overline{\zeta}_n-\zeta_k)(\zeta_n-\overline{\zeta}_l)+$$

$$+|\zeta_n-\overline{\zeta}_1|^2\frac{\operatorname{Im}\varkappa_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}-\frac{1}{\overline{\zeta}_l-\zeta_1}(\overline{\varkappa}_l-\varkappa_1)(\overline{\zeta}_n-\zeta_1)(\zeta_n-\overline{\zeta}_l)-$$

$$-\frac{1}{\zeta_k-\overline{\zeta}_1}(\varkappa_k-\overline{\varkappa}_1)(\zeta_n-\overline{\zeta}_1)(\overline{\zeta}_n-\zeta_k)$$

$$b_{lk}=\overline{b}_{kl},\quad 1<k<l<n;$$

$$b_{ll}=-|\zeta_l-\zeta_1|^2+|\overline{\zeta}_n-\zeta_1|^2\frac{\operatorname{Im}\varkappa_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}+|\overline{\zeta}_n-\zeta_l|^2\frac{\operatorname{Im}\varkappa_l}{\operatorname{Im}\zeta_l}-$$

$$-2\operatorname{Re}\left[(\varkappa_l-\overline{\varkappa}_1)(\zeta_n-\overline{\zeta}_1)(\overline{\zeta}_n-\zeta_l)(\zeta_l-\overline{\zeta}_1)^{-1}\right],\quad l=2,3,\dots,n-1;$$

$$B=B(w_1,\dots,w_n)=|b_{jl}|_1^n,\quad \widetilde{B}=B(\omega_1,\dots,\omega_{n-1},w_n),$$

$$B_1(w_1,\dots,w_{n-1})=|b_{jl}|_2^{n-1},\quad \widetilde{B}_1=B_1(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}),$$

$$B_2(w_1,\dots,w_{n-1})=|b_{jl}|_1^{n-1},\quad \widetilde{B}_2=B_2(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}),$$

$$B_3(w_1,\dots,w_{n-1})=|b_{jl}|_2^{n},\quad \widetilde{B}_3=B_3(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}),$$

$$B_2^0=B_2^0(w_1,\dots,w_{n-1})=|c_{jl}|_1^{n-1},\quad \text{где}\ \ c_{1(n-1)}=0,\ \ c_{jl}=b_{j(l+1)};$$

$$B_3^0=B_3^0(w_1,\dots,w_{n-1})=|c_{jl}|_1^{n},\quad \text{где}\ \ c_{1n}=c_{n1}=0,\ \ c_{jl}=b_{jl};$$

$$\widetilde{B}_2^0=B_2^0(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}),\quad \widetilde{B}_3^0=B_3^0(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}).$$

Тогда имеем

Следствие 1. *Множество* $D(T_{n-1})$ *есть пересечение двух кругов:* $|w - O_j| \leqslant R_j$, $j = 1, 2$, *где*

$$R_1 = \frac{(\widetilde{A}_2 \widetilde{A}_3)^{1/2}}{2\widetilde{A}_1 |\operatorname{Im} \zeta_n|},$$

$$O_1 = \frac{i}{2 \operatorname{Im} \zeta_n} \left[(-1)^n \frac{\widetilde{A}_2^0}{\widetilde{A}_1} - 1 \right],$$

$$R_2 = \frac{|\zeta_n - \overline{\zeta}_1| \, (\widetilde{B}_2 \widetilde{B}_3)^{1/2}}{2|\zeta_n^2 - 4| \, \widetilde{B}_1 |\operatorname{Im} \zeta_n|},$$

$$O_2 = \frac{1}{\zeta_n^2 - 4} \left[\overline{\omega}_1 (\overline{\zeta}_1^2 - 4) + i |\zeta_n - \overline{\zeta}_1|^2 \, \frac{\operatorname{Im}[\omega_1(\zeta_1^2 - 4)]}{2 \operatorname{Im} \zeta_1 \operatorname{Im} \zeta_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{i(\zeta_n - \overline{\zeta}_1)}{2 \operatorname{Im} \zeta_n} \left(\zeta_1 - \zeta_n + (-1)^{n+1} \frac{\overline{\widetilde{B}^0{}_2}}{\widetilde{B}_1} \right) \right].$$

§2

2.1. Доказательство теоремы 1

Как известно, функция $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, регулярная в круге U, тогда и только тогда принадлежит классу T, когда

$$f(z) = \int_{-1}^{1} z(1 - 2tz + z^2)^{-1} d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1, \tag{1}$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющих условию $\int_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$.

Из (1) для системы $I_n(f)$ получаем представление

$$f(z_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad \alpha(t) \in M_1, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что $D_n(T)$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество. По теореме [7, теорема 1.3, с. 86–87] интегральное представление (2) имеет место тогда и только тогда, когда из выполнения для всех $t \in [-1,1]$ неравенства

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{\zeta_j - 2t}\right] \geqslant 0 \tag{3}$$

(где $\delta_0 \neq 0$, δ_j, $j = 1,2,\dots,n$, – некоторые комплексные числа) следует неравенство

$$H \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j w_j\right] \geqslant 0. \tag{4}$$

Так как $\operatorname{Im}\zeta_j \neq 0$, $j = 1,2,\dots,n$, то запишем

$$\varphi(t) = A_{2n}(t) \prod_{j=1}^{n} |\zeta_j - 2t|^{-2}, \tag{5}$$

где $A_{2n}(t)$ – неотрицательный на отрезке $[-1,1]$ алгебраический многочлен от t степени $2n$. По теореме Маркова–Лукача (см. [7, с. 89]) имеем

$$A_{2n}(t) = (1-t^2)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k t^k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k t^k\right)^2, \tag{6}$$

где β_k и γ_l ($k = 0,1,\dots,n-1$; $l = 0,1,\dots,n$) – некоторые вещественные числа.

Подставим (6) в (5) и запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \left|\xi_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{\zeta_j - 2t}\right|^2 + (1-t^2)\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\eta_j}{\zeta_j - 2t}\right|^2, \tag{7}$$

где $\{\xi_j\}_0^n$ и $\{\eta_j\}_1^n$ – некоторые комплексные числа, зависящие от $\{\gamma_k\}_0^n$ и $\{\beta_k\}_0^{n-1}$, соответственно.

Заметим, что

$$\begin{gathered} \frac{1-t^2}{(\zeta_j - 2t)(\overline{\zeta}_k - 2t)} = -\frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{\overline{\zeta}_k - \zeta_j}\left(\frac{\zeta_j^2 - 4}{\zeta_j - 2t} - \frac{\overline{\zeta}_k^2 - 4}{\overline{\zeta}_k - 2t}\right)\right], \\ \frac{1}{(\zeta_j - 2t)(\overline{\zeta}_k - 2t)} = \frac{1}{\overline{\zeta}_k - \zeta_j}\left(\frac{1}{\zeta_j - 2t} - \frac{1}{\overline{\zeta}_k - 2t}\right), \\ j,\ k = 1,2,\dots,n. \end{gathered} \tag{8}$$

Подставим разложения (8) в (7). Тогда, в силу выполнения условия $\varphi(t) \geqslant 0$ на промежутке $[-1, 1]$, получаем, что для того, чтобы неравенство (3) влекло за собой неравенство (4) необходимо и достаточно, чтобы эрмитова форма $H_n(X)$ была неотрицательна. Этим утверждение 1 доказано.

Докажем теперь утверждение 2.

Достаточность. Если $H_n(X)$ – положительно определенная эрмитова форма, то все главные миноры ее матрицы $A(X)$ положительны (см. [8, с. 300]). Если X' – произвольная точка из достаточно малой окрестности точки X, то все главные миноры матрицы $A(X')$ также положительны и, следовательно, точка $X' \in D_n(T)$, а $X \in \operatorname{Int} D_n(T)$.

Необходимость. Пусть $X_n \in \operatorname{Int} D_n(T)$ и пусть точке X_n соответствуют в представлении (1) функции $f(z) \in T$ и $\alpha(t) \in M_1$.

Из (3) следует, что

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) d\alpha(t) = H_n(X). \tag{9}$$

Поэтому, если точке X_n соответствует хотя бы одна функция $\alpha(t) \in M_1$, не являющаяся кусочно-постоянной, то эрмитова форма $H_n(X)$ является положительно определенной.

Функция $\alpha_0(t) = \frac{t}{2} \in M_1$ и не является кусочно-постоянной. Пусть функции $\alpha_0(t)$ в представлении (1) соответствует функция $f^{(0)}(z)$. Точка $X_n^{(0)}$, соответствующая функции $f^{(0)}(z)$, является внутренней точкой множества $D_n(T)$.

Пусть X_n – произвольная внутренняя точка множества $D_n(T)$, отличная от $X_n^{(0)}$ такая, что $X_n = (1-\tau)X_n^{(0)} + \tau X_n^{(1)}$, $0 < \tau < 1$, и $X_n^{(1)} \in \operatorname{Int} D_n(T)$. Пусть точке $X_n^{(1)}$ в представлении (1) соответствуют функции $f_1(z) \in T$ и $\alpha_1(t) \in M_1$. Функция

$$\alpha(t) = (1-\tau)\alpha_0(t) + \tau\alpha_1(t) \in M_1,$$

пусть этой функции в представлении (1) соответствует функция $f(z) \in T$. Точке X_n соответствуют функция $f(z)$ и функция $\alpha(t)$, не являющаяся кусочно-постоянной. Следовательно, эрмитова форма $H_n(X)$ – положительно определенная.

Утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3.

Пусть $X \in \partial D_n(T)$. Заметим, что

$$\partial D_n(T) = \Big\{ X \in D_n(T) : \operatorname{Re} L(X) = \max_{w=(w_1,w_2,\dots,w_n)\in D_n(T)} \operatorname{Re} L(w) \Big\},$$

где

$$L(w) = \delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j w_j, \quad \delta_0 \neq 0, \quad (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{C}^n$$

– ненулевой вектор.

В силу (1),

$$L(w) = \delta_0 + \int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{\zeta_j - 2t}\, d\alpha(t),$$

следовательно,

$$\operatorname{Re} L(w) = \int_{-1}^{1} \varphi(t) d\alpha(t).$$

Далее, имеем

$$\max_{w\in D_n(T)} \operatorname{Re} L(w) = \max_{\alpha\in M_1} \int_{-1}^{1} \varphi(t) d\alpha(t) = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} \varphi(t).$$

Функция $\varphi(t) \not\equiv \text{const}$ и достигает абсолютного максимума на отрезке $[-1, 1]$ в конечном числе точек t_k, $k = 1, 2, \dots, q$, $q \leqslant n$, и, возможно, в точках ± 1. Поэтому границе множества $D_n(T)$ соответствуют только те функции класса T, которым в представлении (1) соответствуют кусочно-постоянные функции $\alpha(t) \in M_1$ с возможными точками разрыва только в точках $t_1, t_2, \dots, t_n, -1, 1$, т.е. функции $f_X(z)$.

Для нахождения $\{\lambda_k\}_1^{n+1}$ имеем систему уравнений

$$w_j = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \frac{z_j}{1 - 2t_k z_j + z_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1.$$

Утверждение 3 теоремы 1 доказано.

2.2. Доказательство следствия 1

В силу утверждения 2 теоремы 1 и [8, с. 300], имеем

$$\operatorname{Int} D(T_{n-1}) = \{w_n \in \mathbb{C} : \Delta_j(w_n) > 0, j = 1, 2\},$$

где

$$\Delta_j(w_n) = \Delta_j(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, w_n)$$

и

$$\Delta_1(w_1, \dots, w_n) = \Delta_1^{(n)},$$

$$\Delta_1^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & w_1 & \cdots & w_{n-1} & w_n \\ \overline{w}_1 & \dfrac{\operatorname{Im}\overline{w}_1}{\operatorname{Im}\zeta_1} & \cdots & \dfrac{\overline{w}_1 - w_{n-1}}{\zeta_{n-1} - \overline{\zeta}_1} & \dfrac{\overline{w}_1 - w_n}{\zeta_n - \overline{\zeta}_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \overline{w}_n & \dfrac{w_1 - \overline{w}_n}{\overline{\zeta}_n - \zeta_1} & \cdots & \dfrac{\overline{w}_n - w_{n-1}}{\zeta_{n-1} - \overline{\zeta}_n} & \dfrac{\overline{w}_n - w_n}{\zeta_n - \overline{\zeta}_n} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(w_1, \dots, w_n) = \Delta_2^{(n)},$$

$$\Delta_2^{(n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\operatorname{Im}\varkappa_1}{\operatorname{Im}\zeta_1} - 1 & \dfrac{\overline{\varkappa}_2 - \varkappa_1}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1} - 1 & \cdots & \dfrac{\overline{\varkappa}_{n-1} - \varkappa_1}{\overline{\zeta}_{n-1} - \zeta_1} - 1 & \dfrac{\overline{\varkappa}_n - \varkappa_1}{\overline{\zeta}_n - \zeta_1} - 1 \\ \dfrac{\varkappa_2 - \overline{\varkappa}_1}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} - 1 & \dfrac{\operatorname{Im}\varkappa_2}{\operatorname{Im}\zeta_2} - 1 & \cdots & \dfrac{\overline{\varkappa}_{n-1} - \varkappa_2}{\overline{\zeta}_{n-1} - \zeta_2} - 1 & \dfrac{\overline{\varkappa}_n - \varkappa_2}{\overline{\zeta}_n - \zeta_2} - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\varkappa_n - \overline{\varkappa}_1}{\zeta_n - \overline{\zeta}_1} - 1 & \dfrac{\varkappa_n - \overline{\varkappa}_2}{\zeta_n - \overline{\zeta}_2} - 1 & \cdots & \dfrac{\overline{\varkappa}_{n-1} - \varkappa_n}{\overline{\zeta}_{n-1} - \zeta_n} - 1 & \dfrac{\overline{\varkappa}_n - \varkappa_n}{\overline{\zeta}_n - \zeta_n} - 1 \end{vmatrix}.$$

В определителях $\Delta_j^{(n)}$, $j = 1, 2$, все элементы последнего столбца и последней строки зависят от w_n. Поэтому преобразуем эти определители следующим образом. Умножим первую строку определителя $\Delta_1^{(n)}$ на $(\zeta_n - \overline{\zeta}_j)^{-1}$ и сложим с $(j+1)$-ой строкой, затем умножим первый столбец полученного определителя на $(\overline{\zeta}_n - \zeta_j)^{-1}$ и сложим с $(j+1)$-ым, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда получим

$$\Delta_1^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} |\zeta_n - \overline{\zeta}_j|^{-2} A.$$

Далее умножим первую строку определителя $\Delta_2^{(n)}$ на $\frac{\overline{\zeta}_n-\zeta_1}{\overline{\zeta}_n-\zeta_j}$ и вычтем из j-ой строки, затем умножим первый столбец полученного определителя на $\frac{\zeta_n-\overline{\zeta}_1}{\zeta_n-\overline{\zeta}_j}$ и вычтем из j-ого, $j=2,3,\dots,n$. Тогда получим равенство

$$\Delta_2^{(n)}=\prod_{j=2}^{n}|\zeta_n-\overline{\zeta}_j|^{-2}B.$$

В определителях A и B от w_n зависят только элементы a_{0n}, a_{n0} и b_{n1}, b_{1n}, соответственно, причем $a_{n0}=\overline{a}_{0n}$, $b_{n1}=\overline{b}_{1n}$. Поэтому запишем A и B следующим образом:

$$A=-|a_{0n}|^2A_1+(-1)^n2\,\mathrm{Re}(\overline{a}_{0n}A_2^0)+A_3^0, \tag{10}$$

где

$$a_{0n}=1+w_n(\overline{\zeta}_n-\zeta_n), \tag{11}$$

$$B=-|b_{1n}|^2B_1-(-1)^n2\,\mathrm{Re}(\overline{b}_{1n}B_2^0)+B_3^0, \tag{12}$$

где

$$b_{1n}=2i\,\mathrm{Im}\,\zeta_n\cdot\frac{\overline{w}_n(\overline{\zeta}_n^2-4)-\varkappa_1}{\overline{\zeta}_n-\zeta_1}+(\overline{\zeta}_1-\zeta_n)\frac{\mathrm{Im}\,\varkappa_1}{\mathrm{Im}\,\zeta_1}+\overline{\zeta}_n-\overline{\zeta}_1. \tag{13}$$

Так как $X_{n-1}=X(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})$ – внутренняя точка множества $D_{n-1}(T)$, то, по утверждению 2 теоремы 1, эрмитова форма $H_{n-1}(X)$ – положительно определенная. Следовательно, последовательные главные миноры матрицы эрмитовой формы $H_{n-1}(X)$ положительны. Поэтому справедливы неравенства

$$\widetilde{A}_1>0,\quad \widetilde{B}_1>0.$$

Положим в (10)–(13) $w_j=\omega_j$, $j=1,\dots,n-1$. Тогда выполнение двух неравенств $\Delta_j(w_n)>0$, $j=1,2$, равносильно выполнению неравенств

$$\widetilde{A}>0,\quad \widetilde{B}>0,$$

которые можно записать так

$$\left|a_{0n}-(-1)^n\frac{\widetilde{A}_2^0}{\widetilde{A}_1}\right|^2<\frac{1}{\widetilde{A}_1^2}\big(|\widetilde{A}_2^0|^2+\widetilde{A}_1\widetilde{A}_3^0\big),$$

$$\left|\overline{b}_{1n}-(-1)^{n-1}\frac{\overline{\widetilde{B}^0{}_2}}{\widetilde{B}_1}\right|^2<\frac{1}{\widetilde{B}_1^2}\big(|\widetilde{B}_2^0|^2+\widetilde{B}_1\widetilde{B}_3^0\big).$$

В силу детерминантного тождества Сильверста (см. [8, с. 48]), имеем

$$\widetilde{A}_1\widetilde{A}_3^0=\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3-\left|\widetilde{A}_2^0\right|^2,$$
$$\widetilde{B}_1\widetilde{B}_3^0=\widetilde{B}_2\widetilde{B}_3-\left|\widetilde{B}_2^0\right|^2.$$

Заметим, что множество $D(T_{n-1})$ замкнуто. Используя (11) и (13), получим следствие 1.

Литература

1. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen,* Math. Z. **35**, No. 1 (1932), 93–121.
2. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений систем $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ и $\{f(z_1), f(z_2)\}$ в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 65–75.
4. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы $\{f(z_1), f(z_2), f(z_3)\}$ в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 5–17.
5. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех., и астр., вып. 2 (1965), 45–63.
6. В. А. Адреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех., и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
7. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи,* М., 1973.
8. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц,* 3-е изд., М., 1967.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 25 июня 2004 г.