Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ КОНДЕНСАТОРОВ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

Емкости конденсаторов имеют многочисленные приложения в различных вопросах геометрической теории функций комплексного переменного (см., например, [1, 2]). Наибольшее распространение получил классический тип конденсатора, состоящего из двух пластин. С позиции экстремально-метрического подхода он входит в понятия приведенных модулей области, двуугольника и треугольника [3, 4]. Конденсаторы из трех и более пластин в теории функций начали рассматриваться сравнительно недавно и изучены в меньшей степени [2, 5]. В данной работе приводятся новые приложения таких конденсаторов в традиционных задачах теории аналитических функций. Заменяя в решении этих задач стандартные конденсаторы (с двумя пластинами) на обобщенные (с тремя и более), мы приходим к новым постановкам проблем, имеющим самостоятельный интерес. Известно, что применение конденсаторов с пластинами, вырождающимися в точки (или группы точек), ведет к оценкам модулей производных конформного отображения $w = f(z)$ в этих точках. Если теперь вырождаются пластины разной полярности, при их одновременном сближении (подобно диполю), то мы приходим к оценкам с участием производной Шварца $S_f(z) = (f''(z)/f'(z))' - (f''(z)/f'(z))^2/2$. Увеличение числа сближающихся пластин дает производные от Шварциана и т. д. Отметим важную роль производной Шварца в теории функций [7] и некоторый интерес к ней в последнее время [8–10].

Первый параграф настоящей работы носит вспомогательный характер. Здесь приводятся необходимые сведения из теории

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028) и ДВО РАН (грант 04-1-ОМН-027).

емкостей обобщенных конденсаторов. В §2 даны простые доказательства некоторых теорем искажения для аналитических однолистных и ограниченных в круге функций. В частности, для таких функций обобщается классическая лемма Левнера и известный результат Поммеренке о поведении логарифмической емкости граничного множества. В третьем параграфе приводятся оценки комбинаций коэффициентов в разложениях аналитических однолистных функций как во внутренних, так и в граничных точках. Интерес к такого рода оценкам возник, в частности, в связи с предложенной первым автором редукцией ряда задач для многолистных функций к однолистным. В качестве примеров даны некоторые оценки коэффициентов алгебраических полиномов. Наконец, в §4 рассматриваются задачи об экстремальном разбиении комплексной сферы как с произвольными фиксированными, так и со свободными “диполями” на окружности. Рассмотренные применения емкостей конденсаторов обусловлены, в основном, конформной инвариантностью и минимальным свойством интеграла Дирихле. Впервые систематическое использование этих свойств интеграла Дирихле в теории однолистных функций было осуществлено Нехари [11]. Таким образом, наш подход можно рассматривать отчасти как развитие метода Нехари с привлечением новых идей. Предлагается единое изложение, простота доказательств и емкостная интерпретация некоторых результатов.

§1. Емкости обобщенных конденсаторов

Следуя работе [6], приведем здесь понятия обобщенного конденсатора (далее просто конденсатора) и его емкости и рассмотрим некоторые их свойства в тех частных случаях, которые необходимы нам в дальнейшем. Пусть B – конечносвязная область на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$ и пусть $\overline{B}$ означает компактификацию области B посредством простых концов Каратеодори, граница ∂B – совокупность простых концов. Под окрестностью будем понимать любое открытое в $\overline{B}$ множество. В дальнейшем элемент из $\overline{B}$, соответствующий внутренней точке области B, отождествляется с самой этой точкой. Конденсатором в $\overline{B}$ называется тройка $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ – совокупность замкнутых в $\overline{B}$ попарно непересекающихся множеств E_k, $k = 1, \dots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел δ_k, $k = 1, \dots, n$. Множества E_k, $k = 1, \dots, n$, будем называть пластинами конденсатора C.

Емкость $\operatorname{cap} C$ конденсатора C определяется как точная нижняя грань интегралов Дирихле

$$I(v, B) := \iint\limits_{B} |\nabla v|^2 dxdy$$

по всем *допустимым* функциям $v(z) \quad (z = x + iy)$, т. е. вещественным функциям $v(z)$, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки множества B за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и равным δ_k в некоторой окрестности пластины E_k, $k = 1, \ldots, n$. Непосредственно из определения емкости конденсатора вытекает следующее свойство монотонности.

Утверждение 1. *Если для конденсаторов* $C_1 = (B, \{E_{1\,k}\}_{k=1}^n, \Delta)$ *и* $C_2 = (B, \{E_{2\,k}\}_{k=1}^n, \Delta)$ *имеют место включения* $E_{1\,k} \subset E_{2\,k}$, $k = 1, \ldots, n$, *то*

$$\operatorname{cap} C_1 \leq \operatorname{cap} C_2.$$

Конденсатор $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^n, \Delta)$ назовем симметричным относительно окружности $|z| = 1$, если множества B и E_k, $k = 1, \ldots, n$, обладают этой симметрией, т. е. если $B = \{z : 1/\overline{z} \in B\}$ и $E_k = \{z : 1/\overline{z} \in E_k\}$, $k = 1, \ldots, n$. Введем обозначение $U = \{z : |z| < 1\}$.

Утверждение 2. *Пусть конденсатор* $C = (\overline{\mathbb{C}}_z, \{E_k\}_{k=1}^n, \Delta)$ *симметричен относительно окружности* $|z| = 1$, *а конденсатор* $\widetilde{C} = (\overline{\mathbb{C}}_w, \{\widetilde{E}_k\}_{k=1}^n, \Delta)$ *симметричен относительно окружности* $|w| = 1$. *Предположим, что существует аналитическая однолистная в круге* U *функция* $w = f(z)$ *такая, что* $|f(z)| < 1$ *при* $z \in U$ *и* $f(E_k \bigcap \overline{U}) \subset \widetilde{E}_k$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap}, C \leq \operatorname{cap} \widetilde{C}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $\widetilde{v}(w)$, допустимую для конденсатора $\widetilde{C}$, и пусть

$$I(\widetilde{v}, \{w : |w| < 1\}) \leq I(\widetilde{v}, \{w : |w| > 1\})$$

(в противном случае рассмотрим допустимую функцию $\widetilde{v}(1/\overline{w})$ с тем же интегралом Дирихле). Подберем число $\rho < 1$ настолько близким к единице, чтобы функция

$$v_\rho(z) = \begin{cases} \widetilde{v}(f(\rho z)), & |z| \leq 1, \\ \widetilde{v}(f(\rho/\overline{z})), & |z| \geq 1, \end{cases}$$

была допустимой для конденсатора C. Ввиду конформной инвариантности интеграла Дирихле, имеем

$$I(\widetilde{v}, \mathbb{C}_w) \geq 2I(\widetilde{v}, \{w : |w| < 1\}) \geq I(v_\rho, \mathbb{C}_z) \geq \operatorname{cap} C.$$

Осталось перейти к инфимуму по всевозможным допустимым функциям $\widetilde{v}(w)$. Утверждение доказано.

Утверждение 3 [6, теорема 4]). *Пусть B_i, $i = 1, \dots, m$, – попарно непересекающиеся подобласти области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, и пусть для конденсаторов $C_i = (B_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i})$, $i = 1, \dots, m$, и $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n})$ выполняется условие: для каждого множества E_{ij}, $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, m$, существует множество E_k, $1 \leq k \leq n$, такое, что $E_{ij} \subset E_k$, причем для соответствующих значений δ_{ij} и δ_k имеем $\delta_{ij} = \delta_k$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap} C_i \leq \operatorname{cap} C.$$

Следующее утверждение является упрощенным вариантом теоремы 5 работы [6].

Утверждение 4. *Пусть B_i, $i = 1, \dots, m$, – попарно непересекающиеся подобласти области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, и пусть для конденсаторов $C_i = (B_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i})$, $i = 1, \dots, m$, и $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n})$ выполняются следующие условия:*

$E_1 = \partial B, \quad \delta_1 = 0,$

$E_{i1} = \partial B_i, \quad \delta_{i1} = 0, i = 1, \dots, m,$

для каждого множества E_k, $k = 1, \dots, n$, существует множество E_{ij}, $1 \leq j \leq n_i$, $1 \leq i \leq m$, такое, что $E_k \subset E_{ij}$, причем $\delta_k = \delta_{ij}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap} C_i \geq \operatorname{cap} C.$$

Доказательство. Если функции $v_i(z)$, $i = 1, \dots, m$, допустимы соответственно для конденсаторов C_i, $i = 1, \dots, m$, то функция

$$v(z) = \begin{cases} v_i(z), & z \in \overline{B}_i, \\ 0, & z \in B \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i, \end{cases}$$

является допустимой для конденсатора C. Отсюда

$$\operatorname{cap} C \le I(v, B) = \sum_{i=1}^{m} I(v_i,\, B_i).$$

Осталось воспользоваться произвольностью функций $v_i(z)$ и перейти к инфимумам. Утверждение доказано.

Для конечной точки z_0 комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$ обозначим через $D(z_0, r)$ замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. В случае бесконечно удаленной точки определим $D(\infty, r) = \{z : |z| \ge 1/r\}$. Замкнутое множество $E(z_0, r)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, зависящее от параметра $r > 0$, назовем *почти кругом* с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют положительные функции $r_j(r)$, $0 < r < \varepsilon$, $j = 1, 2$, такие, что

$$D(z_0, r_1(r)) \subset E(z_0, r) \subset D(z_0, r_2(r))$$

и $r_j(r) \sim r$ при $r \to 0$, $j = 1, 2$.

Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных точек комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел, $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \ne 0$, и пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$; μ_k, ν_k, $k = 1, \ldots, n$, – произвольные положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k \nu_k^{-1} = 0$. Имеет место следующая асимптотическая формула

$$\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{C}}_z,\, \{E(z_k, \psi_k)\}_{k=1}^n,\, \Delta) = 2\pi \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k}\right] \left(-\frac{1}{\log r}\right) +$$
$$+2\pi \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + {\sum_{\substack{k,l=1\\ k\ne l}}^{n}}{}' \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l|\right] \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + \qquad (1)$$
$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0,$$

где штрих у знака суммы означает, что при $z_k = \infty$ ($z_l = \infty$) под соответствующим слагаемым понимаем нуль [2, 12, 13].

Пусть теперь B – произвольная область на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, имеющая функцию Грина $g_B(z, \zeta)$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных точек области B, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел, $\sum\limits_{k=1}^n \delta_k^2 \neq 0$, и пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$; μ_k, ν_k, $k = 1, \ldots, n$, – произвольные положительные числа. Для емкости конденсатора

$$C(r) := (B, \{\partial B, E(z_1, \psi_1), \ldots, E(z_n, \psi_n)\}, \{0, \delta_1, \ldots, \delta_n\})$$

справедлива асимптотическая формула

$$\operatorname{cap} C(r) = 2\pi \left[\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k}\right] \left(-\frac{1}{\log r}\right) -$$

$$-2\pi \left[\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l)\right] \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + \qquad (2)$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0,$$

где $r(B, z_k)$ означает внутренний радиус области B относительно точки z_k, $k = 1, \ldots, n$ [2, 6, 12].

§2. Теоремы искажения

Обозначим через $\mathcal{B}$ класс аналитических и однолистных в круге U функций $w = f(z)$, удовлетворяющих условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$, и пусть $\mathcal{B}_0$ – подкласс функций из класса $\mathcal{B}$, для которых $f(0) = 0$. Покажем сначала, как из монотонности емкости и формулы (2) вытекает одно из известных неравенств Нехари. Пусть z_k, $k = 1, \ldots, n$, – произвольные точки круга U, и пусть δ_k, $k = 1, \ldots, n$ – произвольные вещественные числа, не все равные нулю. При достаточно малом $r > 0$ функция $w = f(z)$ класса $\mathcal{B}$ "отображает" конденсатор

$$C_z(r) = (U_z, \{\partial U_z, E(z_1, r), \ldots, E(z_n, r)\}, \{0, \delta_1, \ldots, \delta_n\})$$

на конденсатор $f(C_z(r))$ вида

$$f(C_z(r)) = (U_w, \{\overline{U}_w \setminus f(U_z), E(f(z_1), r|f'(z_1)|), \ldots,$$
$$E(f(z_n), r|f'(z_n)|)\}, \quad \{0, \delta_1, \ldots, \delta_n\}).$$

Положим по определению

$$C_w(r) = (U_w, \{\partial U_w, E(f(z_1), r|f'(z_1)|), \dots, E(f(z_n), r|f'(z_n)|)\}, \\ \{0, \delta_1, \dots, \delta_n\}).$$

Из конформной инвариантности емкости и утверждения 1 следует

$$\operatorname{cap} C_z(r) = \operatorname{cap} f(C_z(r)) \geq \operatorname{cap} C_w(r).$$

Переходя в итоговом неравенстве к пределу при $r \to 0$ с применением формулы (2), получаем следующее неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|^{\delta_k^2} \leq \left[\prod_{\substack{k,s=1 \\ k\neq s}}^{n} \left| \frac{z_k - z_s}{f(z_k) - f(z_s)} \right|^{\delta_k \delta_s} \right] \prod_{k,s=1}^{n} \left| \frac{1 - f(z_k)\overline{f(z_s)}}{1 - z_k \overline{z_s}} \right|^{\delta_k \delta_s}.$$

В работе Нехари [11, с. 258] имеется более общее неравенство с комплексными числами δ_k, но удовлетворяющими условию $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0$, и это неравенство обычно повторяется в литературе. Однако для вещественных чисел δ_k условие $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0$ в данном случае излишне (см. также [11, с. 283]). Частные случаи следующей оценки (но при иных условиях на функцию $w = f(z)$) встречаются в недавних работах [14, 15].

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$, и пусть она и ее производные определены также в граничных точках z_k, $|z_k| = |f(z_k)| = 1$, $k = 1, \dots, l$. Пусть z_k, $k = l+1, \dots, n$, – произвольные точки круга U. Тогда для любых вещественных чисел δ_k, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{k=1}^{l} \delta_k + 2 \sum_{k=l+1}^{n} \delta_k = 0,$$

справедливо неравенство

$$\left[\prod_{k=1}^{l} |f'(z_k)|^{\delta_k^2} \right] \prod_{k=l+1}^{n} |f'(z_k)|^{2\delta_k^2} \geq$$

$$\geq \left[\prod_{\substack{k,s=1 \\ k \neq s}}^{n} \left| \frac{z_k - z_s}{f(z_k) - f(z_s)} \right|^{\theta_{ks}\delta_k\delta_s} \right] \prod_{k=1}^{n} \prod_{s=l+1}^{n} \left| \frac{1 - z_k \overline{z_s}}{1 - f(z_k)\overline{f(z_s)}} \right|^{2\delta_k\delta_s}, \quad (3)$$

где $\theta_{ks} = 2$, если одновременно $k \geq l+1$ и $s \geq l+1$, и $\theta_{ks} = 1$ в остальных случаях.

Доказательство. Можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$ и $z_k \neq 0$, $f(z_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Заметим также, что $f'(z_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, l$, в чем легко убедиться применяя, например, граничную лемму Шварца к суперпозиции $f(z)$ и подходящего мебиусова автоморфизма круга U на себя. Рассмотрим симметричные конденсаторы вида

$$C_z(r) = (\mathbb{C}_z\,, \{E(z_1, r), \ldots, E(z_n, r),$$
$$E(1/\overline{z_{l+1}}, r/|z_{l+1}^2|), \ldots, E(1/\overline{z_n}, r/|z_n^2|)\},$$
$$\{\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta_{l+1}, \ldots, \delta_n\})$$

и

$$C_w(r) = (\mathbb{C}_w\,, \{E(f(z_1), r|f'(z_1)|), \ldots, E(f(z_n), r|f'(z_n)|), E(1/\overline{f(z_{l+1})},$$
$$r|f'(z_{l+1})/f^2(z_{l+1})|), \ldots, E(1/\overline{f(z_n)}, r|f'(z_n)/f^2(z_n)|)\},$$
$$\{\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta_{l+1}, \ldots, \delta_n\}).$$

Из геометрического смысла модуля производной легко заключаем, что почти круги можно подобрать таким образом, чтобы выполнялись условия утверждения 2. Отсюда

$$\operatorname{cap} C_z(r) \leq \operatorname{cap} C_w(r)$$

для достаточно малых $r > 0$. Осталось воспользоваться асимптотической формулой (1). Теорема доказана.

Замечание. Множество граничных точек z_k в теореме 1 может быть пустым. В этом случае в формулировке этой теоремы понимается $l = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{l} \delta_k = 0$, $\prod\limits_{k=1}^{l} |f'(z_k)|^{\delta_k^2} = 1$ и $\theta_{ks} = 2$, $k, s = 1, \ldots, n$. Доказательство по форме сохраняется и упрощается его запись, так как соответствующие пластины конденсаторов опускаются.

В условии теоремы 1 существование производных $f'(z_k)$, $k = 1, \ldots, l$, можно заменить на наличие угловых пределов $f(z_k)$, лежащих на $|w| = 1$, и ограниченность угловых производных $f'(z_k)$,

$k=1,\dots,l$, , которые затем фигурируют в формуле (3). Это несложно показать с привлечением теоремы 2 статьи [5]. Неравенство (3) вытекает также из результата Нехари [11, с. 258], если воспользоваться достаточно тонкими утверждениями о граничном поведении аналитических функций. Отметим, что по лемме Жюлиа–Вольфа существование углового предела $f(z_k)$, $|f(z_k)|=1$, влечет существование угловой производной $f'(z_k)$. В случае если последняя конечна, существует угловой предел аналитической функции $f'(z)$, равный $f'(z_k)$, $z\to z_k$, $k=1,\dots,l$ (см., например, [16, с.79–83], [17, с. 9–12]). Мы привели доказательство теоремы 1 главным образом для сравнения нашего подхода с другими методами, а также с желанием показать, что следствия подобных результатов заслуживают большего внимания.

Пусть γ – множество на окружности $|z|=1$, состоящее из конечного числа дуг, $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность точек $z_k\in U$, $k=1,\dots,n$, и $\Delta=\{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел δ_k, $k=1,\dots,n$, $\sum\limits_{k=1}^n\delta_k^2\neq 0$. Для заданных γ, Z и Δ введем обозначение

$$H(\gamma,Z,\Delta)=\sum_{k=1}^{2n}\delta_k^2\log r(\mathbb{C}\setminus\overline{\gamma},z_k)+\sum_{\substack{k,s=1\\k\neq s}}^{2n}\delta_k\delta_s g_{\mathbb{C}\setminus\overline{\gamma}}(z_k,z_s),$$

где $\delta_{n+k}=\delta_k$, $z_{n+k}=1/\overline{z_k}$, $k=1,\dots,n$.

Следующее утверждение в литературе, по-видимому, не встречалось, и его можно рассматривать как далеко идущее обобщение известной леммы Левнера в случае однолистных функций.

Теорема 2. *Пусть функция $w=f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$, и пусть $|f(z)|\to 1$, когда точка z стремится к множеству γ, состоящему из конечного числа открытых дуг на окружности $|z|=1$. Тогда для любых совокупностей точек $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ и чисел $\Delta=\{\delta_k\}_{k=1}^n$ справедливо неравенство*

$$2{\sum_{k=1}^{n}}'\delta_k^2\log\left|\frac{z_kf'(z_k)}{f(z_k)}\right|\geq H(f(\gamma),W,\Delta)-H(\gamma,Z,\Delta),\tag{4}$$

где $W=\{f(z_k)\}_{k=1}^n$, $f(\gamma)$ – множество предельных точек $f(z)$, когда $z\to\gamma$, а штрих у знака суммы означает, что при $z_k=0$ ($f(z_k)=0$) под соответствующим множителем понимается единица.

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество $f(\gamma)$ так же состоит из конечного числа дуг, но уже на окружности $|w| = 1$ (см., например, [17, с. 12]). Аналогично доказательству теоремы 1, рассмотрим симметричные конденсаторы вида

$$C_z(r) = (\mathbb{C}_z \setminus \overline{\gamma}, \{\overline{\gamma}, E(z_1, r), \dots, E(z_n, r), \\ E(1/\overline{z_1}, r/|z_1^2|), \dots, E(1/\overline{z_n}, r/|z_n^2|)\}, \\ \{0, \delta_1, \dots, \delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n\})$$

и

$$C_w(r) = (\mathbb{C}_w \setminus \overline{f(\gamma)}, \{\overline{f(\gamma)}, E(f(z_1), r|f'(z_1)|), \dots, E(f(z_n), r|f'(z_n)|), \\ E(1/\overline{f(z_{l+1})}, r|f'(z_1)/f^2(z_1)|), \dots, E(1/\overline{f(z_n)}, r|f'(z_n)/f^2(z_n)|)\}, \\ \{0, \delta_1, \dots, \delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n\}),$$

где в случае $z_k = 0$ полагаем $E(1/\overline{z_k}, r/|z_k^2|) := E(\infty, r)$, а если $f(z_k) = 0$, то $E(1/\overline{f(z_k)}, r|f'(z_k)/f^2(z_k)|) := E(\infty, r|f'(z_k)|)$, $1 \le k \le n$, и $r > 0$ достаточно мало. Все почти круги подбираются таким образом, чтобы $f(E(z_k, r)) \subset E(f(z_k), r|f'(z_k)|)$, $k = 1, \dots, n$. Согласно утверждению 2,

$$\operatorname{cap} C_z(r) \le \operatorname{cap} C_w(r).$$

Применение в этом соотношении асимптотической формулы (2) ведет при $r \to 0$ к неравенству (4). Теорема доказана.

Полученный результат легко распространяется на случай точек z_k, лежащих на окружности $|z| = 1$ и таких, что $|f(z_k)| = 1$, а так же на случай более общих множеств γ, что мы опускаем, не желая загромождать формулировку теоремы и ее доказательство.

Применим теорему 2 к функции $w = f(z)$ класса $\mathcal{B}_0$ в простейшем случае, полагая $n = 1$, $z_1 = 0$ и $\delta_1 = 1$. Неравенство (4) дает оценку

$$2 \log |f'(0)| \ge H(f(\gamma), \{0\}, \{1\}) - H(\gamma, \{0\}, \{1\}).$$

Обозначив $\overline{\gamma} = E$, $\mathbb{C} \setminus E = B$, имеем

$$H(\gamma, \{0\}, \{1\}) = 2 \log r(B, \infty) + 2 g_B(0, \infty) = 4 \log r(B, \infty) = -4 \log \operatorname{cap} E,$$

где cap E – логарифмическая емкость множества E [1, с. 15]. Аналогично,

$$H(f(\gamma), \{0\}, \{1\}) = -4 \log \operatorname{cap} f(E),$$

$f(E) = \overline{f(\gamma)}$. В итоге получаем неравенство Поммеренке

$$\sqrt{|f'(0)|} \operatorname{cap} f(E) \geq \operatorname{cap} E$$

[16, с. 217]. Если теперь E – дуга длины σ, а $f(E)$ – дуга длины σ', то, как известно, cap $E = \sin(\sigma/4)$, cap $f(E) = \sin(\sigma'/4)$ и, с учетом леммы Шварца $|f'(0)| \leq 1$, приходим к неравенству Левнера

$$\sigma' \geq \sigma$$

[17, с. 12, 31]. Желая привести новый результат с вычислением правой части в (4), рассмотрим случай из двух сближающихся точек z_1 и z_2 и $\delta_1 = -\delta_2 = 1$ (диполь).

Следствие 1. *Если функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{B}_0$, и если $f(z) \to \gamma' \subset \{w : |w| = 1\}$, когда точка z стремится к открытой дуге $\gamma \subset \{z : |z| = 1\}$, то выполняется неравенство*

$$\left| \frac{1}{3} S_f(0) + e^{-i2t} \sin^2 \frac{\sigma}{2} - e^{-i2t'} \left(f'(0)\right)^2 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \left(\cos \frac{\sigma}{2} - |f'(0)|^2 \cos \frac{\sigma'}{2} \right), \tag{5}$$

где σ – длина дуги γ, e^{it} – середина этой дуги, σ' – длина γ', а $e^{it'}$ – ее середина. Равенство достигается для функции Пика $l(z; \lambda) = k^{-1}(\lambda k(z))$ и дуг $\{z : z = e^{i\theta}, |\theta| < \sigma/2\}$ для любых $0 < \sigma < 2\pi$ и $\sin^2(\sigma/4) \leq \lambda \leq 1$ (здесь $k(z) = z(1-z)^{-2}$ – функция Кебе).

Доказательство. Применяя неравенство (5) к функции $e^{-it'} f(e^{it} z)$, убеждаемся, что достаточно рассмотреть случай $t = t' = 0$. Пусть в теореме 2 $n = 2$, $z_1 = re^{i\varphi}$, $z_2 = -re^{i\varphi}$, $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = -1$, где $r > 0$ достаточно мало, а φ – любое вещественное число. Полагая

$$f(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots,$$

приходим к следующему представлению левой части неравенства (4):

$$4 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{2\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_1^2} \right) e^{i2\varphi} \right] r^2 + o(r^2), \qquad r \to 0.$$

Для вычисления правой части (4) введем функцию

$$\zeta = h(w) = \frac{2w\sin(\sigma/4)}{1 - w + \sqrt{(1 - we^{i\sigma/2})(1 - we^{-i\sigma/2})}},$$

которая конформно и однолистно отображает область B – внешность дуги $\{w : w = e^{i\theta}, |\theta| \le \sigma/2\}$ на круг $|\zeta| < 1$ (здесь рассматривается та ветвь радикала, которая обращается в единицу при $w = 0$). Следующие вычисления легко осуществить с помощью известных разложений элементарных функций в степенные ряды:

$$\log r(B, f(\pm re^{i\varphi})) = \log \frac{1 - |h(f(\pm re^{i\varphi}))|^2}{|h'(f(\pm re^{i\varphi}))|} =$$

$$= -\log\sin\frac{\sigma'}{4} - |\alpha_1|^2 r^2 \sin^2\frac{\sigma'}{4} - \operatorname{Re}\left\{\pm 2\alpha_1 re^{i\varphi}\cos^2\frac{\sigma'}{4} + \right.$$

$$\left. + r^2 e^{i2\varphi}\left[2\alpha_2\cos^2\frac{\sigma'}{4} + \alpha_1^2\cos^2\frac{\sigma'}{4}\left(3\cos\frac{\sigma'}{2} - 2\cos^2\frac{\sigma'}{4}\right)\right]\right\} + o(r^2),$$

$$\log r(B, 1/\overline{f(\pm re^{i\varphi})}) = \log\frac{r(B, f(\pm re^{i\varphi}))}{|f^2(\pm re^{i\varphi})|} = \log r(B, f(\pm re^{i\varphi})) -$$

$$-2\log(|\alpha_1| r) - 2\operatorname{Re}\left\{\pm\frac{\alpha_2}{\alpha_1}re^{i\varphi} + r^2 e^{i2\varphi}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\right)\right\} + o(r^2),$$

$$g_B(f(re^{i\varphi}), f(-re^{i\varphi})) = g_B(1/\overline{f(re^{i\varphi})}, 1/\overline{f(-re^{i\varphi})}) =$$

$$= \log\left|\frac{1 - h(f(re^{i\varphi}))\overline{h(f(-re^{i\varphi}))}}{h(f(re^{i\varphi})) - h(f(-re^{i\varphi}))}\right| = -\log(2r) - \log\left|\alpha_1\sin\frac{\sigma'}{4}\right| +$$

$$+|\alpha_1|^2 r^2\sin^2\frac{\sigma'}{4} - \operatorname{Re}\left\{r^2 e^{i2\varphi}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} + 2\alpha_2\cos^2\frac{\sigma'}{4} + \alpha_1^2\cos^2\frac{\sigma'}{4}\cos\frac{\sigma'}{2}\right)\right\} + o(r^2),$$

$$g_B(f(\pm re^{i\varphi}), 1/\overline{f(\pm re^{i\varphi})}) = \log\left|\frac{1 - h(f(\pm re^{i\varphi}))\overline{h(1/\overline{f(\pm re^{i\varphi})})}}{h(f(\pm re^{i\varphi})) - h(1/\overline{f(\pm re^{i\varphi})})}\right| =$$

$$= -\log\sin\frac{\sigma'}{4} + |\alpha_1|^2 r^2\cos^2\frac{\sigma'}{4} + \operatorname{Re}\left\{\left(\mp\alpha_1 re^{i\varphi} \mp \overline{\alpha_1}re^{-i\varphi}\right)\cos^2\frac{\sigma'}{4} + \right.$$

$$+r^2e^{i2\varphi}\left[-\alpha_2\cos^2\frac{\sigma'}{4}-\alpha_1^2\left(\cos^2\frac{\sigma'}{4}\cos\frac{\sigma'}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^4\frac{\sigma'}{4}\right)\right]+$$

$$+r^2e^{-i2\varphi}\left[-\overline{\alpha_2}\cos^2\frac{\sigma'}{4}-\overline{\alpha_1}^2\left(\cos^2\frac{\sigma'}{4}\cos\frac{\sigma'}{2}-\frac{1}{2}\cos^4\frac{\sigma'}{4}\right)\right]\Bigg\}+o(r^2),$$

$$g_B(f(\pm re^{i\varphi}),1/\overline{f(\mp re^{i\varphi})})=\log\left|\frac{1-h(f(\pm re^{i\varphi}))\overline{h(1/\overline{f(\mp re^{i\varphi})})}}{h(f(\pm re^{i\varphi}))-h(1/\overline{f(\mp re^{i\varphi})})}\right|=$$

$$=-\log\sin\frac{\sigma'}{4}-|\alpha_1|^2r^2\cos^2\frac{\sigma'}{4}+\mathrm{Re}\left\{\left(\mp\alpha_1re^{i\varphi}\pm\overline{\alpha_1}re^{-i\varphi}\right)\cos^2\frac{\sigma'}{4}+\right.$$

$$+r^2e^{i2\varphi}\left[-\alpha_2\cos^2\frac{\sigma'}{4}-\alpha_1^2\left(\cos^2\frac{\sigma'}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^4\frac{\sigma'}{4}\right)\right]+$$

$$+r^2e^{-i2\varphi}\left[-\overline{\alpha_2}\cos^2\frac{\sigma'}{4}-\overline{\alpha_1}^2\left(\cos^2\frac{\sigma'}{4}\cos\frac{\sigma'}{2}-\frac{1}{2}\cos^4\frac{\sigma'}{4}\right)\right]\Bigg\}+o(r^2).$$

Отсюда

$$H(f(\gamma),\,\{f(re^{i\varphi}),f(-re^{i\varphi})\},\,\{1,-1\})=\log r(B,f(re^{i\varphi}))+$$

$$+\log r(B,f(-re^{i\varphi}))+\log r(B,1/\overline{f(re^{i\varphi})})+\log r(B,1/\overline{f(-re^{i\varphi})})+$$

$$+2\Big[g_B(f(re^{i\varphi}),1/\overline{f(re^{i\varphi})})+g_B(f(-re^{i\varphi}),1/\overline{f(-re^{i\varphi})})-g_B(f(-re^{i\varphi}),$$

$$1/\overline{f(re^{i\varphi})})-g_B(f(re^{i\varphi}),1/\overline{f(-re^{i\varphi})})-2g_B(f(re^{i\varphi}),f(-re^{i\varphi}))\Big]=$$

$$=4\log 2+8|\alpha_1|^2r^2\cos\frac{\sigma'}{2}+4\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}+\alpha_1^2\sin^2\frac{\sigma'}{2}\right)e^{i2\varphi}\right]r^2+o(r^2),$$
$$r\to 0.$$

Положив $f(z)\equiv z$, имеем

$$H(\gamma,\,\{re^{i\varphi},-re^{i\varphi}\},\,\{1,-1\})=4\log 2+8r^2\cos\frac{\sigma}{2}+$$

$$+4\,\mathrm{Re}\left[\sin^2\frac{\sigma}{2}e^{i2\varphi}\right]r^2+o(r^2),\ r\to 0.$$

Осталось подставить полученные выражения в неравенство (4), что с учетом (6) и произвольности φ ведет к неравенству (5). Случай равенства проверяется непосредственно. Следствие доказано.

В заключение заметим, что в ряде случаев теорему искажения для многолистной функции удается свести к некоторой теореме искажения для однолистной функции [14]. В следующем параграфе в качестве примера применения методики работы [14] будет доказана, в частности, "теорема искажения" для произведений Бляшке (следствие 2). Таким образом, наш подход позволяет применить обобщенные конденсаторы к более широкому классу функций, не говоря уже об изучении поведения емкости конденсатора при произвольных регулярных отображениях [2].

§3. Оценки коэффициентов

Применение асимптотических формул для емкостей конденсаторов (1) и (2) с последующим сближением точек "концентрации" пластин ведет к оценкам некоторых комбинаций коэффициентов однолистных функций. Ограничимся здесь только ситуацией, отраженной в теореме 1. Заметим, что вырождающаяся в точку пластина "приводит" к оценке производной $f'(z)$; две сближающиеся и вырождающиеся пластины разной полярности (диполь) – к оценке шварциана $S_f(z)$; а простейший мультиполь из четырех пластин (либо трех пластин соответствующей полярности) дает оценку выражения $S''_f(z) - S^2_f(z)$.

Пусть функция $w = f(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$ принадлежит классу $\mathcal{B}_0$. Применяя к этой функции теорему 1 для точек $z_1 = 0$, $z_2 = re^{i\varphi}$ и чисел $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ (диполь), приходим к неравенству

$$\left|1 + \frac{2\alpha_2}{\alpha_1} re^{i\varphi} + \frac{3\alpha_3}{\alpha_1} r^2 e^{i2\varphi} + \dots \right| \geq$$

$$\geq \left|1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} re^{i\varphi} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} r^2 e^{i2\varphi} + \dots \right|^2 \left(1 - |\alpha_1 re^{i\varphi} + \dots|^2\right)^{-1} (1 - r^2).$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}\, e^{i2\varphi} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right) \geq |\alpha_1|^2 - 1$$

для любых вещественных φ, и мы имеем классическую оценку

$$\frac{1}{6}\,|S_f(0)| = \left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right| \leq 1 - |\alpha_1|^2 \tag{7}$$

(см. также [10, неравенство (1) теоремы 2]). Более сложная конструкция (мультиполя) приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Если функция* $w = f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ *принадлежит классу* $\mathcal{B}_0$, *то*

$$\left|S_f''(0) - S_f^2(0)\right| \le 60(1 - |\alpha_1|^4 - 2|\alpha_2|^2).$$

Равенство достигается для функций Пика $e^{i\theta} l(e^{i\theta'} z; \lambda)$, *где* $0 < \lambda \le 1$, *а* θ, θ' *– вещественные числа.*

Доказательство. Положим в теореме 1 $n = 3$, $z_1 = 0$, $z_2 = re^{i\varphi}$, $z_3 = -re^{i\varphi}$, $\delta_1 = 2$ и $\delta_2 = \delta_3 = -1$, где $0 < r < 1$ и φ – любое вещественное число. В этом случае неравенство (3) примет вид

$$-4 \log |\alpha_1| \le \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=k}^{3} d(z_k, z_s), \tag{8}$$

где приняты обозначения

$$d(z_1, z_1) = 0, \quad d(z_1, z_2) = 2 \log \left| \frac{z_2}{f(z_2)} \right|, \quad d(z_1, z_3) = 2 \log \left| \frac{z_3}{f(z_3)} \right|,$$

$$d(z_2, z_2) = \log \left| \frac{z_2^2 f'(z_2)(1 - |f(z_2)|^2)}{f^2(z_2)(1 - |z_2|^2)} \right|,$$

$$d(z_3, z_3) = \log \left| \frac{z_3^2 f'(z_3)(1 - |f(z_3)|^2)}{f^2(z_3)(1 - |z_3|^2)} \right|,$$

$$d(z_2, z_3) = 2 \log \left| \frac{(f(z_2) - f(z_3))(1 - f(z_2)\overline{f(z_3)})}{(z_2 - z_3)(1 - z_2 \overline{z_3})} \right|.$$

Элементарные вычисления дают

$$d(z_1, z_2) = -2 \log |\alpha_1| + \mathrm{Re} \left\{ re^{i\varphi} \left(-\frac{2\alpha_2}{\alpha_1} \right) + r^2 e^{i2\varphi} \left(-\frac{2\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \right) + \right.$$

$$+ r^3 e^{i3\varphi} \left(-\frac{2\alpha_4}{\alpha_1} + \frac{2\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2} - \frac{2\alpha_2^3}{3\alpha_1^3} \right) + r^4 e^{i4\varphi} \left(-\frac{2\alpha_5}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2} + \frac{2\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1^2} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^3} + \frac{\alpha_2^4}{2\alpha_1^4} \right) \right\} + o(r^4),$$

$$d(z_1, z_3) = -2 \log |\alpha_1| + \mathrm{Re} \left\{ re^{i\varphi} \left(\frac{2\alpha_2}{\alpha_1} \right) + r^2 e^{i2\varphi} \left(-\frac{2\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \right) + \right.$$

$$+r^3e^{i3\varphi}\left(\frac{2\alpha_4}{\alpha_1}-\frac{2\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}+\frac{2\alpha_2^3}{3\alpha_1^3}\right)+r^4e^{i4\varphi}\left(-\frac{2\alpha_5}{\alpha_1}+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2}+\frac{2\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1^2}-\right.$$

$$\left.-\ \frac{2\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^3}+\frac{\alpha_2^4}{2\alpha_1^4}\right)\Bigg\}+o(r^4),$$

$$d(z_2,z_2)=-\log|\alpha_1|+(1-|\alpha_1|^2)r^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|\alpha_1|^4-|\alpha_2|^2\right)r^4+$$

$$+\operatorname{Re}\left\{r^2e^{i2\varphi}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)+r^3e^{i3\varphi}\left(\frac{2\alpha_4}{\alpha_1}-\frac{4\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}+\frac{2\alpha_2^3}{\alpha_1^3}\right)-\right.$$

$$-r^3\left(\alpha_2\overline{\alpha_1}e^{i\varphi}+\alpha_1\overline{\alpha_2}e^{-i\varphi}\right)+r^4e^{i4\varphi}\left(\frac{3\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{7\alpha_3^2}{2\alpha_1^2}-\frac{6\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\ \frac{10\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^3}-\frac{7\alpha_2^4}{2\alpha_1^4}\right)-r^4\left(\alpha_3\overline{\alpha_1}e^{i2\varphi}+\alpha_1\overline{\alpha_3}e^{-i2\varphi}\right)\right\}+o(r^4),$$

$$d(z_3,z_3)=-\log|\alpha_1|+(1-|\alpha_1|^2)r^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|\alpha_1|^4-|\alpha_2|^2\right)r^4+$$

$$+\operatorname{Re}\left\{r^2e^{i2\varphi}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)+r^3e^{i3\varphi}\left(-\frac{2\alpha_4}{\alpha_1}+\frac{4\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}-\frac{2\alpha_2^3}{\alpha_1^3}\right)+\right.$$

$$+r^3\left(\alpha_2\overline{\alpha_1}e^{i\varphi}+\alpha_1\overline{\alpha_2}e^{-i\varphi}\right)+r^4e^{i4\varphi}\left(\frac{3\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{7\alpha_3^2}{2\alpha_1^2}-\frac{6\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\ \frac{10\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^3}-\frac{7\alpha_2^4}{2\alpha_1^4}\right)-r^4\left(\alpha_3\overline{\alpha_1}e^{i2\varphi}+\alpha_1\overline{\alpha_3}e^{-i2\varphi}\right)\right\}+o(r^4),$$

$$d(z_2,z_3)=2\log|\alpha_1|-2(1-|\alpha_1|^2)r^2+\left(1-|\alpha_1|^4-2|\alpha_2|^2\right)r^4+$$

$$+\operatorname{Re}\left\{r^2e^{i2\varphi}\left(\frac{2\alpha_3}{\alpha_1}\right)+2r^3\left(\alpha_2\overline{\alpha_1}e^{i\varphi}-\alpha_1\overline{\alpha_2}e^{-i\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\ 2r^4\left(\alpha_3\overline{\alpha_1}e^{i2\varphi}+\alpha_1\overline{\alpha_3}e^{-i2\varphi}\right)+r^4e^{i4\varphi}\left(\frac{2\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2}\right)\right\}+o(r^4).$$

Подставляя выписанные соотношения в (8), получаем

$$\operatorname{Re}\left[e^{i4\varphi}\left(\frac{2\alpha_5}{\alpha_1}-\frac{3\alpha_3^2}{\alpha_1^2}-\frac{4\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1^2}+\frac{8\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^3}-\frac{3\alpha_2^4}{\alpha_1^4}\right)\right]\geq|\alpha_1|^4+2|\alpha_2|^2-1,$$

для любых вещественных φ. Следовательно,

$$\left|\frac{2\alpha_5}{\alpha_1} - \frac{3\alpha_3^2}{\alpha_1^2} - \frac{4\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1^2} + \frac{8\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3\alpha_2^4}{\alpha_1^4}\right| \leq 1 - |\alpha_1|^4 - 2|\alpha_2|^2,$$

что совпадает с требуемым неравенством. Знак равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Оценка мультиполя во всей комплексной плоскости приводится в работе [13, с. 91]. Отметим элементарное следствие, вытекающее из теоремы 3 для первых двух коэффициентов функции $f(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots$ класса $\mathcal{B}_0$:

$$|\alpha_1|^4 + 2|\alpha_2|^2 \leq 1. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь ситуацию диполя с пластинами на единичной окружности, либо когда одна пластина конденсатора на окружности, а другая – внутри круга U.

Теорема 4. *Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$, и пусть, дополнительно, $f(z)$ определена на некоторой открытой дуге окружности $|z| = 1$, содержащей точку $z = 1$, трижды дифференцируема в этой точке и отображает указанную дугу на дугу окружности $|w| = 1$ так, что справедливо разложение*

$$f(z) = 1 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + o((z-1)^3),\ z \to 1,\ |z| \leq 1.$$

Тогда имеют место точные оценки

$$2\,\mathrm{Re}\,a_2 \geq a_1(a_1 - 1), \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \leq 0. \tag{11}$$

Равенство в (10) достигается для функций Пика $l(z;\lambda)$, $0 < \lambda \leq 1$, а равенство в (11) – для тождественного отображения $f(z) \equiv z$.

Доказательство. Неравенство (10) вытекает из неравенства (3) теоремы 1, если положить $n = 2$, $z_1 = 1$, $z_2 = r$, $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = -1$ и устремить r к единице. Неравенство (11) также вытекает из (3), но при выборе $n = 2$, $z_1 = 1$, $z_2 = e^{i\varphi}$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ и $\varphi \to 0$. Необходимые при этом элементарные вычисления аналогичны таковым при доказательстве теоремы (3), но значительно проще их, поэтому они здесь пропускаются. Заметим также, что в условиях теоремы 4 $a_1 > 0$, а неравенство (11) равносильно неравенству

$\operatorname{Re} S_f(1) \le 0$. Случаи равенства проверяются непосредственно. Теорема доказана.

Нетрудно показать, что изучение конструкций с двумя диполями (например, один в точке $z = 0$, а другой в точке $z = 1$) приводит к оценкам, содержащим выражение $2S_f(0) \pm S_f(1)$. Ранее отмечалось, что, следуя работе [14], из любого утверждения для функций класса $\mathcal{B}$ можно получить некоторые результаты для многолистных функций различных классов (см., например, [18], а также статьи А. В. Олесова в настоящем сборнике). Приведем здесь простые примеры таких приложений. Отметим сперва следствие типа "теоремы искажения", вытекающее из неравенства (10). Классическое неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \ge \frac{n}{2}, \qquad |z| = 1,$$

справедливое для любых полиномов $P(z)$ степени n с нулями в единичном круге U [19] можно интерпретировать как оценку искажения

$$\frac{wB'(w)}{B(w)} \le 1, \qquad |w| = 1,$$

для произведения Бляшке $B(w) = w \prod_{k=1}^{n} [(1 - a_k w)/(w - \overline{a_k})]$, где $|a_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$. Следующий результат дополняет эту оценку.

Следствие 2. *Пусть $B(w)$ то же, что и выше, и пусть точка w принадлежит окружности $|w| = 1$. Тогда либо в этой точке*

$$\frac{wB'(w)}{B(w)} \le 0,$$

либо выполняется неравенство

$$\frac{wB'(w)}{B(w)} \ge 1 + \operatorname{Re} \frac{wB''(w)}{B'(w)}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.4 работы [14], в каждой точке w_0 окружности $|w| = 1$ либо имеет место первое неравенство следствия 2, либо существует обратная функция $w = f(z)$ класса $\mathcal{B}$, $B(f(z)) \equiv z$, $z \in U$. Во втором случае применим оценку (10) к функции $\widetilde{f}(z) = f(z_0 z)/w_0$ (здесь $z_0 = B(w_0)$). В результате получим неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \geq \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} - 1,$$

эквивалентное второму неравенству следствия при $w = w_0$. Что и требовалось доказать.

В дополнение к результатам статьи [18] рассмотрим следующие оценки коэффициентов алгебраических полиномов.

Теорема 5. *Для любых полиномов* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ *степени* n *имеют место точные оценки*

$$|c_n|^2 + |c_n c_{n-2}| \leq ((H(P) - L(P))/2)^2,$$

$$|c_n|^2(|c_n|^2 + 2|c_{n-1}|^2) \leq ((H(P) - L(P))/2)^4,$$

где $L(P) = \min\{\operatorname{Re} P(z) : |z| = 1\}$, $H(P) = \max\{\operatorname{Re} P(z) : |z| = 1\}$. *Равенство достигается для полиномов вида* $P(z) = c_0 + c_n z^n$.

Доказательство. Непосредственным вычислением убеждаемся, что первое неравенство вытекает из неравенства (7), примененного к функции $w = f(z)$, обратной к функции $z = F(w)$ из леммы 2.2 работы [14]. Второе неравенство следует из оценки (9), примененной к той же функции. Случай равенства очевиден. Теорема доказана.

Теорема 6. *Для любых полиномов* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ *степени* n *с вещественными коэффициентами* c_k, $k = 0, 1, \dots, n$, *имеет место точная оценка*

$$c_n^2(c_n^2 + 8c_{n-1}^2) \leq 2^{4n-8}(\overline{H}(P) - \overline{L}(P))^4,$$

где $\overline{L}(P) = \min\{P(z) : z \in [-1, 1]\}$, $\overline{H}(P) = \max\{P(z) : z \in [-1, 1]\}$. *Равенство достигается для полинома Чебышева первого рода.*

Доказательство вытекает из леммы 2.3 работы [14] и оценки (9).

Отметим,что из теоремы (6) следует известная оценка

$$|c_n| \leq (\overline{H}(P) - \overline{L}(P))2^{n-2},$$

эквивалентная классическому свойству полинома Чебышева $T_n(z) = z^n + \dots$ наименее отклоняться от нуля на отрезке $[-1, 1]$ среди полиномов вида $P(z) = z^n + \dots$ [19]. Таким образом, нашу оценку можно рассматривать как уточнение этого свойства с участием следующего коэффициента полинома $P(z)$.

§4. Экстремальные разбиения

Задачи об экстремальном разбиении занимают существенную часть геометрической теории функций комплексного переменного [1, 3]. Заменяя в этих задачах известные приведенные модули на обобщенные [5], приходим к новым постановкам. В частности, утверждения 3, 4, с учетом асимптотических формул (1), (2), единым образом дают ряд оценок такого типа (по-существу, часть этих оценок реализована в работах [2, 5, 13]). Указанные результаты можно получить также методом Нехари [11], поскольку данный метод и наш подход опираются на принцип Дирихле. Вместе с тем, представляет интерес емкостная интерпретация результатов и привлечение в дальнейшем симметризационных преобразований конденсаторов [1]. Рассмотрим в качестве простого примера n неналегающих односвязных областей на комплексной сфере, в каждой из которых помещен один фиксированный диполь. Следуя §§2-3, мы предпочитаем запись результатов через отображающие функции. В этом случае, как и ожидалось, вновь появится шварциан.

Теорема 7. *Пусть функции $w = f_k(z)$, $k = 1, \dots, n$, мероморфно и однолистно отображают круг U на попарно неналегающие области, причем $f_k(0) \neq \infty$, $k = 1, \dots, n$. Тогда для любых вещественных чисел θ_k, $k = 1, \dots, n$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ -\frac{1}{|f_k'(0)|^2} - \operatorname{Re}\left[e^{i2\theta_k} \frac{S_{f_k}(0)}{6(f_k'(0))^2} \right] \right\} \leq \operatorname{Re} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{n} \frac{e^{i(\theta_k+\theta_l)}}{(f_k(0) - f_l(0))^2}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\rho > 0$ настолько мало, что точки $w_{k1} = w_k + \rho e^{i\theta_k}$ и $w_{k2} = w_k - \rho e^{i\theta_k}$ ($w_k = f_k(0)$) принадлежат соответственно областям $f_k(U)$, $k = 1, \dots, n$. При достаточно малом $r > 0$ рассмотрим конденсаторы вида

$$C_k(r) = (f_k(U), \{E(w_{k1}, r), E(w_{k2}, r)\}, \{1, -1\}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Учитывая конформную инвариантность емкости и далее либо формулу (7) работы [6], либо принцип симметрии [5, с. 157] и формулу (1), получаем

$$\operatorname{cap} C_k(r) = \operatorname{cap}(U, \{E(f^{-1}(w_{k1}), |r/f'(f^{-1}(w_{k1}))|), E(f^{-1}(w_{k2}),$$

$$|r/f'(f^{-1}(w_{k2}))|)\}, \{1,-1\}) = 4\pi\frac{-1}{\log r} + 2\pi\left\{-2\log(2\rho) - \frac{4}{|f_k'(0)|^2}\rho^2 -\right.$$

$$\left.-4\rho^2 \operatorname{Re}\left[e^{i2\theta_k}\frac{S_{f_k}(0)}{6(f_k'(0))^2}\right] + o(\rho^2)\right\}\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0.$$

Введем также конденсатор

$$C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_w, \{E(w_{11}, r), \dots, E(w_{n1}, r), E(w_{12}, r), \dots, E(w_{n2}, r)\},$$

$$\{1, \dots, 1, -1, \dots, -1\}),$$

асимптотика емкости которого находится по формуле (1):

$$\operatorname{cap} C(r) = 4\pi n\frac{-1}{\log r} + 2\pi\left\{-2n\log(2\rho) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} \log\left|\frac{(w_{k1}-w_{l1})(w_{k2}-w_{l2})}{(w_{k1}-w_{l2})(w_{k2}-w_{l1})}\right|\right\}\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) =$$

$$= 4\pi n\frac{-1}{\log r} + 2\pi\left\{-2n\log(2\rho) + 4\rho^2 \operatorname{Re}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n}\frac{e^{i(\theta_k+\theta_l)}}{(w_k-w_l)^2} + o(\rho^2)\right\} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0.$$

Утверждение 3 дает

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(r) \le \operatorname{cap} C(r).$$

Подставляя сюда выписанные выше значения емкостей конденсаторов и переходя к пределам последовательно при $r \to 0$ и $\rho \to 0$, приходим к неравенству (12). Теорема доказана.

Полагая в (12) $\theta_k = \theta$, $k = 1, \dots, n$, где θ – произвольное вещественное число, получаем следующее неравенство:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{f_k}(0)}{6(f_k'(0))^2} + \sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \frac{1}{(f_k(0)-f_l(0))^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f_k'(0)|^2}.$$

Любопытно, что это же неравенство (а не противоположное) получается, если в доказательстве теоремы 7 утверждение 3 заменить на утверждение 4 (разумеется, конденсаторы $C_k(r)$ также необходимо изменить, добавляя к каждому из них пластину соответственно $\partial f_k(U)$ с нулевым значением потенциала). Другие неравенства с участием шварциана и полученные методом Нехари приводятся в работах [10, 20]. Привлекая дополнительно диссимметризацию [1], можно решить задачу об экстремальном разбиении комплексной сферы со "свободными диполями" на заданной окружности.

Теорема 8. *Для любых мероморфных и однолистных в круге U функций $w = f_k(z)$, отображающих этот круг на попарно неналегающие области таким образом, что $|f_k(0)| = 1$, $k = 1, \dots, n$, справедливо точное неравенство*

$$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \frac{f_k^2(0) S_{f_k}(0)}{(f_k'(0))^2} \geq -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f_k'(0)|^2} + \frac{n(n^2-1)}{12}. \qquad (13)$$

Равенство в (13) достигается для функций $f_k^*(z) = \exp(2\pi i(k-1)/n)[(1+z)/(1-z)]^{2/n}$, где под корнем понимается ветвь, сохраняющая единицу, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. В обозначениях доказательства предыдущей теоремы положим $e^{i\theta_k} = f_k(0) = w_k$, $k = 1, \dots, n$, и рассмотрим, дополнительно, конденсатор

$$C^*(r) = (\overline{\mathbb{C}}_w, \{E(w_{11}^*, r), \dots, E(w_{n1}^*, r), E(w_{12}^*, r), \dots, E(w_{n2}^*, r)\},$$
$$\{1, \dots, 1, -1, \dots, -1\}),$$

симметричный относительно лучей с началом в точке $w = 0$ и проходящих через точки $w_k^* = \exp(2\pi i(k-1)/n)$ и точки $\exp(2\pi i(k-1)/n + \pi i/n)$, $k = 1, \dots, n$ (здесь $w_{k1}^* = w_k^* + \rho w_k^*$ и $w_{k2}^* = w_k^* - \rho w_k^*$, $k = 1, \dots, n$). Из свойств диссимметризации [1] следует

$$\operatorname{cap} C(r) \leq \operatorname{cap} C^*(r).$$

Используя асимптотические формулы для емкостей этих конденсаторов, заключаем

$$\operatorname{Re} \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} \frac{w_k w_l}{(w_k - w_l)^2} \leq \operatorname{Re} \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} \frac{w_k^* w_l^*}{(w_k^* - w_l^*)^2}. \tag{14}$$

Осталось воспользоваться неравенством (12) и вычислить правую часть в (14). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

В условиях теоремы 8 справедливо также неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f_k'(0)|^2} - \frac{n(n^2+2)}{24} \geq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \frac{f_k^2(0) S_{f_k}(0)}{(f_k'(0))^2},$$

причем знак равенства достигается теми же функциями $f_k^*(z)$, $k = 1, \dots, n$ [21, с. 72]. В заключение отметим элементарное неравенство (14), в котором знак вещественной части можно опустить. Действительно,

$$\frac{w_k w_l}{(w_k - w_l)^2} = \frac{w_k w_l}{(w_k - w_l)(1/\overline{w_k} - 1/\overline{w_l})} = -\frac{1}{|w_k - w_l|^2},$$

и неравенство (14) дает

$$\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} \frac{1}{|w_k - w_l|^2} \geq \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} \frac{1}{|w_k^* - w_l^*|^2} = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

для любых точек w_k, $k = 1, \dots, n$, на единичной окружности $|w| = 1$.

Первый автор этой статьи выражает благодарность факультету математики Израильского технологического института (г.Хайфа) и лично профессору Д. Ахаронову за организацию его визита в Израиль и гостеприимство, что существенно улучшило работу над данной публикацией.

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
2. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов в геометрической теории функций.* Изд-во Дальневост. ун-та, Владивосток (2003).
3. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* II, Алгебра и анализ **9**, вып. 5 (1997), 1–50.

4. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы*, Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1999), 3–86.
5. В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, *Обобщенный приведенный модуль*, Дальневост. мат. ж. **3**, No. 2 (2002), 150–164.
6. В. Н. Дубинин, *Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 38–51.
7. O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1987).
8. E. Schippers, *Distortion theorems for higher-order Schwarzian derivatives of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**, No. 11 (2000), 3241–3249.
9. D. Mejia, Ch. Pommerenke, *Sobre la derivada Schwarziana de aplicaciones conformes hiperbólicamente*, Revista Colombiana de Matemáticas **35**, No. 2 (2001), 51–60.
10. E. Schippers, *Conformal invariants and higher-order Schwarz lemmas*, J. Anal. Math. **90** (2003), 217–241.
11. Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **75**, No. 2 (1953), 256–286.
12. В. Н. Дубинин, *Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций*, Докл. РАН **363**, No. 6 (1998), 731–734.
13. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, *Приведенный модуль комплексной сферы*, Зап. научн. семин. ПОМИ. **254** (1998), 76–94.
14. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов*, Алгебра и анализ **13**, вып. 5 (2001), 16–43.
15. Ch. Pommerenke, A. Vasil'ev, *Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk*, Pacific J. Math. **206**, No. 2 (2002), 425–450.
16. Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*. Springer, Berlin (1992).
17. L. V. Ahlfors, *Conformal invariants. Topics in geometric function theory*. McGraw-Hill, New York (1973).
18. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов*. II, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 18–37.
19. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Grad. Texts in Math. **161**, Springer-Verlag, New York (1995).
20. Ю. Е. Аленицын, *Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **94** (1968), 4–18.
21. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения*, Зап.научн.семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 19 августа 2004 г.