Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Е. Г. Емельянов

О ПРИВЕДЕННОМ МОДУЛЕ ПОЛУПОЛОСЫ

1. Введение. В последнее время понятия приведенного модуля двуугольника и треугольника нашли применение при решении ряда задач геометрической теории функций (определения этих понятий см., например, в [1]). В данной работе мы будем для удобства рассматривать в качестве треугольника полуполосу с одной из вершин в ∞. Определение приведенного модуля треугольника, данное в [1], легко переносится на этот случай. Существование приведенного модуля треугольника в его вершине z тесно связано с выполнением других известных условий. Доказана теорема (см. [1]), что для конформности треугольника в вершине z (см. определение в [2]) необходимо и достаточно выполнение двух условий, одним из которых является существование приведенного модуля этого треугольника в точке z. В настоящей работе мы продолжаем исследование свойств приведенного модуля треугольника в поисках простых необходимых условий его существования.

Пусть $H(x)$ – достаточно гладкая фнукция, определенная для $0 \leqslant x < +\infty$, $H(x) > 0$. Для $0 \leqslant a$ будем рассматривать полуполосу

$$\widetilde{\Pi}(a, \infty) = \{z = x + iy : a < x < \infty, 0 < y < H(x)\},$$
$$\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}(0, \infty).$$

Обозначаем также

$$\widetilde{\Pi}(a, b) = \{z \in \widetilde{\Pi} : a < x < b\}, \quad I_c = \{z \in \widetilde{\Pi} : x = c\}.$$

Пусть $M(a, b) = M(\widetilde{\Pi}(a, b))$ – модуль семейства кривых в четырехугольнике $\widetilde{\Pi}(a, b)$, соединяющих стороны $y = 0$ и $y = H(x)$. Полуполосу $\widetilde{\Pi}(a, \infty)$ мы будем рассматривать как треугольник с вершинами $z_1 = a$, $z_2 = \infty$, $z_3 = a + iH(a)$.

Будем говорить, что существует приведенный модуль полуполосы $\widetilde{\Pi}$, если найдется такое $h > 0$, что предел

$$M^+ = M^+(\widetilde{\Pi}) = \lim_{x\to\infty}\left(M(0,x) - \frac{x}{h}\right)$$

существует и конечен. Это совпадает с определением приведенного модуля треугольника, данным в [1]. Как показано в [1], если существует предел $M^+(\widetilde{\Pi})$, то существует и приведенный модуль $M^+(a) = M^+(\widetilde{\Pi}(a,\infty))$,

$$M^+(a) = \lim_{x\to\infty}\left(M(a,x) - \frac{x-a}{h}\right),$$

т.е. существование приведенного модуля полуполосы $\widetilde{\Pi}$ зависит от поведения границы этой полуполосы вблизи ∞, в нашем случае – от асимптотики функции $H(x)$ при $x \to \infty$. Главная цель этой работы – доказать, что если предел M^+ существует, то функция $M^+(a)$ дифференцируема, и получить выражение для производной $M^+(a)'$.

2. Оценки модуля прямоугольника. Пусть

$$\Pi_h = \{\zeta = t + is : 0 < t < +\infty, 0 < s < h\},$$

$$\Pi_h(t_1,t_2) = \{\zeta \in \Pi_h : t_1 < t < t_2\}, m(t_1,t_2) = \frac{t_2-t_1}{h}$$

Пусть $f : \Pi_h \to \widetilde{\Pi}$ – конформное отображение, $f(0) = 0$ $f(\infty) = \infty$, $f(ih) = iH(0)$,

$$\gamma_b = f^{-1}(I_b), \quad 0 < b < \infty.$$

Пусть F – квавзиконформное отображение прямоугольника $\Pi_h(0,p)$ на $\widetilde{\Pi}(a,b)$, переводящее стороны $s = 0$ и $s = h$ в стороны $y = 0$ и $y = H(x)$ соответственно и $\Gamma_{a,b}$ – семейство F-образов вертикальных отрезков в $\Pi_h(0,p)$, соединяющих верхнюю и нижнюю границы. Тогда $M(a,b) \geqslant M(\Gamma_{a,b})$. Как показано в [3],

$$M(a,b) \geqslant M(\Gamma_{a,b}) \geqslant \int\limits_0^p \frac{dt}{\int_0^h \frac{|F_s'|^2}{J_F}ds}, \tag{1}$$

где J_F – якобиан отображения F, причем если $\Gamma_{g,b}$ совпадает с экстремальным семейством в проблеме модуля $M(a,b)$, то в (1) достигается равенство.

Аналогично, если $\Gamma'_{a,b}$ – семейство F-образов горизонтальных отрезков в прямоугольнике $\Pi_h(0,p)$, соединяющих его боковые стороны, то

$$\frac{1}{M(a,b)} \geqslant M(\Gamma'_{a,b}) \geqslant \int\limits_0^h \frac{ds}{\int_0^p \frac{|F'_t|^2\,dt}{J_f}}. \tag{1'}$$

Положим для $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant s \leqslant h$

$$F(t+is) = t + is\frac{H(t)}{h}.$$

Тогда из (1) и (1′) для модуля $M(a,b)$ получаем оценки

$$A_1 \leqslant M(a,b) \leqslant A_1 \frac{\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}}{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}} \leqslant A_1 + \frac{1}{3}B_1, \tag{2}$$

где

$$A_1 = \int\limits_a^b \frac{dt}{H(t)}, \quad B_1 = \int\limits_a^b \frac{{H'}^2(t)}{H(t)}dt.$$

Пусть $\zeta = t_b(s) + is$ для $\zeta \in \gamma_b$, $0 < s < h$. Положим для $\zeta = t + is \in \Pi_h(0,b)$

$$\psi(\zeta) = t \cdot \frac{t_b(s)}{b} + is, \quad F(\zeta) = f \circ \psi(\zeta). \tag{3}$$

Тогда оценки (1) и (1′) дают

$$\frac{1}{A_2} - \frac{1}{3}\frac{B_2}{A_2^2} \leqslant \frac{1}{A_2}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B_2}{A_2}}}{\sqrt{\frac{B_2}{A_2}}} \leqslant M(0,b) \leqslant \frac{1}{A_2}, \tag{4}$$

где

$$A_2 = \int\limits_0^h \frac{ds}{t_b(s)}, \quad B_2 = \int\limits_0^h \frac{{t'_b}^2(s)}{t_b(s)}ds.$$

3. Дифференцирование $M(0,b)$**.** Пусть $0 < b$, $H(b) = H$, $H'(b) = k$, $\Delta > 0$ достаточно мало и $\lambda = H(1+|k|)\Delta > 0$. Пусть $f_{0,b}$ отображает конформно прямоугольник $\Pi_h(0,p)$ на $\widetilde{\Pi}(0,b)$, $f_{0,b}(0) = 0$,

$f_{0,b}(p) = b$, $f_{0,b}(p+ih) = b+iH$, $f_{0,b}(ih) = iH(0)$. (Тогда $p = h \cdot M(0,b)$). В силу симметрии, имеем

$$f'_{0,b}(p+is) > 0, \quad \operatorname{Re} f''_{0,b}(p+is) = 0. \tag{5}$$

Пусть $\gamma_{-\Delta} = f^{-1}_{0,b}(I_{b-\Delta})$, $\gamma_{\Delta} = \{\zeta \in \Pi_h : 2p - \bar{\zeta} \in \Gamma_{-\Delta}\}$. Для $\zeta \in \gamma_{-\Delta}$ полагаем $\zeta = t_{b-\Delta}(s) + is$, $0 < s < h$. Тогда для $\zeta \in \gamma_{\Delta}$ имеем $\zeta = t_{b+\Delta}(s) + is$, $t_{b+\Delta}(s) = 2p - t_{b-\Delta}$.

Обозначим

$$\begin{aligned}
&\Pi_h(0,\gamma_\Delta) = \{\zeta \in \Pi_h : 0 < t < t_{b+\Delta}(s)\},\\
&\widetilde{\Pi}^*(b, b+\Delta) = \{z : 2b - \bar{z} \in \widetilde{\Pi}(b-\Delta, b)\},\\
&\Omega = \{z = x+iy : z \in \widetilde{\Pi}^*(b, b+\Delta), \lambda < y < H(x)\}.
\end{aligned}$$

Отображение $f_{0,b}$ переводит четырехугольник $\Pi_h(0,\gamma_\Delta)$ в $\widetilde{\Pi}(0,b) \cup I_b \cup \widetilde{\Pi}^*(b,b+\Delta) = \widetilde{\Pi}_\Delta$. Для $\zeta = t+is \in \Pi_h(0, p+\Delta)$ положим

$$\Psi(\zeta) = t \cdot \frac{t_{b+\Delta}(s)}{p+\Delta} + is.$$

Для $z = x+iy \in \widetilde{\Pi}_\Delta$ положим

$$\varphi(z) = \begin{cases} z, & \text{если} \quad z \notin \Omega,\\ x + i(y-\lambda) \cdot \frac{H(2b-x)-\lambda}{H(x)-\lambda}, & \text{если} \quad z \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда φ квавзиконформно отображает четырехугольник $\widetilde{\Pi}_\Delta$ на $\widetilde{\Pi}(b, b+\Delta)$ и функция

$$F(\zeta) = \varphi \cdot f_{0,b} \circ \psi(\zeta)$$

квазиконформно отображает $\Pi_h(0, p+\Delta)$ на $\widetilde{\Pi}(0, b+\Delta)$. Пусть $\omega = F^{-1}(\Omega)$. Поскольку площадь Ω не превосходит $C \cdot \Delta^2$, где константа C зависит только от k, и дилатация F также не зависит от Δ, то площадь ω не превосходит $C_1 \cdot \Delta^2$. Для $\zeta \notin \omega$ имеем $F(\zeta) = f_{0,b}\psi(\zeta)$. Пусть $\tilde{\rho}_{\Gamma_{0,b(\bar{\Delta})}}(z)|dz|$ – метрика, экстремальная в проблеме модуля для семейства $\Gamma_{0,b}$. Тогда

$$M(0,b) \geqslant M(\Gamma_{a,b}) = \iint\limits_{\widetilde{\Pi}(0,b+\Delta)} \tilde{\rho}^2(z)d\sigma_z = \iint\limits_{\widetilde{\Pi}(0,b+\Delta)\setminus\Omega} \tilde{\rho}(z)d\sigma_z + O(\Delta^2),$$

$$\iint\limits_{\widetilde{\Pi}(0,b)\setminus\Omega} \tilde{\rho}^2(z)d\sigma_z = \iint\limits_{\Pi_h(0,p+\Delta)\setminus\omega} \tilde{\rho}^2 \circ F \cdot J_F(\zeta)d\sigma_\zeta$$

$$= \iint\limits_{\Pi_h(0,p+\Delta)} \tilde{\rho}^2 \circ F \cdot J_p(\zeta)d\sigma_\zeta + O(\Delta^2),$$

где для $\zeta \in \omega$ полагаем $F(\zeta) = f_{0,b} \circ \psi(\zeta)$. Таким образом,

$$M(a,b) \geqslant \iint\limits_{\Pi_h(0,p+\Delta)} \tilde{\rho}^2 \circ F \cdot J_F(2)d\sigma_3 + O(\Delta^2),$$

откуда, следуя [3], получаем оценки (4) с точностью до слагаемого $O(\Delta^2)$.

При помощи полученных оценок мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Во введенных выше обозначениях имеет место равенство*

$$(M(a,b))'_b = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \frac{ds}{f'_{a,b}(\zeta(s))}, \tag{6}$$

где $f_{a,b}$ *– конформное отображение прямоугольника* $\Pi(0,p)$ *на* $\widetilde{\Pi}(a,b)$, $f_{a,b}(0) = a$, $f_{a,b}(p) = b$, $f_{a,b}(p+ih) = b+iH(b)$, $f_{a,b}(ih) = a+iH(a)$, $\zeta(s) = p+is$.

Доказательство. Можем считать, что $a = 0$. Имеем

$$f_{0,b}(t_{b+\Delta}(s)+is) = b+\Delta+iy(s), \quad 0 < s < h, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} f_{0,b}(t_{b+\Delta}(s)+is) &= f_{0,b}(p+is) + f'_{0,b}(p+is) \\ &\times (t_{b+\Delta}(s)-p) + \alpha(p,\Delta,s) + i\beta(p,\Delta,s), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\frac{\alpha(p,\Delta,s)+i\beta(p,\Delta,s)}{t_{b+\Delta}(s)-p} \underset{\Delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Из (7) и (8) следует

$$\Delta = f'_{0,b}(p+is)\cdot(t_{p+\Delta}(s)-p)+\alpha(p,\Delta,s). \qquad (9)$$

Из (9) видно, что при фиксированном s $t_{p+\Delta}(s)-p=O(\Delta)$.

Дифференцируя (7) по s, получаем

$$f'_{0,b}(t_{b+\Delta}(s)+is)\cdot(t'_{b+\Delta}(s)+i)=iy'(s).$$

При этом

$$f'_{0,b}(t_{b+\Delta}(s)+is)=f'_{0,b}(\zeta(s))+f''_{0,b}(\zeta(s))$$
$$\times(t_{b+\Delta}(s)-p)+\alpha_1(p,\Delta,s)+i\beta_1(p_1,\Delta,s), \qquad (10)$$

где

$$(\alpha_1(p,\Delta,s)+i\beta_1(p,\Delta,s))/(t_{b+\Delta}(s)-p)\underset{\Delta\to0}{\to}0.$$

Отсюда с учетом (5) получаем

$$(f'_{0b}(\zeta(s)-\alpha_1(p,\Delta,s))\cdot t'_{b+\Delta}(s)=if''_{0,b}(\zeta/s))\cdot(t_{b+\Delta}(s)-p)-\beta_1(p,\Delta,s).$$

Из (10) следует, что при фиксированном s $t'_{b+\Delta}(s)=O(\Delta)$. Значит,

$$B_2=\int_0^h \frac{t_b'^2(s)}{t_b(s)}ds=O(\Delta^2).$$

Таким образом, из (4) следует равенство $M(0,b+\Delta)=\frac{1}{A_2}+O(\Delta^2)$. Имеем

$$\frac{1}{A_2}=\frac{p}{\int_0^h[1+\frac{1}{p}(t_{b+\Delta}(s)-p)]^{-1}ds}=\frac{p}{h(1-\frac{1}{ph}\int_0^h(t_{b+\Delta}(s)-p)ds+0(\Delta^2))}$$

$$=\frac{p}{h}+\frac{\Delta}{h^2}\int_0^h\frac{ds}{f'_{0,b}(\zeta(s))}+O(\Delta^2),$$

что и требовалось.

Следствие 1. *В условиях теоремы имеем*

$$M(a,b)'_a=-\frac{1}{h^2}\int_0^h\frac{ds}{f'_{a,b}(is)}.$$

Следствие 2. *Пусть существует приведенный модуль* $M^+ = M^+(\widetilde{\Pi})$, $M^+(b) = M^+(\widetilde{\Pi}(b,\infty))$. *Тогда*

$$M^+(b)' = \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \frac{ds}{f'_{b,\infty}(is)},$$

где $f_{b,\infty}$ *конформно отображает полуполосу* Π_h *на полуполосу* $\widetilde{\Pi}(b,\infty)$, $f_{b,\infty}(0) = a$, $f_{b,\infty}(\infty) = \infty$, $f_{b,\infty}(ih) = b + iH(b)$.

Следствие 3. *Имеем равенство*

$$M(0,x) - \frac{1}{x} = \int\limits_0^x \left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \left(\sqrt{f'_{0,b}(\zeta_b)} - \frac{1}{\sqrt{f'_{0,b}(\zeta)}}\right)^2 ds + h - H(b)\right) db,$$

где $f_{0,b}(\zeta_b(s) = b + iy$, $J(\zeta_b(s)) = s$.

В частности, если $H(b) \leqslant b$, то для существования приведенного модуля M^+ необходимо, чтобы сходился интеграл $\int\limits_0^\infty (h - H(b))db$.

Литература

1. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1999), 1–86.
2. Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps*, Springer-Verlag, 1991.
3. R. Kühnau, *Randeffekte beim elektrostatischen Kondensator.* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 132–144.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 11 ноября 2004 г.