Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

А. С. Жук, В. В. Жук

НЕКОТОРЫЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

**Светлой памяти
Нэли Самсоновны Жук посвящаем**

Ряд важных для теории аппроксимации величин связан между собой посредством ортогональных преобразований. Выявление этих ортогональностей даёт возможность получать полезные нестандартные соотношения и, в частности, позволяет воспользоваться известными теоремами о коэффициентах Фурье (см., например, [1, гл. XII]). Такой подход был реализован в книге [2] (в связи с рассмотрением вопросов сильной аппроксимации периодических функций). В настоящей работе мы продолжаем исследования в этом направлении.

§1 работы посвящен изучению функций вида

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(u)\, e^{izu}\, du. \tag{1}$$

Важность этого класса функций определяется, в частности, тем, что, как показали Н. Винер и Р. Пэли [3], совокупность целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которых $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(u)\, e^{izu}\, du,$$

где $\varphi \in L_2([-\sigma, \sigma])$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 02-01-01112) и программы “Университеты России” (грант No. 04.01.036).

В целях простоты формулировок мы рассматриваем случай функций вида $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\, e^{izu} du$. Ясно, что более общий случай интегралов вида (1) легко сводится к рассматриваемому.

В §2 устанавливается ряд нестандартных соотношений для наилучших приближений периодических функций в пространстве L_2.

В §3 устанавливаются интерполяционные формулы для тригонометрических полиномов (в одномерном и многомерном случаях) с коэффициентами из произвольного векторного пространства. Приведен пример приложений полученных результатов, имеющий нестандартный характер. Ранее аналогичные результаты для тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами были получены в [2].

§1. Интерполяционные формулы для функций вида $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \alpha(t)\, e^{ixt} dt$

1. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества комплексных, вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел, $Q = [-\pi, \pi]$. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Запись $k = \overline{a, b}$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \leqslant b$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. По определению $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k = d_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(d_k + d_{-k})$. Пусть E – промежуток в $\mathbb{R}$. При $1 \leqslant p < \infty$ через $L_p(E)$ обозначаем пространство измеримых функций $f : E \to \mathbb{C}$, у которых $\|f\|_{p,E} = (\int\limits_E |f|^p)^{1/p} < \infty$; через $L_\infty(E)$ обозначаем пространство измеримых функций $f : E \to \mathbb{C}$, у которых $\|f\|_{\infty,E} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in E} |f(x)| < \infty$. Если $E = Q$, то вместо $L_p(Q)$ и $\|f\|_{p,Q}$ пишем просто L_p и $\|f\|_p$ соответственно. Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_Q f(t)\, e^{-ikt} dt, \quad s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikx},$$

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) c_k(f)\, e^{ikx},$$

$$\tau_n(f,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}s_k(f,x)$$

суть соответственно коэффициенты Фурье, суммы Фурье, Фейера, Валле Пуссена функции f.

Через H_n при $n\in\mathbb{Z}_+$ обозначаем множество тригонометрических полиномов порядка не выше n с комплексными коэффициентами: $H_n=\{\sum_{k=-n}^{n}c_k\,e^{ikt}\}$, где $c_k\in\mathbb{C}$. Если $f\in L_p$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то $E_n(f)_p=\inf\limits_{T\in H_n}\|f-T\|_p$ – наилучшее приближение порядка n функции f в пространстве L_p. Полагаем

$$K(p)=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+,f\in L_p}\frac{\|f-s_n(f)\|_p}{E_n(f)_p}. \tag{1}$$

Известно (см., например, [4, с. 593–595]), что $K(p)<\infty$ при $1<p<\infty$, в частности, $K(2)=1$. Через $V(Q)$ обозначаем множество функций $f:Q\to\mathbb{C}$, имеющих на Q ограниченную вариацию: $\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(f)<\infty$.

2. Нам понадобятся следующие известные факты.

Теорема A (Ф. Рисс,см., например, [4, с. 211]). *Пусть* $1<p\leqslant 2$, $q=p/(p-1)$, *функции* φ_k $(k=\overline{1,\infty})$ *образуют ортонормированную на отрезке* $[a,b]$ *систему,* $|\varphi_k(t)|\leqslant M$ *при всех* $t\in[a,b]$, $k=\overline{1,\infty}$. *Тогда:* 1) *если* $f\in L_p([a,b])$, *то коэффициенты Фурье*

$$c_k=\int_a^b f(t)\overline{\varphi}_k(t)dt \tag{2}$$

удовлетворяют неравенству

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\right)^{1/q}\leqslant M^{\frac{2}{p}-1}\|f\|_{p,[a,b]}; \tag{3}$$

2) *если для последовательности чисел* c_k *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^p$ *сходится, то существует функция* $f\in L_q([a,b])$, *удовлетворяющая равенствам* (2) *для всех* k *и такая, что*

$$\|f\|_{q,[a,b]}\leqslant M^{\frac{2}{p}-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^p\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Теорема B (равенство Парсеваля, см., например, [4, с. 75]). *Пусть функции* φ_k $(k=\overline{1,\infty})$ *образуют ортонормированную полную в* $L_2([a,b])$ *систему,* $c_k=\int\limits_a^b f(t)\overline{\varphi}_k(t)dt$. *Тогда для любой* $f\in L_2([a,b])$ *справедливо равенство*

$$\|f\|_{2,[a,b]}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\right)^{1/2}.$$

Теорема C (неравенство Гельдера). *Пусть* $1<p<\infty$, $q=p/(p-1)$, $f\in L_p(E)$, $g\in L_q(E)$. *Тогда* $fg\in L_1(E)$ *и*

$$\left|\int\limits_E fg\right|\leqslant\left(\int\limits_E|f|^p\right)^{1/p}\left(\int\limits_E|g|^q\right)^{1/q}.$$

Теорема D (см., например, [2, с. 53, 117]). *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $f\in L_p$. *Тогда*

$$\|\sigma_k(f)\|_p\leqslant\|f\|_p, \tag{5}$$

$$\|f-\tau_n(f)\|_p\leqslant\frac{5}{2}E_n(f)_p. \tag{6}$$

Теорема E (см., например, [5, с. 62, 121]). *Системы функций*

$$(1/\pi)^{1/2},\ (2/\pi)^{1/2}\cos t,\dots,(2/\pi)^{1/2}\cos lt,\dots,$$
$$\left\{(2/\pi)^{1/2}\sin lt\right\}_{l=1}^{\infty},$$
$$\left\{(2/\pi)^{1/2}\cos(l+1/2)t\right\}_{l=0}^{\infty},$$
$$\left\{(2/\pi)^{1/2}\sin(l+1/2)t\right\}_{l=0}^{\infty}$$

ортонормированы и полны в $L_2([0,\pi])$.

Теорема F. *Если* $f\in V(Q)$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *то*

$$|c_k(f)|\leqslant\frac{1}{2\pi|k|}\Big(|f(\pi)-f(-\pi)|+\bigvee_{-\pi}^{\pi}(f)\Big).$$

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_Q f(t)\, e^{-ikt} dt = \int\limits_Q f(t) d\frac{e^{-ikt}}{-ik} =$$

$$= -\frac{1}{ik}\Big\{f(\pi)(-1)^k - f(-\pi)(-1)^k - \int\limits_Q e^{-ikt} df(t)\Big\}.$$

Отсюда следует, что

$$\Big|\int\limits_Q f(t)\, e^{-ikt} dt\Big| \leqslant \frac{1}{|k|}\Big(|f(\pi) - f(-\pi)| + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(f)\Big).$$

Теорема G (Хаусдорф–Юнг, см., например, [1, с. 153])**.** *Пусть* $p \in (1, 2]$, $q = p/(p-1)$, $f \in L_q$. *Тогда*

$$\|f\|_q \leqslant (2\pi)^{1/q}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^p\Big)^{1/p}.$$

3. Установим ряд простых вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$A_n = \Big|\int\limits_Q f(t)g(t)dt - 2\pi\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)c_{-k}(g)\Big|.$$

Тогда: 1) *если* $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $f \in L_p$, $g \in L_q$, *то*

$$A_n \leqslant E_n(f)_p \|g - s_n(g)\|_q, \tag{7}$$

$$A_n \leqslant \min\{K(p), K(q)\} E_n(f)_p\, E_n(g)_q. \tag{8}$$

В частности при $p = 2$

$$A_n \leqslant E_n(f)_2\, E_n(g)_2;$$

2) *если* $f \in L_1$, $g \in L_\infty$, *то*

$$A_n \leqslant E_n(f)_1 \|g - s_n(g)\|_\infty. \tag{9}$$

Доказательство. Сначала докажем (7). Пусть полином $T \in H_n$ удовлетворяет равенству $\|f-T\|_p = E_n(f)_p$. Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$A_n = \left| \int\limits_Q f(t)\{g(t)-s_n(g,t)\}dt \right| = \left| \int\limits_Q \{f(t)-T(t)\}\{g(t)-s_n(g,t)\}dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f-T\|_p \, \|g-s_n(g)\|_q = E_n(f)_p \, \|g-s_n(g)\|_q.$$

Аналогично устанавливается, что

$$A_n \leqslant E_n(g)_q \|f-s_n(f)\|_p.$$

Соотношение (8) получается из приведенных выше, если воспользоваться (1). Неравенство (9) доказывается аналогично соотношению (7).

Лемма 2. *Пусть* $p \in (1,2]$, $q = p/(p-1)$, $g \in L_q$. *Тогда*

$$\|f-s_n(g)\|_q \leqslant \min\left\{K(q)\|g\|_q, (2\pi)^{1/q}\left\{\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k(g)|^p\right)^{1/p} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_{-k}(g)|^p\right)^{1/p}\right\}\right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\|g-s_n(g)\|_q \leqslant K(q)E_n(g)_q \leqslant K(q)\|g\|_q.$$

С другой стороны, в силу теоремы G

$$\|g-s_n(g)\|_q \leqslant (2\pi)^{1/q}\left\{\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k(g)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=-\infty}^{-n-1} |c_k(g)|^p\right)^{1/p}\right\}.$$

Осталось сопоставить приведенные неравенства.

Лемма 3. *Пусть* $g \in L_\infty$. *Тогда*

$$\|g-s_n(g)\|_\infty \leqslant 2\|g\|_\infty + \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n} |k|\,|c_k(g)|, \tag{10}$$

$$\|g-s_n(g)\|_\infty \leqslant (5/2)E_n(f)_\infty + \sum_{k=n+1}^{2n-1} (|c_k(g)| + |c_{-k}(g)|). \tag{11}$$

Доказательство. Опираясь на неравенство (5), имеем

$$\begin{aligned}\|g-s_n(g)\|_\infty &\leqslant \|g-\sigma_n(g)\|_\infty + \|\sigma_n(g)-s_n(g)\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant 2\|g\|_\infty + \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}|k|c_k(g)\,e^{ikt}\right\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant 2\|g\|_\infty + \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}|k|\,|c_k(g)|.\end{aligned}$$

Теперь докажем (11). Учитывая (6), находим

$$\begin{aligned}\|g-s_n(g)\|_\infty &\leqslant \|g-\tau_n(g)\|_\infty + \|\tau_n(g)-s_n(g)\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant (5/2)E_n(g)_\infty + \|\tau_n(g)-s_n(g)\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant (5/2)E_n(g)_\infty + \sum_{k=n+1}^{2n-1}(|c_k(g)|+|c_{-k}(g)|).\end{aligned}$$

4. Теорема 1. *Пусть* $x,\beta\in\mathbb{R}$, $q=p/(p-1)$, *если* $1<p<\infty$, $q=\infty$, *если* $p=1$, $\alpha\in L_p$, $\mu\in L_q$,

$$\begin{gathered} f(x)=\int\limits_Q \alpha(t)\,e^{ixt}dt,\quad g(x)=\int\limits_Q \mu(t)\,e^{ixt}dt, \\ F(x)=\int\limits_Q \alpha(t)\mu(t)\,e^{ixt}dt. \end{gathered}\tag{12}$$

Тогда: 1) *если* $1<p<\infty$, *то*

$$\begin{gathered}\left|F(x)-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}f(-k-\beta)g(x+\beta+k)\right| \leqslant \\ \leqslant E_n(\alpha(t)\,e^{-i\beta t})_p\left\|\mu(t)\,e^{i(x+\beta)t}-s_n\big(\mu(u)\,e^{i(x+\beta)u},t\big)\right\|_q;\end{gathered}\tag{13}$$

2) *если* $p=1$, *то*

$$\begin{gathered}\left|F(x)-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}f(-k-\beta)g(x+\beta+k)\right| \leqslant \\ \leqslant E_n(\alpha(t)\,e^{-i\beta t})_1\left\{2\|\mu\|_\infty+\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}|k|\left|c_k\Big(\mu(t)\,e^{i(x+\beta)t}\Big)\right|\right\}.\end{gathered}\tag{14}$$

Доказательство. Ясно, что

$$c_k\Big(\alpha(t)\,e^{-i\beta t}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_Q \alpha(t)\,e^{-i(k+\beta)t}dt = \frac{1}{2\pi}f(-k-\beta),$$

$$c_k\Big(\mu(t)\,e^{i(x+\beta)t}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_Q \mu(t)\,e^{i(x+\beta-k)t}dt = \frac{1}{2\pi}g(x+\beta-k).$$

Запишем функцию F в виде

$$F(x) = \int\limits_Q \alpha(t)\,e^{-i\beta t}\mu(t)\,e^{i(x+\beta)t}dt.$$

Теперь для доказательства (13) достаточно воспользоваться неравенством (7), а для доказательства (14) надо применить неравенства (9) и (10).

Следствие 1. *В условиях пункта* 1) *теоремы* 1

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k-\beta)g(x+\beta+k), \tag{15}$$

причем ряд в правой части (15) *сходится равномерно относительно* $x\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Опираясь на неравенство (13) и лемму 2, находим, что

$$\left|F(x) - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} f(-k-\beta)g(x+\beta+k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant E_n\big(\alpha(t)\,e^{-i\beta t}\big)_p K(q)\Big\|\mu(t)\,e^{i(x+\beta)t}\Big\|_q \leqslant K(q)\|\mu\|_q E_n\big(\alpha(t)\,e^{-i\beta t}\big)_p.$$

Осталось принять во внимание, что при фиксированном β функция $\alpha(t)\,e^{-i\beta t}\in L_p$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} E_n\Big(\alpha(t)\,e^{-i\beta t}\Big)_p = 0.$$

Следствие 2. Пусть $x,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\in L_1$, $\mu\in V(Q)$, функции f, g, F определены формулами (12). Тогда справедлива формула (15), причем ряд в правой части (15) сходится равномерно относительно x на любом конечном отрезке.

Доказательство. Учитывая, что для произведения двух функций u и v

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}(uv) \leqslant \Big(\sup_{t\in Q}|u(t)|\Big)\bigvee_{-\pi}^{\pi}(v) + \Big(\sup_{t\in Q}|v(t)|\Big)\bigvee_{-\pi}^{\pi}(u),$$

находим, что

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\Big(\mu(t)\,e^{i(x+\beta)t}\Big) \leqslant \bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mu) + |x+\beta|2\pi\sup_{t\in Q}|\mu(t)|.$$

Следовательно, по теореме F при $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\Big|c_k\big(\mu(t)\,e^{i(x+\beta)t}\big)\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi|k|}\Big\{\big(2+|x+\beta|2\pi\big)\sup_{t\in Q}|\mu(t)| + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mu)\Big\}.$$

В силу последнего неравенства выражение в фигурных скобках в правой части (14) не превосходит

$$2\|\mu\|_\infty + \frac{1}{\pi}\Big\{\big(2+|x+\beta|2\pi\big)\|\mu\|_\infty + \bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mu)\Big\},$$

т.е. ограничено при фиксированном β на любом конечном отрезке изменения x. При фиксированном β ввиду того, что $\alpha(t)\,e^{-i\beta t}\in L_1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} E_n\left(\alpha(t)\,e^{-i\beta t}\right)_1 = 0.$$

Осталось сопоставить установленные выше факты с неравенством (14).

Приведем некоторые приложения следствий 1 и 2 к конкретным функциям.

Следствие 3. Пусть $x,\beta\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p<\infty$, $\alpha\in L_p$,

$$F(x) = \int_Q \alpha(t)\,e^{ixt}\,dt.$$

Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(-k-\beta)\frac{\sin(x+\beta+k)\pi}{x+\beta+k}. \tag{16}$$

При $p > 1$ ряд в правой части равенства (16) сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$, при $p = 1$ упомянутый ряд сходится равномерно относительно x на любом конечном отрезке $\mathbb{R}$.

Для доказательства следствия 3 достаточно в следствиях 1 и 2 положить $\mu(t) \equiv 1$ и принять во внимание, что

$$\int\limits_Q e^{ixt}dt = 2\frac{\sin x\pi}{x}.$$

Формула (16) это так называемая теорема отсчетов. Ее связывают с именами многих математиков и специалистов в других областях науки (см., например, [6, с. 139–140]).

Следствие 4. Пусть $x, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \in L_p$,

$$F(x) = \int\limits_Q \alpha(t)\left(1 - \frac{|t|}{\pi}\right) e^{ixt}dt, \qquad f(x) = \int\limits_Q \alpha(t)\, e^{ixt}dt.$$

Тогда

$$F(x) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k-\beta)\frac{\sin^2\frac{(x+\beta+k)\pi}{2}}{(x+\beta+k)^2}. \tag{17}$$

При $p > 1$ ряд в правой части равенства (17) сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$, при $p = 1$ упомянутый ряд сходится равномерно относительно x на любом конечном отрезке $\mathbb{R}$.

Для доказательства следствия 4 достаточно в следствиях 1 и 2 положить $\mu(t) = 1 - \frac{|t|}{\pi}$ и принять во внимание, что

$$\int\limits_Q \left(1 - \frac{|t|}{\pi}\right) e^{ixt}dt = 2\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{t}{\pi}\right)\cos xt\,dt = \frac{4}{\pi}\frac{\sin^2(x\pi/2)}{x^2}.$$

Замечание 1. Любое соотношение вида

$$g(t) = \int\limits_0^\infty f(x)\cos xt\,dx,$$

где $g(t) = 0$ при $|t| > a > 0$, дает возможность построить формулу типа (17). Поэтому число формул вида (17) легко может быть увеличено, если воспользоваться таблицами косинус-преобразований Фурье (см. [7, 8]).

Следствие 5. *Пусть* $x, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \in L_p$,

$$F(x) = \int_Q \alpha(t)\; e^{ixt}\, dt, \quad \widetilde{F}(x) = -i \int_Q (\operatorname{sign} t) \alpha(t)\; e^{ixt}\, dt.$$

Тогда

$$\widetilde{F}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(-k-\beta) \frac{1 - \cos(x+\beta+k)\pi}{x+\beta+k}. \tag{18}$$

При $p > 1$ *ряд в правой части равенства* (18) *сходится равномерно относительно* $x \in \mathbb{R}$, *при* $p = 1$ *упомянутый ряд сходится равномерно относительно* x *на любом конечном отрезке* $\mathbb{R}$.

Для доказательства следствия 5 достаточно в следствиях 1 и 2 положим $\mu(t) = -i \operatorname{sign} t$ и принять во внимание равенство

$$-i \int_Q (\operatorname{sign} t)\, e^{ixt} dt = 2 \int_0^{\pi} \sin xt dt = 2 \frac{1 - \cos x\pi}{x}.$$

Замечание 2. Любое соотношение вида

$$g(t) = \int_0^{\infty} f(x) \sin xt dx,$$

где $g(t) = 0$ при $|t| > a > 0$, дает возможность построить формулу типа (18). Поэтому число формул вида (18) легко может быть увеличено, если воспользоваться таблицами синус-преобразований Фурье (см. [7, 8]).

5. Основные результаты.

Теорема 2. *Пусть* $a \in [0, \pi]$, $x, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in L_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$F(x) = \int_Q \alpha(t)\; e^{ixt}\, dt, \quad F_a(x) = \int_{-a}^{a} \alpha(t)\; e^{ixt}\, dt, \tag{19}$$

$$\widetilde{F}_a(x) = -i \int_{-a}^{a} (\operatorname{sign} t) \alpha(t)\; e^{ixt}\, dt. \tag{20}$$

Тогда: 1) *если* $1 < p \leqslant 2$, $q = p/(p-1)$, *то*

$$\left|F_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta} F(x+\beta+k)\right| \leqslant E_n\Big(\alpha(t)\ e^{i(x+\beta)t}\Big)_p \times$$

$$\times \min\left\{K(q)(2a)^{1/q}, (2\pi)^{1/q}\left(\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\beta+k)a}{\beta+k}\right|^p\right)^{1/p} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\beta-k)a}{\beta-k}\right|^p\right)^{1/p}\right)\right\}, \tag{21}$$

$$\left|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} \frac{\cos(\beta+k)a - 1}{\beta+k} F(x+\beta+k)\right| \leqslant E_n\Big(\alpha(t)\ e^{i(x+\beta)t}\Big)_p \times$$

$$\times \min\left\{K(q)(2a)^{1/q}, (2\pi)^{1/q}\left(\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\cos(\beta+k)a-1}{\pi(\beta+k)}\right|^p\right)^{1/p} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\cos(\beta-k)a-1}{\pi(\beta-k)}\right|^p\right)^{1/p}\right)\right\}; \tag{22}$$

2) *если* $p = 1$, *то*

$$\left|F_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta} F(x+\beta+k)\right| \leqslant E_n\Big(\alpha(t)\ e^{i(x+\beta)t}\Big)_1 \times$$

$$\times\left(2 + \frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=-n}^{n} |k|\left|\frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta}\right|\right), \tag{23}$$

$$\left|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} \frac{\cos(k+\beta)a - 1}{k+\beta} F(x+\beta+k)\right| \leqslant E_n\Big(\alpha(t)\ e^{i(x+\beta)t}\Big)_1 \times$$

$$\times\left(2 + \frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=-n}^{n} |k|\left|\frac{\cos(k+\beta)a-1}{k+\beta}\right|\right). \tag{24}$$

Доказательство. Сначала докажем соотношение (21). Положим

$$\mu(t) = \mu_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [-a, a], \\ 0 & \text{при} \quad t \in Q \setminus [-a, a], \end{cases}$$

$$g(x) = \int_Q \mu(t)\, e^{ixt}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{ixt}\, dt = 2\frac{\sin xa}{x}.$$

Применяя неравенство (13) (в котором вместо β берем $-x-\beta$), получаем

$$\left| F_a(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} F(x+\beta+k) 2\frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta} \right| \leqslant E_n\Big(\alpha(t)\, e^{i(x+\beta)t}\Big)_p \times$$
$$\times \Big\| \mu(t)\, e^{-i\beta t} - s_n(\mu(u)\, e^{-i\beta u}, t) \Big\|_q. \tag{25}$$

Легко видеть, что

$$c_k\left(\mu_a(t) e^{-i\beta t}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-i(\beta+k)t} dt = \frac{\sin(\beta+k)a}{\pi(\beta+k)}.$$

Значит, в силу леммы 2,

$$\left\| \mu(t) e^{-i\beta t} - s_n\left(\mu(u) e^{-i\beta u}, t\right) \right\|_q \leqslant \min\{K(q)(2a)^{1/q},$$
$$(2\pi)^{1/q} \Bigg(\Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi}\ \frac{\sin(\beta+k)a}{\beta+k} \right|^p \Bigg)^{1/p} +$$
$$+ \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi}\ \frac{\sin(\beta-k)a}{\beta-k} \right|^p \Bigg)^{1/p} \Bigg) \Bigg\}. \tag{26}$$

Сопоставляя (25) и (26), приходим к неравенству (21). Докажем (22). Положим

$$\mu(t) = \mu_a(t) = \begin{cases} -i \operatorname{sign} t & \text{при} \quad t \in [-a,a], \\ 0 & \text{при} \quad t \in Q \setminus [-a,a], \end{cases}$$

$$g(x) = \int_Q \mu(t)\, e^{ixt}\, dt = 2\int_0^a \sin xt\, dt = 2\frac{1-\cos xa}{x}.$$

Применяя неравенство (13) (в котором вместо β берем $-x-\beta$), получаем

$$\left| \widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} F(-k+x+\beta) g(-\beta+k) \right| =$$

$$= \left| \widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} F(k+x+\beta) g(-\beta-k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant E_n \Big(\alpha(t)\, e^{i(x+\beta)t} \Big)_p \Big\| \mu(t)\ e^{-i\beta t} - s_n(\mu(u)\ e^{-i\beta u}, t) \Big\|_q .$$

Легко видеть, что

$$c_k\big(\mu_a(t) e^{-i\beta t}\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} (-i \operatorname{sign} t)\, e^{-i(\beta+k)t} dt = \frac{\cos(\beta+k)a - 1}{\pi(\beta+k)}.$$

Значит, в силу леммы 2,

$$\big\| \mu(t) e^{-i\beta t} - s_n\big(\mu(u) e^{-i\beta u}, t\big) \big\|_q \leqslant \min\{K(q)(2a)^{1/q},$$

$$(2\pi)^{1/q} \Bigg(\bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi}\ \frac{\cos(\beta+k)a - 1}{\beta+k} \right|^p \bigg)^{1/p} +$$

$$+ \bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi}\ \frac{\cos(\beta-k)a - 1}{\beta-k} \right|^p \bigg)^{1/p} \Bigg) \Bigg\}.$$

Сопоставляя приведенные соотношения, приходим к (22).

Теперь докажем (23). Опираясь на неравенство (14) и рассуждая как и при доказательстве соотношения (21), имеем

$$\left| F_a(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta} F(x+\beta+k) \right| \leqslant E_n \Big(\alpha(t)\ e^{i(x+\beta)t} \Big)_1 \times$$

$$\times \bigg(2 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} \big| c_k(\mu_a(t) e^{-i\beta t}) \big| |k| \bigg).$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{k=-n}^{n} \big| c_k(\mu_a(t) e^{-i\beta t}) \big| |k| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-n}^{n} |k| \left| \frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta} \right|.$$

Доказательство неравенства (24) проводится также как (22), но здесь вместо соотношения (13) используется (14).

Следствие 6. *Пусть $x, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in [0,\pi]$, $\alpha \in L_p$, функции F, F_a, $\widetilde{F}_a$ определены соотношениями* (19) *и* (20).

Тогда: 1) *если $p > 1$, то*

$$\sup_{x\in\mathbb{R},a\in Q}\left|F_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta}F(x+\beta+k)\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0, \tag{27}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R},a\in Q}\left|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{\cos(k+\beta)a-1}{k+\beta}F(x+\beta+k)\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0; \tag{28}$$

2) *если $p = 1$, то*

$$\sup_{a\in Q}\left|F_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta}F(x+\beta+k)\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0, \tag{29}$$

$$\sup_{a\in Q}\left|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{\cos(k+\beta)a-1}{k+\beta}F(x+\beta+k)\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0. \tag{30}$$

Доказательство. Установим (27). Можно считать, что $p \leqslant 2$. В силу (21),

$$\sup_{x\in\mathbb{R},a\in Q}\left|F_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta}F(x+\beta+k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\alpha\|_p(2\pi)^{1/q}\sup_{a\in Q}\left(\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\beta+k)a}{\beta+k}\right|^p\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\beta-k)a}{\beta-k}\right|^p\right)^{1/p}\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Соотношение (28) доказывается аналогично, но здесь вместо (21) используется (22).

Теперь докажем (29). В силу (23),

$$\sup_{a\in Q}\left|F_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin(k+\beta)a}{k+\beta}F(x+\beta+k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant A(\beta)E_n\left(\alpha(t)\,e^{i(x+\beta)t}\right)_1, \tag{31}$$

где $A(\beta)$ постоянная, зависящая только от β. При фиксированных x и β функция $\alpha(t)\,e^{i(x+\beta)t} \in L_1$ и потому

$$\lim_{n\to\infty} E_n\left(\alpha(t)\,e^{i(x+\beta)t}\right)_1 = 0.$$

Сопоставляя этот факт с соотношением (31), приходим к (29). Соотношение (30) доказывается аналогично, но здесь вместо (23) используется неравенство (24).

Следствие 7. *Пусть $x \in \mathbb{R}$, $a \in [0,\pi]$, $\alpha \in L_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функции F, F_a, $\widetilde{F}_a$ определены соотношениями* (19) *и* (20).

Тогда: 1) *если $1 < p \leqslant 2$, то*

$$\left|F_a(x) - \frac{a}{\pi}F(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin ka}{k}(F(x+k)+F(x-k))\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4E_n\left(\alpha(t)\,e^{ixt}\right)_p\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\sin ka}{k}\right|^p\right)^{1/p}, \tag{32}$$

$$\left|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos ka - 1}{k}(F(x+k)-F(x-k))\right| \leqslant$$

$$\leqslant 8E_n\left(\alpha(t)\,e^{ixt}\right)_p\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\sin^2\frac{ka}{2}}{k}\right|^p\right)^{1/p}; \tag{33}$$

2) *если $p = 1$, то*

$$\left|F_a(x) - \frac{a}{\pi}F(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin ka}{k}\big(F(x+k)+F(x-k)\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(2+\frac{2}{\pi}\right)E_n\Big(\alpha(t)\ e^{ixt}\Big)_1, \tag{34}$$

$$\left|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos ka - 1}{k}\big(F(x+k)-F(x-k)\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(2+\frac{4}{\pi}\right)E_n\Big(\alpha(t)\ e^{ixt}\Big)_1. \tag{35}$$

Для доказательства (32)–(35) достаточно положить в соотношениях (21)–(24) $\beta = 0$ и выполнить элементарные преобразования.

Теорема 3. *Пусть $x \in \mathbb{R}$, $a \in [0,\pi]$, $\alpha \in L_p$, функции F, F_a, $\widetilde{F}_a$ определены соотношениями* (19) *и* (20). *Тогда*

$$F_a(x) - \frac{a}{\pi}F(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ka}{k}(F(x+k)+F(x-k)), \tag{36}$$

$$\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\widetilde{F}_a(x)da = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ka}{k}\big(F(x+k)-F(x-k)\big), \tag{37}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k+1/2)a}{k+1/2}(F(x+k+1/2)+F(x-k-1/2)), \tag{38}$$

$$\widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x) = \\ = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k+1/2)a}{k+1/2}\big(F(x+k+1/2)-F(x-k-1/2)\big). \tag{39}$$

Ряды в правых частях равенств (36)–(39) *сходятся равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$, $a \in [0,\pi]$, если $p > 1$, и равномерно относительно $a \in [0,\pi]$, если $p = 1$.*

Теорема 3 легко устанавливается с помощью соотношений (27)–(30).

Следствие 8. *Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in L_1$, функции F, F_a, $\widetilde{F}_a$ определены равенствами* (19) *и* (20), $1 < p \leqslant 2$, $q = p/(p-1)$. *Тогда*

$$\Bigg(\int\limits_0^{\pi}\Big|F_a(x) - \frac{a}{\pi}F(x)\Big|^q da\Bigg)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{F(x+k)+F(x-k)}{k}\Big|^p\Bigg)^{1/p},$$

$$\Bigg(\int\limits_0^{\pi}\Big|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\widetilde{F}_t(x)dt\Big|^q da\Bigg)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{F(x+k)-F(x-k)}{k}\Big|^p\Bigg)^{1/p},$$

$$\Bigg(\int\limits_0^{\pi}\big|F_a(x)\big|^q da\Bigg)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\frac{F(x+k+1/2)+F(x-k-1/2)}{k}\Big|^p\Bigg)^{1/p},$$

$$\left(\int\limits_0^\pi \left|\widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x)\right|^q da\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{F(x+k+1/2) - F(x-k-1/2)}{k}\right|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство следствия 8 получается сопоставлением теоремы 3 с неравенством (4). При этом принимается во внимание теорема E.

Следствие 9. *В условиях следствия* 8

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{F(x+k)+F(x-k)}{k}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant \pi\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|F_a(x) - \frac{a}{\pi}F(x)\right|^p da\right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{F(x+k)-F(x-k)}{k}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant \pi\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \widetilde{F}_t(x)dt\right|^p da\right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{F(x+k+1/2)+F(x-k-1/2)}{k+1/2}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant \pi\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|F_a(x)\right|^p da\right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{F(x+k+1/2)-F(x-k-1/2)}{k+1/2}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant \pi\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\widetilde{F}_a(x)-\widetilde{F}_\pi(x)\right|^p da\right)^{1/p}.$$

Доказательство следствия 9 получается сопоставлением теоремы 3 с неравенством (3). При этом принимается во внимание теорема E.

Замечание 3. Следствия 8 и 9 получены путем сопоставления разложений в ряды Фурье с теоремой Рисса о коэффициентах Фурье. К настоящему времени получено много и других интересных результатов, относящихся к коэффициентам Фурье (см., например, [1, гл. XII; 9, с. 209–232]). Их сопоставление с соотношениями (36)–(39), а также с разложениями, которые могут быть получены на их основе (например, интегрированием и дифференцированием и т.п.), приводит к новым результатам. Однако, мы не останавливаемся на этом вопросе, поскольку он нуждается еще в дополнительном исследовании.

Следствие 10. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in L_1$, *функции* F, F_a, $\widetilde{F}_a$ *определены соотношениями* (19) *и* (20). *Тогда*

$$\int_0^\pi \Big| F_a(x) - \frac{a}{\pi} F(x) \Big|^2 da = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{|F(x+k) + F(x-k)|^2}{k^2},$$

$$\int_0^\pi \Big| \widetilde{F}_a(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \widetilde{F}_t(x) dt \Big|^2 da = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{|F(x+k) - F(x-k)|^2}{k^2},$$

$$\int_0^\pi \Big| F_a(x) \Big|^2 da = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{|F(x+k+1/2) + F(x-k-1/2)|^2}{(k+1/2)^2},$$

$$\int_0^\pi \Big| \widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x) \Big|^2 da = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{|F(x+k+1/2) + F(x-k-1/2)|^2}{(k+1/2)^2}.$$

В качестве примера приведем одно применение последних двух соотношений к классическим вопросам теории аппроксимации.

Следствие 11. *В условиях следствия* 10

$$\int_0^\pi |F_a(x)|^2 da + \int_0^\pi |\widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x)|^2 da \leqslant \pi \sup_{k\in\mathbb{Z}} |F(x+k+1/2)|^2. \quad (40)$$

Доказательство. Сопоставляя два последних равенства следствия 10, имеем

$$\int_0^\pi |F_a(x)|^2 da + \int_0^\pi |\widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x)|^2 da =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{|F(x+k+1/2)|^2 + |F(x-k-1/2)|^2}{(k+1/2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |F(x+k+1/2)|^2 = \pi \sup_{k\in\mathbb{Z}} |F(x+k+1/2)|^2.$$

Неравенство (40) можно трактовать как развитие неравенства типа С. Н. Бернштейна

$$|F'(x)| \leqslant \pi \sup_{k\in\mathbb{Z}} |F(x+k+1/2)| \quad (41)$$

в нестандартном направлении (в связи с неравенствами типа (41) см., например, [10, с. 182–193; 11, с. 221–231]), так как

$$|F'(x)| = \left|\int\limits_0^\pi \{\widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x)\}da\right| \leqslant \int\limits_0^\pi |\widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x)|da \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi}\left(\int\limits_0^\pi |\widetilde{F}_a(x) - \widetilde{F}_\pi(x)|^2 da\right)^{1/2} \leqslant \pi \sup_{k\in\mathbb{Z}} |F(x+k+1/2)|.$$

§2. О наилучшем приближении в пространстве периодических функций $\widetilde{L}_2$

1. В этом параграфе $\widetilde{L}_2$ – пространство измеримых 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, у которых $\|f\|_2 = (\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2)^{1/2} < \infty$; $E_n(f)_2 = \|f - s_n(f)\|_2$ – наилучшее приближение порядка n функции f в пространстве L_2; $\delta_t^1(f,x) = f(x+t/2) - f(x-t/2)$ – центральная разность первого порядка для функции f.

Лемма 1. *Пусть $f \in \widetilde{L}_2$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \left\|\delta_t^1(f)\right\|_2^2 \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}dt = E_n^2(f)_2. \tag{1}$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля (теорема B §1) для ортонормированной на отрезке Q системы $\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ имеем

$$E_n^2(f)_2 = 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\right),$$

$$\left\|\delta_t^1(f)\right\|_2^2 = 4\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2(1-\cos kt).$$

Теперь, учитывая тождество

$$D(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right\}$$

и интегрируя почленно, находим

$$\int\limits_0^{\pi} \left\|\delta_t^1(f)\right\|_2^2 D(t)dt = 4\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \int\limits_0^{\pi} (1-\cos kt)D(t)dt =$$

$$= 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\right) = E_n^2(f)_2.$$

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$,

$$g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\|\delta_t^1(f)\right\|_2^2 \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}.$$

Тогда: 1) *если* $n/2 \in \mathbb{N}$, *то*

$$\int\limits_0^{\pi} g_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(l + \frac{n+1}{2}\right) t\, dt =$$

$$= \begin{cases} E_{n+l}^2(f)_2 - E_l^2(f)_2 & \textit{при} \quad l \in \mathbb{Z}_+, \\ E_{|l|-1}^2(f)_2 + E_{l+n}^2(f)_2 & \textit{при} \quad -\dfrac{n}{2} \leqslant l \leqslant -1; \end{cases}$$

2) *если* $\dfrac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$, *то*

$$\int\limits_0^{\pi} g_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(l + \frac{n+1}{2}\right) t\, dt =$$

$$= \begin{cases} E_{n+l}^2(f)_2 - E_l^2(f)_2 & \textit{при} \quad l \in \mathbb{Z}, \\ E_{|l|-1}^2(f)_2 + E_{l+n}^2(f)_2 & \textit{при} \quad \dfrac{-n+1}{2} \leqslant l \leqslant -1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\pi} g_n(t)dt = \sqrt{2} E_{\frac{n-1}{2}}^2(f)_2.$$

Доказательство леммы 2 основано на лемме 1 и проводится непосредственными вычислениями.

2. Смысл леммы 2 состоит в том, что коэффициенты Фурье функции g_n по ортонормированной системе $\left\{\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2} \cos(l+1/2)t\right\}_{l=0}^{\infty}$

при четном n и по ортонормированной системе $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \cos t, \ldots, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \cos lt, \ldots \right\}$ при нечетном n выражаются через наилучшие приближения.

Это позволяет подключить к изучению наилучших приближений известные теоремы о коэффициентах Фурье. Приведем один пример.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in \widetilde{L}_2$. Тогда*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \Big(E_{n+l}^2(f)_2 - E_l^2(f)_2 \Big)^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(E_l^2(f)_2 + E_{n-l-1}^2(f)_2 \Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left\| \delta_t^1(f) \right\|_2^4 \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt. \tag{2}$$

Доказательство. Будем писать E_k^2 вместо $E_k^2(f)_2$. Пусть сначала n – четное число. Опираясь на первый пункт леммы 2, учитывая теорему E §1 и применяя теорему B §1, имеем

$$\sum_{l=0}^{\infty} \Big(E_{n+l}^2 - E_l^2 \Big)^2 + \sum_{l=-n/2}^{-1} \Big(E_{|l|-1}^2 + E_{l+n}^2 \Big)^2 = \int_0^{\pi} g_n^2(t)\, dt.$$

Далее,

$$\sum_{l=-n/2}^{-1} \Big(E_{|l|-1}^2 + E_{l+n}^2 \Big)^2 = \sum_{l=-n/2}^{-1} \Big(E_{-l-1}^2 + E_{l+n}^2 \Big)^2 =$$

$$= \sum_{l=0}^{n/2-1} \Big(E_l^2 + E_{n-l-1}^2 \Big)^2 = \sum_{l=n/2}^{n-1} \Big(E_l^2 + E_{n-l-1}^2 \Big)^2 =$$

$$= (1/2) \sum_{l=0}^{n-1} \Big(E_l^2 + E_{n-l-1}^2 \Big)^2.$$

Сопоставляя приведенные равенства, приходим к соотношению (2) в предположении, что n – четное число. Покажем, что формула (2) верна и в случае, когда $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$. Опираясь на второй пункт леммы 2, учитывая теорему E §1 и применяя теорему B §1, имеем

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big(E_{n+l}^2-E_l^2\Big)^2+\sum_{l=\frac{-n+1}{2}}^{-1}\Big(E_{|l|-1}^2+E_{l+n}^2\Big)^2+2E_{\frac{n-1}{2}}^4=\int\limits_0^{\pi}g_n^2(t)\,dt.$$

Далее,

$$\sum_{l=\frac{-n+1}{2}}^{-1}\Big(E_{|l|-1}^2+E_{l+n}^2\Big)^2=\sum_{l=0}^{(n-3)/2}\Big(E_l^2+E_{n-l-1}^2\Big)^2=$$

$$=\sum_{l=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\Big(E_l^2+E_{n-l-1}^2\Big)^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=\frac{-n+1}{2}}^{-1}\Big(E_{|l|-1}^2+E_{l+n}^2\Big)^2+2E_{\frac{n-1}{2}}^4=(1/2)\sum_{l=0}^{n-1}\Big(E_l^2+E_{n-l-1}^2\Big)^2.$$

Осталось сопоставить полученные соотношения.

3. Приведем два неравенства, следующих из сопоставления леммы 1 с теоремой Рисса (теорема A §1).

Теорема 2. *Пусть* $1<p\leqslant 2$, $q=p/(p-1)$, $f\in\widetilde{L}_2$. *Тогда*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{2q}(f)_2\Big)^{1/q}\leqslant\frac{1}{4}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\big\|\delta_t^1(f)\big\|_2^{2p}\sin^{-p}\frac{t}{2}dt\Big)^{1/p},$$

$$\Big(\int\limits_0^{\pi}\big\|\delta_t^1(f)\big\|_2^{2q}\sin^{-q}\frac{t}{2}\,dt\Big)^{1/q}\leqslant 2\pi\Big(\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{2p}(f)\Big)^{1/p}.$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно записать равенство (1) в форме

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\|\delta_t^1(f)\|_2^2}{\sin(t/2)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin(n+1/2)t\,dt=2\sqrt{2\pi}\,E_n^2(f)_2$$

и, приняв во внимание теорему E §1, воспользоваться теоремой Рисса.

Следствие 1. *Пусть* $f \in \widetilde{L}_2$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_k^4(f)_2 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \frac{\|\delta_t^1(f)\|_2^4}{\sin^2(t/2)}\, dt.$$

§3. Представление агрегатов приближения на классах тригонометрических полиномов

В этом параграфе мы устанавливаем аналоги ряда результатов, приведенных в книге [2] для тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами, применительно к тригонометрическим полиномам, когда коэффициенты являются элементами произвольного векторного пространства. Предшествующая история рассматриваемых вопросов отражена в [2].

1. В этом параграфе мы придерживаемся следующих обозначений и соглашений. Элементами пространства $\mathbb{C}^m$ являются упорядоченные совокупности m комплексных чисел. Если $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ принадлежат $\mathbb{C}^m$, $\alpha \in \mathbb{C}$, то $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m)$, $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m)$, скалярное произведение элементов x, y есть число $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k \overline{y}_k$; $\mathbb{O}^m = (0, \dots, 0)$ – нулевой элемент $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{1}^m = (1, \dots, 1)$. Через $\mathbb{R}^m$ обозначаем подмножество $\mathbb{C}^m$, элементами которого являются упорядоченные совокупности m вещественных чисел. В дальнейшем придерживаемся соглашения: если рассматривается некоторая величина $x \in \mathbb{C}^m$, то x_k $(k = \overline{1, m})$ обозначает ее k-ую координату, т.е. $x = (x_1, \dots, x_m)$. Операции умножения и деления распространяются на элементы $\mathbb{C}^m$. Эти операции выполняются покоординатно. В соответствии с этим, если $a, b \in \mathbb{C}^m$, то $ab = (a_1 b_1, \dots, a_m b_m)$, $a/b = (a_1/b_1, \dots, a_m/b_m)$. В последнем случае ни одна координата b_k не должна быть равна нулю. Если $a, b \in \mathbb{R}^m$, то запись $a \leqslant b$ означает, что $a_k \leqslant b_k$ при каждом $k = \overline{1, m}$. Если $a, b \in \mathbb{R}^m$, причем $a \leqslant b$, то $[a, b]$ обозначает совокупность точек $x \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$. Полагаем $v[a, b] = \prod\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$. Если $A \subset \mathbb{R}^m$, то запись $\sum\limits_{k \in A}$ означает $\sum\limits_{k \in A \cap \mathbb{Z}^m}$. Пусть X – нормированное пространство, $A \subset \mathbb{R}^m$, $x_k \in X$ при $k \in A \cap \mathbb{Z}^m$. Ряд

$\sum\limits_{k\in A} x_k$ называется сходящимся (в X), если в X сходится последовательность $s_n = \sum\limits_{k\in[-n,n]^m\cap A} x_k$, где $n \in \mathbb{Z}_+$. Суммой ряда называется *предел* s этой последовательности: $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Пусть X – векторное пространство, θ – его нулевой элемент. При $n \in \mathbb{Z}_+^m$ полагаем

$$H_n = \Big\{ \sum_{k\in[-n,n]} c_k\, e^{i(t,k)} \Big\}, \quad H(m) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+^m} H_n.$$

Здесь $c_k \in X$, $t \in \mathbb{C}^m$. Для элемента $f \in H_n$ мы будем допускать запись

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k\, e^{i(t,k)},$$

считая, что все $c_k = \theta$ при $k\overline{\in}[-n,n]$, а коэффициенты c_k обозначать через $c_k(f)$. Сумма

$$s_l(f,t) = \sum_{k\in[-l,l]} c_k(f)\, e^{i(t,k)} \quad (l \in \mathbb{Z}^m)$$

называется l-ой *частичной суммой* ряда (1).

Функция $\alpha_n : \mathbb{Z} \to \{1/2, 1\}$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ определена соотношениями:

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |t| \neq n, \\ 1/2 & \text{при} \quad |t| = n. \end{cases}$$

Если $n \in \mathbb{Z}_+^m$, $l \in \mathbb{Z}^m$, то $\alpha_n(l) = \prod\limits_{k=1}^{m} \alpha_{n_k}(l_k)$. Пусть $f \in H(m)$, $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^m}$, где $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}^m$. Тогда по определению

$$\lambda\nabla f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \lambda_k c_k(f)\, e^{i(t,k)}.$$

Полагаем $y_{n,k}(1) = \frac{\pi k}{n}$ при $k \in \mathbb{Z}^m$, $n \in \mathbb{N}^m$; $y_{n,k}(2) = \dfrac{2\pi k}{2n + \mathbb{1}^m}$ при $k \in \mathbb{Z}^m$, $n \in \mathbb{Z}_+^m$.

2. В этом пункте установим ряд интерполяционных формул для тригонометрических полиномов.

Через X будем обозначать комплексное векторное пространство.

Нам понадобятся следующие хорошо известные соотношения:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \quad (t \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_+), \tag{2}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k)\, e^{ikt} = \frac{\sin nt}{\operatorname{tg} t/2} \quad (t \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \in H_n$, $\alpha, x \in \mathbb{C}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $y_k = y_{n,k}(1)$, $\lambda = (\lambda_l)_{l \in \mathbb{Z}}$, *где* $\lambda_l \in \mathbb{C}$, $\psi(t) = \sum\limits_{l=-n}^{n} \alpha_n(l)\lambda_l\, e^{ilt}$,

$$A(f,x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(y_k + \alpha)\psi(x - y_k - \alpha),$$

$$B(f,x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(x + y_k + \alpha)\psi(-y_k - \alpha).$$

Тогда: 1) *если*

$$\lambda_l c_{-l}(f)\, e^{-2i\alpha l} = \lambda_l c_l(f) \quad (|l| = n),$$

то

$$\lambda \nabla f(x) = \sum_{l=-n}^{n} \lambda_l c_l(f)\, e^{ilx} = A(f,x); \tag{4}$$

2) *если*

$$\lambda_{-l} c_l(f)\, e^{2i\alpha l} = \lambda_l c_l(f) \quad (|l| = n),$$

то

$$\lambda \nabla f(x) = B(f,x). \tag{5}$$

Доказательство. Установим сначала первое утверждение. Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=-n}^{n} c_m\, e^{imx}$. Имеем

$$A(f,x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(y_k + \alpha) \sum_{l=-n}^{n} \alpha_n(l)\lambda_l \exp(il(x - y_k - \alpha)) =$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{l=-n}^{n} \alpha_n(l)\lambda_l\, e^{il(x-\alpha)} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(y_k + \alpha)\, e^{-ily_k},$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(y_k+\alpha)\, e^{-ily_k} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) \biggl(\sum_{m=-n}^{n} c_m\, e^{im(y_k+\alpha)} \biggr) e^{-ily_k} =$$

$$= \sum_{m=-n}^{n} c_m\, e^{im\alpha} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k)\, e^{i(m-l)y_k}.$$

Сопоставляя приведенные соотношения и применяя тождество (3), находим

$$A(f,x) = \frac{1}{2n} \sum_{l=-n}^{n} \sum_{m=-n}^{n} \alpha_n(l) \lambda_l c_m\, e^{ilx}\, e^{i(m-l)\alpha} S(m-l),$$

где

$$S(m-l) = \frac{\sin n(m-l)\pi/n}{\operatorname{tg}\frac{(m-l)\pi}{2n}} = \frac{\sin \pi(m-l)}{\operatorname{tg}\frac{(m-l)\pi}{2n}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m-l \neq 2kn, \\ 2n, & \text{если} \quad m-l = 2kn, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$A(f,x) = \sum_{l=-n+1}^{n-1} \lambda_l c_l\, e^{ilx} + \frac{1}{2} \Bigl\{ \lambda_n c_n\, e^{inx} + \lambda_n c_{-n}\, e^{inx}\, e^{-2in\alpha} \Bigr\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \Bigl\{ \lambda_{-n} c_{-n}\, e^{-inx} + \lambda_{-n} c_n\, e^{-inx}\, e^{2in\alpha} \Bigr\} = \sum_{l=-n}^{n} \lambda_l c_l\, e^{ilx}.$$

Теперь докажем второе утверждение. Имеем

$$B(f,x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(x+y_k+\alpha) \sum_{l=-n}^{n} \alpha_n(l) \lambda_l\, e^{il(-y_k-\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{l=-n}^{n} \alpha_n(l) \lambda_l\, e^{-il\alpha} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(x+y_k+\alpha)\, e^{-ily_k},$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) f(x+y_k+\alpha)\, e^{-ily_k} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k) \biggl(\sum_{m=-n}^{n} c_m \exp\bigl(im(x+y_k+\alpha)\bigr) \biggr) e^{-ily_k} =$$

$$= \sum_{m=-n}^{n} c_m\, e^{im(x+\alpha)} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n(k)\, e^{i(m-l)y_k}.$$

Следовательно,

$$B(f,x)=\frac{1}{2n}\sum_{l=-n}^{n}\sum_{m=-n}^{n}\alpha_n(l)\lambda_l c_m\, e^{imx}\, e^{i(m-l)\alpha}S(m-l)=$$

$$=\sum_{m=-n+1}^{n-1}\lambda_m c_m\, e^{imx}+\frac{1}{2}\Big\{\lambda_n c_n\, e^{inx}+\lambda_{-n}c_n\, e^{inx}\, e^{2in\alpha}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{\lambda_{-n}c_{-n}\, e^{-inx}+\lambda_n c_{-n}\, e^{-inx}\, e^{-2in\alpha}\Big\}=\sum_{m=-n}^{n}\lambda_m c_m\, e^{imx}.$$

Следствие 1. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $y_k=\dfrac{\pi k}{n}$, $\lambda_l\in\mathbb{C}$ $(l=-\overline{n,n})$, $\psi(t)=\sum_{l=-n}^{n}\alpha_n(l)\lambda_l\, e^{ilt}$. *Тогда*

$$\sum_{k=-n}^{n}\alpha_n(k)\psi(-y_k-\alpha)=2n\lambda_0.$$

Для доказательства (6) достаточно (считая $X=\mathbb{C}$) в формуле (5) положить $f(x)\equiv 1$.

Следствие 2. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $y_k=\dfrac{\pi k}{n}$, $\lambda_l\in\mathbb{C}$ $(l=-\overline{n,n})$, $\lambda_{-n}=\lambda_n$, $\psi(t)=\sum_{l=-n}^{n}\alpha_n(l)\lambda_l\, e^{ilt}$. *Тогда*

$$\sum_{k=-n}^{n}\alpha_n(k)(-1)^k\psi(y_k)=2n\lambda_n. \tag{7}$$

Для доказательства (7) достаточно (считая $X=\mathbb{C}$) в формуле (5) положить $f(x)=\cos nx$, $\alpha=x=0$ и принять во внимание, что в этом случае

$$\sum_{k=-n}^{n}\alpha_n(k)(-1)^k\psi(y_k)=2n\lambda_n.$$

Теорема 2. *Пусть* $n\in\mathbb{N}^2$, $f\in H_n$, $\alpha,x\in\mathbb{C}^2$, $k,l\in\mathbb{Z}^2$, $y_k=y_{n,k}(1)$, $\lambda=(\lambda_l)_{l\in\mathbb{Z}^2}$, *где* $\lambda_l\in\mathbb{C}$, $v_n=(4n_1n_2)^{-1}$, $K_n=\{u\in\mathbb{Z}^2\colon |u_1|=$

$n_1, |u_2| = n_2\}$, $\psi(t) = \sum\limits_{l\in[-n,n]} \alpha_n(l)\lambda_l\, e^{i(t,l)}$,

$$A(f,x) = v_n \sum_{k\in[-n,n]} \alpha_n(k) f(y_k+\alpha)\psi(x-y_k-\alpha),$$

$$B(f,x) = v_n \sum_{k\in[-n,n]} \alpha_n(k) f(x+y_k+\alpha)\psi(-y_k-\alpha).$$

Тогда: 1) *если*

$$\lambda_l\, e^{-i(\alpha,l)} \sum_{k\in K_n} c_k(f)\, e^{i(\alpha,k)} = 4\lambda_l c_l(f) \quad (l\in K_n),$$

$$\lambda_l c_{-l_1,l_2}(f)\, e^{-2i\alpha_1 l_1} = \lambda_l c_l(f) \quad (|l_1| = n_1,\ l_2 = -\overline{n_2+1, n_2-1}\,),$$

$$\lambda_l c_{l_1,-l_2}(f)\, e^{-2i\alpha_2 l_2} = \lambda_l c_l(f) \quad (|l_2| = n_2,\ l_1 = -\overline{n_1+1, n_1-1}\,),$$

то

$$\lambda\nabla f(x) = \sum_{l\in[-n,n]} \lambda_l c_l(f)\, e^{i(x,l)} = A(f,x); \tag{8}$$

2) *если*

$$c_l(f)\, e^{i(\alpha,l)} \sum_{k\in K_n} \lambda_k\, e^{-i(\alpha,k)} = 4\lambda_l c_l(f) \quad (l\in K_n),$$

$$\lambda_{-l_1,l_2} c_l(f)\, e^{2i\alpha_1 l_1} = \lambda_l c_l(f) \quad (|l_1| = n_1,\ l_2 = -\overline{n_2+1, n_2-1}\,),$$

$$\lambda_{l_1,-l_2} c_l(f)\, e^{2i\alpha_2 l_2} = \lambda_l c_l(f) \quad (|l_2| = n_2,\ l_1 = -\overline{n_1+1, n_1-1}\,),$$

то

$$\lambda\nabla f(x) = B(f,x). \tag{9}$$

Доказательство. Установим сначала формулу (8). Обозначим $[-n,n]$ через D. Имеем

$$A(f,x) = v_n \sum_{k\in D} \alpha_n(k) f(y_k+\alpha) \sum_{l\in D} \alpha_n(l)\lambda_l \exp(i(x-y_k-\alpha, l)) =$$

$$= v_n \sum_{l\in D} \alpha_n(l)\lambda_l\, e^{i(x-\alpha,l)} \sum_{k\in D} \alpha_n(k) f(y_k+\alpha)\, e^{-i(y_k,l)},$$

$$\sum_{k\in D} \alpha_n(k) f(y_k+\alpha)\, e^{-i(y_k,l)} =$$
$$=\sum_{k\in D} \alpha_n(k)\Bigl(\sum_{m\in D} c_m\, e^{i(y_k+\alpha,m)}\Bigr) e^{-i(y_k,l)} =$$
$$=\sum_{m\in D} c_m\, e^{i(\alpha,m)} \sum_{k\in D} \alpha_n(k)\, e^{i(y_k,m-l)}.$$

Следовательно,

$$A(f,x) =$$
$$= v_n \sum_{l\in D}\ \sum_{m\in D} \alpha_n(l)\lambda_l\, e^{i(x,l)}\, e^{i(\alpha,m-l)} c_m \sum_{k\in D} \alpha_n(k)\, e^{i(y_k,m-l)}. \quad (10)$$

Учитывая, что

$$\sum_{k\in D} \alpha_n(k) e^{i(y_k,m-l)} = \prod_{k=1}^{2} \frac{\sin \pi(m_k-l_k)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n_k}(m_k-l_k)},$$

после простых вычислений получаем, что в сумме (10) выражение $e^{i(x,l)}$ стоит с коэффициентом $\lambda_l c_l$, если $l\in[-n+\mathbb{1}^2, n-\mathbb{1}^2]$,

$$\frac{1}{2}\Bigl(\lambda_l c_l+\lambda_l c_{-n_1,l_2}\, e^{-2i\alpha_1 n_1}\Bigr)=\lambda_l c_l, \text{ если } l=(n_1,l_2),\ l_2=\overline{-n_2+1, n_2-1},$$

$$\frac{1}{2}\Bigl(\lambda_l c_l+\lambda_l c_{n_1,l_2}\, e^{2i\alpha_1 n_1}\Bigr)=\lambda_l c_l, \text{ если } l=(-n_1,l_2),\ l_2=\overline{-n_2+1, n_2-1},$$

$$\frac{1}{2}\Bigl(\lambda_l c_l+\lambda_l c_{l_1,-n_2}\, e^{-2i\alpha_2 n_2}\Bigr)=\lambda_l c_l, \text{ если } l=(l_1,n_2),\ l_1=\overline{-n_1+1, n_1-1},$$

$$\frac{1}{2}\Bigl(\lambda_l c_l+\lambda_l c_{l_1,n_2}\, e^{2i\alpha_2 n_2}\Bigr)=\lambda_l c_l, \text{ если } l=(l_1,-n_2),\ l_1=\overline{-n_1+1, n_1-1},$$

$$\frac{\lambda_l}{4}\, e^{-i(\alpha,l)} \sum_{m\in K_n} c_m\, e^{i(\alpha,m)} = \lambda_l c_l, \quad \text{если} \quad l\in K_n.$$

Таким образом,

$$A(f,x)=\sum_{l\in D} \lambda_l c_l\, e^{i(x,l)}.$$

Теперь докажем формулу (9). Имеем

$$B(f,x) = v_n \sum_{k\in D} \alpha_n(k) f(x+y_k+\alpha) \sum_{l\in D} \alpha_n(l)\lambda_l\, e^{-i(y_k+\alpha,l)} =$$

$$= v_n \sum_{l \in D} \alpha_n(l) \lambda_l \, e^{-i(\alpha,l)} \sum_{k \in D} \alpha_n(k) f(x + y_k + \alpha) \, e^{-i(y_k,l)},$$

$$\sum_{k \in D} \alpha_n(k) f(x + y_k + \alpha) \, e^{-i(y_k,l)} =$$

$$= \sum_{k \in D} \alpha_n(k) \left(\sum_{m \in D} c_m \exp(i(x + y_k + \alpha, m)) \right) e^{-i(y_k,l)} =$$

$$= \sum_{m \in D} c_m \, e^{i(x+\alpha,m)} \sum_{k \in D} \alpha_n(k) \, e^{i(y_k,m-l)}.$$

Следовательно,

$$B(f,x) =$$

$$= v_n \sum_{l \in D} \sum_{m \in D} \alpha_n(l) \lambda_l c_m \, e^{i(x,m)} \, e^{i(\alpha,m-l)} \sum_{k \in D} \alpha_n(k) \, e^{i(y_k,m-l)}. \quad (11)$$

В сумму (11) выражение $e^{i(x,m)}$ входит с коэффициентом $\lambda_m c_m$, если $m \in [-n + \mathbb{1}^2, n - \mathbb{1}^2]$,

$$\frac{1}{2}\Big(\lambda_m c_m + \lambda_{-n_1,m_2} c_m \, e^{2in_1\alpha_1} \Big) = \lambda_m c_m,$$

$$\text{если} \quad m = (n_1, m_2), \;\; m_2 = -\overline{n_2 + 1, n_2 - 1},$$

$$\frac{1}{2}\Big(\lambda_m c_m + \lambda_{n_1,m_2} c_m \, e^{-2in_1\alpha_1} \Big) = \lambda_m c_m,$$

$$\text{если} \quad m = (-n_1, m_2), \;\; m_2 = -\overline{n_2 + 1, n_2 - 1},$$

$$\frac{1}{2}\Big(\lambda_m c_m + \lambda_{m_1,-n_2} c_m \, e^{2in_2\alpha_2} \Big) = \lambda_m c_m,$$

$$\text{если} \quad m = (m_1, n_2), \;\; m_1 = -\overline{n_1 + 1, n_1 - 1},$$

$$\frac{1}{2}\Big(\lambda_m c_m + \lambda_{m_1,n_2} c_m \, e^{-2in_2\alpha_2} \Big) = \lambda_m c_m,$$

$$\text{если} \quad m = (m_1, -n_2), \;\; m_1 = \overline{-n_1 + 1, n_1 - 1},$$

$$\frac{1}{4} c_m \, e^{i(\alpha,m)} \sum_{l \in K_n} \lambda_l \, e^{-i(\alpha,l)} = \lambda_m c_m, \quad \text{если} \quad m \in K_n.$$

Таким образом,

$$B(f,x) = \sum_{m \in [-n,n]} \lambda_m c_m \, e^{i(x,m)}.$$

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+^m$, $f \in H_n$, $\alpha, x \in \mathbb{C}^m$, $k, l \in \mathbb{Z}^m$, $y_k = y_{n,k}(2)$, $\lambda = (\lambda_l)_{l\in\mathbb{Z}^m}$, *где* $\lambda_l \in \mathbb{C}$, $v_n = (\prod_{k=1}^{m}(2n_k+1))^{-1}$, $\psi(t) = \sum_{l\in[-n,n]} \lambda_l\, e^{i(t,l)}$,

$$C(f,x) = v_n \sum_{k\in[-n,n]} f(y_k+\alpha)\psi(x-y_k-\alpha).$$

Тогда

$$\lambda\nabla f(x) = \sum_{k\in[-n,n]} \lambda_k c_k(f)\, e^{i(x,k)} = C(f,x). \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим $[-n,n]$ через D. Пусть $f(x) = \sum_{p\in D} c_p\, e^{i(x,p)}$. Имеем

$$C(f,x) = v_n \sum_{k\in D} f(y_k+\alpha) \sum_{l\in D} \lambda_l \exp(i(x-y_k-\alpha,l)) = \\ = v_n \sum_{l\in D} \lambda_l\, e^{i(x-\alpha,l)} \sum_{k\in D} f(y_k+\alpha)\, e^{-i(y_k,l)},$$

$$\sum_{k\in D} f(y_k+\alpha)\, e^{-i(y_k,l)} = \sum_{k\in D}\left(\sum_{p\in D} c_p\, e^{i(y_k+\alpha,p)}\right) e^{-i(y_k,l)} = \\ = \sum_{p\in D} c_p\, e^{i(\alpha,p)} \sum_{k\in D} e^{i(y_k,p-l)}.$$

Следовательно,

$$C(f,x) = v_n \sum_{l\in D}\sum_{p\in D} \lambda_l\, e^{i(x,l)}\, e^{i(\alpha,p-l)} c_p \sum_{k\in D} e^{i(y_k,p-l)}.$$

Отсюда, применяя равенство (2), находим

$$C(f,x) = \sum_{l\in D} \lambda_l c_l\, e^{i(x,l)}.$$

Следствие 3. *В условиях теоремы* 3

$$\lambda\nabla f(x) = v_n \sum_{k\in[-n,n]} f(x+y_k+\alpha)\psi(-y_k-\alpha). \tag{13}$$

Для доказательства следствия 3 достаточно в формуле (12) в качестве α взять $x+\alpha$.

Следствие 4. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+^m$, $\alpha \in \mathbb{C}^m$, $k \in \mathbb{Z}^m$, $y_k = y_{n,k}(2)$, $\lambda_l \in \mathbb{C}$, $(l \in [-n,n] \cap \mathbb{Z}^m)$, $\psi(t) = \sum\limits_{l \in [-n,n]} \lambda_l\, e^{i(t,l)}$. *Тогда*

$$\sum_{k \in [-n,n]} \psi(y_k + \alpha) = \lambda_{\mathbb{O}^m} v[-n, n + \mathbb{I}^m]. \tag{14}$$

Для доказательства (14) достаточно (считая $X = \mathbb{C}$) положить $f(x) \equiv 1$ в формуле (13).

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}^m$, $f \in H_n$, $A_n = [-n + \mathbb{I}^m, n - \mathbb{I}^m] \cap \mathbb{Z}^m$, $\alpha, x \in \mathbb{C}^m$, $k, l \in \mathbb{Z}^m$, $y_k = y_{n,k}(1)$, $\lambda_l \in \mathbb{C}$ $(l \in A_n)$, $v_n = (v[-n,n])^{-1}$, $\psi(t) = \sum\limits_{l \in A_n} \lambda_l\, e^{i(t,l)}$,

$$D(f,x) = v_n \sum_{k \in [-n,n]} \alpha_n(k) f(y_k + \alpha) \psi(x - y_k - \alpha).$$

Тогда

$$\sum_{k \in A_n} \lambda_k c_k(f)\, e^{i(x,k)} = D(f,x).$$

Доказательство. Обозначим $[-n,n]$ через D. Пусть $f(x) = \sum\limits_{p \in D} c_p\, e^{i(x,p)}$. Имеем

$$D(f,x) = v_n \sum_{k \in D} \alpha_n(k) f(y_k + \alpha) \sum_{l \in A_n} \lambda_l \exp(i(x - y_k - \alpha, l)) =$$
$$= v_n \sum_{l \in A_n} \lambda_l\, e^{i(x-\alpha,l)} \sum_{k \in D} \alpha_n(k) f(y_k + \alpha)\, e^{-i(y_k,l)},$$

$$\sum_{k \in D} \alpha_n(k) f(y_k + \alpha)\, e^{-i(y_k,l)} = \sum_{k \in D} \alpha_n(k) \left(\sum_{p \in D} c_p\, e^{i(y_k+\alpha,p)} \right) e^{-i(y_k,l)} =$$
$$= \sum_{p \in D} c_p\, e^{i(\alpha,p)} \sum_{k \in D} \alpha_n(k)\, e^{i(y_k,p-l)}.$$

Следовательно,

$$D(f,x) = v_n \sum_{l \in A_n} \sum_{p \in D} \lambda_l c_p\, e^{i(x,l)}\, e^{i(\alpha,p-l)} \sum_{k \in D} \alpha_n(k)\, e^{i(y_k,p-l)} =$$
$$= \sum_{l \in A_n} \lambda_l c_l\, e^{i(x,l)}.$$

Следствие 5. *В условиях теоремы* 4

$$\sum_{k\in A_n}\lambda_k c_k(f)\,e^{i(x,k)}=v_n\sum_{k\in[-n,n]}\alpha_n(k)f(x+y_k+\alpha)\psi(-y_k-\alpha).$$

Следствие 6. *Пусть* $n\in\mathbb{N}^m$, $\alpha\in\mathbb{C}^m$, $k\in\mathbb{Z}^m$, $y_k=y_{n,k}(1)$, $A_n=[-n+\mathbb{1}^m,n-\mathbb{1}^m]\cap\mathbb{Z}^m$, $\lambda_l\in\mathbb{C}$ $(l\in A_n)$, $\psi(t)=\sum\limits_{l\in A_n}\lambda_l\,e^{i(t,l)}$. *Тогда*

$$\sum_{k\in[-n,n]}\alpha_n(k)\psi(y_k+\alpha)=\lambda_{\mathbb{O}^m}v[-n,n].$$

Замечание 1. Пусть $n\in\mathbb{Z}_+^m$, $\beta,x\in\mathbb{C}^m$. Положим

$$H_{n,\beta}=\Bigg\{\sum_{k\in[-n,n]}c_k\,e^{i(x,k+\beta)}\Bigg\},$$

где $c_k\in X$.

Установленные выше результаты могут быть распространены на функции класса $H_{n,\beta}$.

В качестве примера приведем формулировку аналога теоремы 2.

Теорема 2′. *Пусть* $n\in\mathbb{N}^2$, $\alpha,\beta,x\in\mathbb{C}^2$, $k,l\in\mathbb{Z}^2$, $y_k=y_{n,k}(1)$, $v_n=(4n_1n_2)^{-1}$, $K_n=\{u\in\mathbb{Z}^2\colon|u_1|=n_1,|u_2|=n_2\}$, $\lambda_l\in\mathbb{C}$ $(l\in\mathbb{Z}^2)$,

$$\psi(t)=\sum_{l\in[-n,n]}\alpha_n(l)\lambda_l\,e^{i(t,l+\beta)},$$
$$f(x)=\sum_{k\in[-n,n]}c_k\,e^{i(x,k+\beta)},$$

где $c_k\in X$. *Тогда:* 1) *если*

$$\lambda_l\,e^{-i(\alpha,l)}\sum_{k\in K_n}c_k\,e^{i(\alpha,k)}=4\lambda_l c_l\quad(l\in K_n),$$

$$\lambda_l c_{-l_1,l_2}\,e^{-2i\alpha_1 l_1}=\lambda_l c_l\quad(|l_1|=n_1,\ l_2=-\overline{n_2+1,n_2-1}\,),$$
$$\lambda_l c_{l_1,-l_2}\,e^{-2i\alpha_2 l_2}=\lambda_l c_l\quad(|l_2|=n_2,\ l_2=-\overline{n_1+1,n_1-1}\,),$$

то

$$\sum_{l\in[-n,n]}\lambda_l c_l\,e^{i(x,l+\beta)}=v_n\sum_{k\in[-n,n]}\alpha_n(k)f(y_k+\alpha)\psi(x-y_k-\alpha);$$

2) *если*

$$c_l\, e^{i(\alpha,l)} \sum_{k\in K_n} \lambda_k\, e^{-i(\alpha,k)} = 4\lambda_l c_l \quad (l\in K_n),$$

$$\lambda_{-l_1,l_2} c_l\, e^{2i\alpha_1 l_1} = \lambda_l c_l \quad (|l_1| = n_1,\, l_2 = -\overline{n_2+1, n_2-1}\,),$$

$$\lambda_{l_1,-l_2} c_l\, e^{2i\alpha_2 l_2} = \lambda_l c_l \quad (|l_2| = n_2,\, l_1 = -\overline{n_1+1, n_1-1}\,),$$

то

$$\sum_{l\in[-n,n]} \lambda_l c_l\, e^{i(x,l+\beta)} = v_n \sum_{k\in[-n,n]} \alpha_n(k) f(x+y_k+\alpha)\psi(-y_k-\alpha).$$

Замечание 2. Нетрудно установить полный аналог теорем 1 и 2 для пространств любого числа измерений. Мы ограничились частным случаем этого результата (теорема 4), поскольку в общей формулировке он выглядит несколько громоздко, а его приложения находятся еще в стадии изучения.

Теорема 5. *Пусть X – комплексное нормированное пространство, $n\in\mathbb{Z}_+^m$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^m$, $x\in\mathbb{C}^m$, $d_k\in\mathbb{C}$ $(k\in\mathbb{Z}^m)$, функция $g\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ определена равенством $g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} d_k\, e^{i(t,k+\alpha)}$, $\lambda_k = g(k\beta)$, $f\in H_n$. Тогда*

$$\sum_{k\in[-n,n]} \lambda_k c_k(f)\, e^{i(x,k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} d_k f\big(x+(k+\alpha)\beta\big).$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{l\in[-n,n]} \lambda_l c_l(f)\, e^{i(x,l)} = \sum_{l\in[-n,n]} \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} d_k \exp\big(i(l\beta, k+\alpha)\big)\Bigg) c_l(f)\, e^{i(x,l)} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} d_k \sum_{l\in[-n,n]} c_l(f) \exp\big(i(x+(k+\alpha)\beta, l)\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} d_k f(x+(k+\alpha)\beta).$$

3. Приведем пример приложений результатов, установленных в пункте 2.

Введем некоторые обозначения. Если $n\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{Z}^2$, $x\in\mathbb{C}^2$, $f\in H_{\mathbb{1}^2 n}$, то полагаем

$$\alpha(f,x,l) = \alpha(x,l) =$$

$$= \sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{1} f\Bigg(x_1 + (-1)^{\gamma_1}\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}, x_2 + (-1)^{\gamma_2}\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\Bigg),$$

$$\beta(f,x,l)=\beta(x,l)=$$
$$=\sum_{\gamma_1,\gamma_2=0}^{1}(-1)^{\gamma_1+\gamma_2}f\left(x_1+(-1)^{\gamma_1}\frac{\pi(2l_1+1)}{2n},x_2+(-1)^{\gamma_2}\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right),$$

Далее, если $f\in H(2)$, $a\in\mathbb{Z}_+^2$, то

$$f_a(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}c_k(f)(-i\operatorname{sign}k_1)^{a_1}(-\operatorname{sign}k_2)^{a_2}\,e^{i(x,k)}.$$

Функция f_a называется сопряженной (тригонометрически) к функции f с порядком сопряжения a. Ясно, что $f(x)=f_{\mathbb{O}^2}(x)$.

Теорема 6. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $a=\mathbb{I}^2$, $x\in\mathbb{C}^2$, $f\in H_{\mathbb{I}^2n}$. Тогда*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}s_{k\,\mathbb{I}^2}(f,x)=\frac{1}{8n^2}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\alpha(f,x,l\mathbb{I}^2)}{\sin^2\frac{\pi(2l+1)}{4n}},\tag{15}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{s_{n\,\mathbb{I}^2}(f_{\mathbb{I}^2},x)-s_{(n,k)}(f_{\mathbb{I}^2},x)-s_{(k,n)}(f_{\mathbb{I}^2},x)+s_{k\,\mathbb{I}^2}(f_{\mathbb{I}^2},x)\Big\}=$$
$$=\frac{1}{8n^2}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\beta(f,x,l\mathbb{I}^2)}{\sin^2\frac{\pi(2l+1)}{4n}}.\tag{16}$$

Доказательство. Сначала установим (15). Положим при $k\in\mathbb{Z}_+$, $t\in\mathbb{R}$

$$D_k(t)=\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}.$$

Далее, если $l\in\mathbb{Z}^2$, то $y_l=\dfrac{\pi(2l+a)}{2n}$. В силу формулы (9) при $k<n$

$$s_{k\,\mathbb{I}^2}(f,x)=$$
$$=\frac{1}{4n^2}\sum_{l\in[-na,na]}\alpha_{na}(l)f(x+y_l)D_k\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right)D_k\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right).$$

Учитывая четность и 2π-периодичность функции $D_k(t)$, а также 2π-периодичность функции f, после простых преобразований находим

$$s_{k\mathbb{I}^2}(f,x) = \\ = \frac{1}{4n^2} \sum_{l\in[\mathbb{O}^2,(n-1)a]} \alpha(x,l) D_k\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right) D_k\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right). \quad (17)$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+1/2)u \sin(k+1/2)v = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Big\{ \cos(k+1/2)(u-v) - \cos(k+1/2)(u+v) \Big\} = \\ = \frac{1}{4}\left\{ \frac{\sin n(u-v)}{\sin\frac{u-v}{2}} - \frac{\sin n(u+v)}{\sin\frac{u+v}{2}} \right\},$$

то в силу (17)

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_{ka}(f,x) = \frac{1}{8n}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{\alpha(x,la)}{\sin^2\frac{\pi(2l+1)}{4n}}.$$

Теперь установим (16). Опираясь на формулу (9) и учитывая тождество

$$-i\sum_{k=-n}^{n} (\operatorname{sign} k)\alpha_n(k)\, e^{ikt} = \frac{1-\cos nt}{\operatorname{tg} t/2} = A(t),$$

находим, что

$$s_{na}(f_a,x) = \\ = \frac{1}{4n^2}\sum_{l\in[-na,na]} \alpha_{n\mathbb{I}^2}(l) f(x+y_l) A\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right) A\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right).$$

Отсюда, используя нечетность и 2π-периодичность функции $A(t)$ и 2π-периодичность функции f, после простых преобразований получаем

$$s_{na}(f_a,x) = \\ = \frac{1}{4n^2}\sum_{l\in[\mathbb{O}^2,(n-1)a]} \beta(x,l) A\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right) A\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right).$$

Аналогично, принимая во внимание еще формулу

$$-i\sum_{l=-k}^{k}(\operatorname{sign} l)\, e^{ilt} = \frac{\cos(t/2)-\cos(k+1/2)t}{\sin(t/2)} = B_k(t),$$

приходим к соотношениям

$$s_{(n,k)}(f_a,x) = \\ = \frac{1}{4n^2}\sum_{l\in[\mathbb{O}^2,(n-1)a]}\beta(x,l)A\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right)B_k\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right),$$

$$s_{(k,n)}(f_a,x) = \\ = \frac{1}{4n^2}\sum_{l\in[\mathbb{O}^2,(n-1)a]}\beta(x,l)B_k\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right)A\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right),$$

$$s_{(k,k)}(f_a,x) = \\ = \frac{1}{4n^2}\sum_{l\in[\mathbb{O}^2,(n-1)a]}\beta(x,l)B_k\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right)B_k\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right),$$

где $k<n$. Значит,

$$s_{na}(f_a,x) - s_{(n,k)}(f_a,x) - s_{(k,n)}(f_a,x) + s_{ka}(f,x) =$$

$$= \frac{1}{4n^2}\sum_{l\in[\mathbb{O}^2,(n-1)a]}\beta(x,l)\left\{A\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right) - B_k\left(\frac{\pi(2l_1+1)}{2n}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{A\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right) - B_k\left(\frac{\pi(2l_2+1)}{2n}\right)\right\}. \qquad (18)$$

Далее,

$$\{A(u)-B_k(u)\}\{A(v)-B_k(v)\} = \\ = \left\{-\frac{\cos nu}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}} + \frac{\cos(k+1/2)u}{\sin\frac{u}{2}}\right\}\left\{-\frac{\cos nv}{\operatorname{tg}\frac{v}{2}} + \frac{\cos(k+1/2)v}{\sin\frac{v}{2}}\right\},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k+1/2)u\cos(k+1/2)v =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \big(\cos(k+1/2)(u-v) + \cos(k+1/2)(u+v)\big) =$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin n(u-v)}{\sin\frac{u-v}{2}} + \frac{\sin n(u+v)}{\sin\frac{u+v}{2}}\right\}.$$

Опираясь на (18) и приведенные выше соотношения, после элементарных преобразований приходим к (16).

Следствие 7. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \in H_{\mathbb{I}^2 n}$, $x \in \mathbb{C}^2$. *Тогда*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_{k\,\mathbb{I}^2}(f,x) +$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{s_{n\,\mathbb{I}^2}(f_{\mathbb{I}^2},x) - s_{(n,k)}(f_{\mathbb{I}^2},x) - s_{(k,n)}(f_{\mathbb{I}^2},x) + s_{k\,\mathbb{I}^2}(f_{\mathbb{I}^2},x)\Big\} =$$
$$=\frac{1}{4n^2}\sum_{l=0}^{n-1}\left\{f\left(x_1 + \frac{\pi(2l+1)}{2n}, x_2 + \frac{\pi(2l+1)}{2n}\right) +\right.$$
$$\left. + f\left(x_1 - \frac{\pi(2l+1)}{2n}, x_2 - \frac{\pi(2l+1)}{2n}\right)\right\}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(2l+1)}{4n}}. \qquad (19)$$

Приведем один пример приложений формулы (19) к классическим вопросам теории аппроксимации.

Пусть $X = C$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in H_n$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{f}(x) = -i\sum_{k=-n}^{n} (\operatorname{sign} k) c_k(f)\, e^{ikx}.$$

Применим интерполяционную формулу (19) к функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ заданной соотношением

$$g(y) = f(y_1)\overline{f}(y_2).$$

В результате получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|s_k(f,x)|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\widetilde{s}_n(f,x)-\widetilde{s}_k(f,x)|^2= \tag{20}$$

$$=\frac{1}{4n^2}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\left|f\Big(x+\dfrac{\pi(2l+1)}{2n}\Big)\right|^2+\left|f\Big(x-\dfrac{\pi(2l+1)}{2n}\Big)\right|^2}{\sin^2\dfrac{\pi(2l+1)}{4n}}.$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{n-1}\sin^{-2}\frac{\pi(2l+1)}{4n}=2n^2,$$

то из (20) следует, что при любом $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|s_k(f,x)|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\widetilde{s}_n(f,x)-\widetilde{s}_k(f,x)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\max_{l\in\mathbb{R}}\left|f\Big(x+\frac{\pi(2l+1)}{2n}\Big)\right|^2. \tag{21}$$

Последнее соотношение можно рассматривать, в частности, как усиление классического неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического полинома: если $f\in H_n$, то

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\leqslant n\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|.$$

Действительно,

$$|f'(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\big(\widetilde{s}_n(f,x)-\widetilde{s}_k(f,x)\big)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|\widetilde{s}_n(f,x)-\widetilde{s}_k(f,x)|\leqslant$$

$$\leqslant\left(n\sum_{k=0}^{n-1}|\widetilde{s}_n(f,x)-\widetilde{s}_k(f,x)|^2\right)^{1/2}\leqslant n\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|.$$

Мы привели только один пример приложений теорем пункта 2 к конкретным задачам теории аппроксимации. Более подробно вопрос о приложениях (для пространства $X=\mathbb{C}$) рассмотрен в книге [2]. В настоящее время найдены и другие аспекты и подходы (часть из них нашла свое отражение в §§1и 2 настоящей работы), относящиеся к приложениям, которые не отражены в [2]. Авторы предполагают вернуться к этой теме в последующих работах.

Литература

1. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды,* Т. 2, М., 1965.
2. В. В. Жук, *Сильная аппроксимация периодических функций,* Л., 1989.
3. Р. Пэли, Н. Винер, *Преобразования Фурье в комплексной области,* М., 1964.
4. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды,* М., 1961.
5. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды,* Т. 1, М., 1965.
6. У. М. Сиберт, *Цепи, сигналы, системы,* Ч. 2, М., 1988.
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований,* Т. 1, М., 1969.
8. В. В. Диткин, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление,* М., 1961.
9. J. Marcinkiewicz, *Collected papers,* Warszawa, 1964.
10. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации,* М., 1965.
11. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного,* М., 1960.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 сентября 2004 г.

E-mail: zhuk@math.spbu.ru