Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Г. В. Кузьмина

ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ РИМАНОВОЙ СФЕРЫ. III

1. Данная работа продолжает серию статей в "Записках научных семинаров ПОМИ", посвященных задачам, указанным в заглавии, и смежным вопросам.

К числу классических вопросов геометрической теории функции относится задача о максимуме произведения

$$\prod_{k=1}^{n}{}' R^{\alpha_k^2}(D_k, a_k) \tag{1}$$

степеней конформных радиусов в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ всех систем неналегающих односвязных областей $\{D_1, \ldots, D_n\}$, $a_k \in D_k$, при $k = 1, \ldots, n$, где $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots a_n\}$ – система различных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – система положительных чисел. Как обычно, через $R(D_k, a_k)$ обозначаем конформный радиус области D_k относительно точки a_k, штрих в произведении (1) означает, что при $a_k = \infty$ под сомножителем $R(D_k, a_k)$ понимается $R^{-1}(D_k, \infty)$.

Пусть $M(D, a)$ – приведенный модуль области D относительно точки $a \in D$: $M(D, a) = \frac{1}{2\pi} \log R(D, a)$, если $a \neq \infty$, $M(D, a) = -\frac{1}{2\pi} \log R(D, a)$, если $a = \infty$. Задача о максимуме суммы

$$\mathcal{M} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 M(D_k, a_k) \tag{2}$$

в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ является одной из основных задач об экстремальном разбиении, которым в последние годы уделяется значительное внимание. Эта задача представляет собой экстремально-метрическую проблему в семействе всех допустимых метрик и к ней применим весь арсенал метода экстремальной метрики. В

Работа выполнена при частичной поддержке Программы 2004 г. фундаментальных исследований Президиума РАН "Исследования в фундаментальных областях современной математики".

силу результатов единственности этого метода, максимум суммы (2) в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ зависит только от точек a_k и чисел α_k и мы обозначаем его через $\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Известны необходимые и достаточные условия, определяющие эту величину,однако конкретное нахождение указанного максимума при достаточно больших n представляет значительные трудности. По этой причине задача о $\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ рассматривалась при различных условиях симметрии. Первые общие результаты в этом направлении были получены В. Н. Дубининым методом симметризации (см. [1, 2, 3]).

Величину $\mathcal{M}(a_1,\ldots a_n;1,\ldots,1)$ обозначаем через $\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_n)$.

С задачей о максимуме произведения (1) или суммы (2) в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ (задача 1) непосредственно связана задача о максимуме величины

$$\log J(a_1,\ldots,a_n)=2\pi\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_n)-\frac{2}{n-1}\log\prod_{1\leqslant k<n\leqslant 1}|a_k-a_l|. \quad (3)$$

в семействе $\mathcal{D}$ всех допустимых систем областей относительно любых систем точек $\mathbf{a}$ (задача 2). Величина (3) – инвариант относительно группы $\mathbf{\Gamma}$ дробно-линейных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$. Максимум инварианта $J(a_1,\ldots,a_n)$ будем обозначать через J_n.

Задача 2 относится к числу задач со свободными полюсами ассоциированного квадратичного дифференциала. При $n=4$ решения задачи 1 (при $\alpha=1$) и задачи 2 известны (см. [3]). При $n=5$ задача 2 была решена при дополнительном симметризационном предположении. Именно, справедлива

Теорема 1. *Для систем точек $\{a_1,\ldots,a_5\}$, симметричных относительно некоторой окружности или прямой, максимум инварианта $J(a_1,\ldots,a_5)$ реализуется для системы точек*

$$\mathbf{a}^*=\{0,1,e^{2\pi i/3},e^{-2\pi i/3},\infty\}.$$

Указанные точки являются полюсами квадратичного дифференциала

$$Q^*(z)dz^2=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{z(z^3+8)}{z^3-1)^2}dz^2,$$

а круговые области $D_1^*,\ldots,D_5^*$ этого дифференциала образуют экстремальную систему областей рассматриваемой задачи. Любая другая экстремальная конфигурация данной задачи соответствует *указанной при преобразовании из группы* **Γ**. *Для указанного максимума имеем равенство*

$$\log J_5 = -2,4469.$$

Доказательство этой теоремы было получено в [4] и [5] различными методами.

В [6,I] была анонсирована

Теорема 2. *Для любой системы точек* $\{a_1, \ldots, a_5\}$ *максимум инварианта* $J(a_1, \ldots, a_5)$ *реализуется только в случаях, указанных в теореме 1.*

Предложенное в [6,I] доказательство теоремы 2, как было указано в [6, II], является ошибочным. В [6,II] были кратно описаны основные моменты возможного доказательства теоремы 2. В данной работе мы подробно останавливаемся на фактах, используемых при доказательстве теоремы 2. Именно, посредством геометрического подхода мы указываем системы точек, которые не являются экстремальными в рассматриваемой задаче, и тем самым исключаем эти системы точек из рассмотрения, а также приводим результаты технического характера, позволяющие оценить значения исследуемой величины для остающихся систем точек.

2. Условимся в некоторых обозначениях. Если a_1, a_2, a_3 – различные точки $\mathbb{C}$, то пусть $C(a_1, a_2, a_3)$ – окружность, проходящая через указанные точки, $U(a_1, a_2, a_3)$ – внутренность этой окружности, $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ – евклидов треугольник с вершинами в указанных точках, $K(a_1, a_2, a_3)$ – замкнутая выпуклая оболочка множества $\{a_1, a_2, a_3\}$, т.е. $K(a_1, a_2, a_3)$ – замыкание $\Delta(a_1, a_2, a_3)$, $K^{(h)}(a_1, a_2, a_3)$ – гиперболическая замкнутая выпуклая оболочка указанного множества по отношению к кругу $U(a_1, a_2, a_3)$.

Так как в экстремальном случае все точки системы $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, а также любые четыре из этих точек не могут лежать на одной окружности или прямой [4], то мы будем рассматривать системы точек $\{-1, 1, a, b, \infty\}$, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Re} a \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} a > 0, \quad b \in U(-1, 1, a). \tag{4}$$

В случае $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = a$ вместо $C(a_1, a_2, a_3)$, $U(a_1, a_2, a_3)$ и т.д. будем использовать обозначения $C(a)$, $U(a)$ и т.д.

Пусть $c = c(a)$ – центр окружности $C(a)$, $R = R(a)$ – ее радиус. Полагая

$$c = i \operatorname{tg} \beta, \quad -\pi/2 < \beta < \pi/2,$$

имеем

$$R = 1/\cos\beta, \quad a = c + \mathrm{R}e^{i\varphi}, \quad -\beta < \varphi \leqslant \pi/2.$$

Если $c(a) \in K(a)$, то треугольник $\Delta(a)$ является остроугольным или прямоугольным и $\operatorname{Im} c(a) \geqslant 0$, в противном случае $\Delta(a)$ – тупоугольный треугольник и $\operatorname{Im} c(a) < 0$. В дальнейшем эти два случая играют различную роль.

При доказательстве теоремы 1 существенно использовалась следующая лемма [2], [6,I].

Лемма 1. *Пусть для системы* $\{-1, 1, a, b, \infty\}$ *выполнены условия (4). Пусть* $c(a) \in K(a)$ *и* $b \in K^{(h)}(a)$. *Тогда система* $\{-1, 1, a, b, \infty\}$ *является экстремальной системой задачи о максимуме* $J(a_1, \ldots, a_5)$ *только в случае*

$$\{-1, 1, a, b, \infty\} = \{-1, 1, i\sqrt{3}, i/\sqrt{3}, \infty\}.$$

Указанная экстремальная конфигурация обладает высокой степенью симметрии: в данном случае $\Delta(a)$ – равносторонний треугольник, а $c(a)$ – его центр.

Прокомментируем кратко основные моменты доказательства леммы 1, так как аналогичные утверждения используются в дальнейшем. Пусть сначала $b = c(a)$. В этом случае рассматриваем разбиение z-сферы на углы S_k, $k = 1, 2, 3$, имеющие вершины в точках b и ∞ и ограниченные лучами, проходящими соответственно через точки -1 и 1, 1 и a, a и -1. Пусть $w_k = f_k(z)$ – отображение угла S_k на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w_k > 0$. На w_k-сфере рассматриваем соответствующую проблему модуля. Пусть $\rho_k(w_k)|d_k|$ – экстремальная метрика этой проблемы модуля, $Q_k(w_k)dw_k^2$ – определяющий эту метрику квадратичный дифференциал. На z-сфере рассматриваем метрику $\rho(z)|dz|$, определяемую условием $\rho(z)|dz| = \rho_k(f_k(z))|f_k'(z)||dz|$ при $z \in S_k$, $k = 1, 2, 3$. Существенным моментом является доказательство, что так построенная метрика оказывается допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(-1, 1, a, b, \infty)$. Это следует из того факта, что при выполнении условий леммы 1 полосообразным областям квадратичных дифференциалов

$-Q_k(w_k)dw_k^2$ при отображениях, обратных к $w_k = f_k(z)$, на z-сфере соответствуют двуугольники с вершинами в соответствующих парах точек из $-1, 1, a, b, \infty$, полностью заполняющие z-сферу и обладающие следующим свойством: каждая кривая, гомотопная на $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1, a, b, \infty\}$ точечной кривой в одной из точек $-1, 1, a, b, \infty$, пересекает противоположные стороны каждого из двуугольников имеющих указанную точку своими общими вершинами, и потому имеет в p-метрике длину $\geqslant 1$. Из допустимости метрики $\rho(z)|dz|$ получаем оценку для $\mathcal{M}(-1, 1, a, b, \infty)$, которая и приводит к утверждению леммы 1. В случае $b \neq c(a)$, $b \in K^{(h)}(a)$ вместо углов S_k рассматриваем двуугольники с вершинами в точках b, ∞ более специального вида и метрику $\rho(z)|dz|$ определяем при помощи несколько более сложной конструкции. При доказательстве допустимости этой метрики, как и в первом случае, существенно используются условия леммы 1.

Нашей ближайшей целью является распространение леммы 1 на другие случаи.

3. Существенную роль в последующем играют дробно-линейные преобразования $z \to f_k(z, a)$, $k = 1, 2, 3$:

$$f_1(z,a) = \frac{2a+1-z}{z+1}, \quad f_2(z,a) = \frac{z+1-2a}{z-1}, \quad f_3(z,a) = \frac{az-1}{z-a}.$$

Каждое из этих преобразований переводит систему $(-1, 1, a, \infty)$ в ту же систему точек. Свойства указанных преобразований указаны в приводимой таблице (через $L(z_1, z_2)$ обозначаем прямую, проходящую через точки z_1, z_2).

	-1	1	a	∞	$C(a)$	$\mathbb{R}$	$L(-1,a)$	$L(1,a)$
$f_1(z,a)$	∞	a	1	-1	$L(1,a)$	$L(-1,a)$	$\mathbb{R}$	$C(a)$
$f_2(z,a)$	a	∞	-1	1	$L(-1,a)$	$L(1,a)$	$C(a)$	$\mathbb{R}$
$f_3(z,a)$	1	-1	∞	a	$\mathbb{R}$	$C(a)$	$L(1,a)$	$L(-1,a)$

В дальнейшем нам потребуются дальнейшие свойства преобразований $f_k(z,a)$, $k = 1, 2, 3$. Достаточно ограничиться преобразованием $z \to f_3(z,a)$.

Пусть

$$a_3^* = \frac{i(1+\sin\beta)}{\cos\beta}$$

– точка пересечения окружности $C = C(a)$ с положительной мнимой полуосью, и пусть C_3^* – окружность, проходящая через точки

$-1, 1, a_3^*$:

$$c_3^* = \{z : |z - a_3^*| = R_3^*\}, \quad R_3^* = |a_3^* \pm 1| = \frac{\sqrt{2(1+\sin\beta)}}{\cos\beta}.$$

Лемма 2. *C_3^* является неподвижной окружностью преобразования $z \to f_3(z,a)$: при указанном преобразовании окружность C_3^* переходит в себя.*

Доказательство. Неподвижными точками преобразования $z \to f_3(z,a)$ служат корни уравнения $z^2 - 2az + 1 = 0$, т.е. точки

$$z_{1,2} = a \mp \sqrt{a^2 - 1}.$$

Нетрудно убедиться, что точки $-1, z_1, 1, z_2$ лежат на окружности C_3^*. Действительно,

$$\begin{aligned} a_3^* - z_1 = a_3^* - (a - \sqrt{a^2-1}) = \frac{1}{\cos\beta}\Big[& i(1+\sin\beta) \\ & - (i\sin\beta + e^{i\varphi}) + e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\sqrt{4\cos\frac{\varphi-\beta}{2}\sin\frac{\varphi+\beta}{2}}\Big] \\ & = \frac{1}{\cos\beta}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\Big[2i\sin\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\big) + \sqrt{2(\sin\varphi+\sin\beta)}\Big], \end{aligned}$$

откуда

$$|a_3^* - z_1| = \frac{1}{\cos\beta}\Big|i\sqrt{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}) + \sqrt{2(\sin\varphi+\sin\beta)}\Big| = R_3^*.$$

Так как z_1, z_2 – неподвижные точки преобразования $z \to f_3(z)$, а точки $-1, 1$ переходят друг в друга при этом преобразовании, то C_3^* является неподвижной окружностью указанного преобразования.

Аналогично определяются неподвижные окружности C_k^* преобразований $z \to f_k(z,a)$, $k = 1, 2$.

Обозначим через $\Delta(-1,1,\infty)$ модулярный треугольник с вершинами в точках $-1, 1, \infty$:

$$\Delta(-1,1,\infty) = \{z : |z| > 1, -1 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z < 0\},$$

$\Delta(-1,1,\infty) = \lim\limits_{h\to\infty}\Delta(-1,1,-ih)$. Для a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, под треугольником $\Delta(a,b,\infty)$ понимаем образ $\Delta(-1,1,\infty)$ при линейном отображении $z \to \frac{1}{2}[(b-a)z+b+a]$, при котором $-1 \to a$, $1 \to b$. Через $K(a,b,\infty)$ обозначаем замыкание $\Delta(a,b,\infty)$.

Пусть $\Gamma_k = \Gamma_k(a)$, $k = 1,2,3$, – окружности, ортогональные окружности $C(a)$ и проходящие соответственно через точки 1 и a, a и -1, -1 и 1. Пусть γ_k – дуга окружности Γ_k, принадлежащая кругу $U(a)$. Дуги γ_1, γ_2, γ_3 образуют границу множества $K^{(h)}(a)$.

Лемма 3. *При отображении $z \to f_3(z,a)$ области $\Delta(-1,1,\infty)$ и $\operatorname{Int} K^{(h)}(-1,1,a)$ переходят друг в друга.*

Действительно, функция $f_3(z) = f_3(z,a)$ отображает полуокружность $\{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ в дугу γ_3, а вертикальные стороны $\Delta(-1,1,a)$ – в дуги γ_1 и γ_2.

В дальнейшем случаи 1) $c(a) \in K(a)$ и 2) $c(a)\overline{\in} K(a)$ рассматриваются отдельно.

4. Пусть $c(a) \in K(a)$.

В силу леммы 1, для доказательства теоремы 2 в этом случае требуется рассмотреть системы $(-1,1,a,b,\infty)$ при условии $b \in U(a) \setminus K^{(h)}(a)$.

Множество $U(a) \setminus K^{(h)}(a)$ состоит из трех двуугольников D_k, $k = 1,2,3$, границей области D_k служат дуга γ_k и дуга окружности $C(a)$, соединяющая ее концы. В рассматриваемом случае каждая из областей D_k, $k = 1,2,3$, разделяется соответствующим из отрезков $[1,a]$, $[a,-1]$ и $[-1,1]$ на двуугольники D_k^- и D_k^+, где D_k^- имеет одной из своих сторон соответствующую дугу окружности $C(a)$, а D_k^+ имеет одной из своих сторон дугу γ_k.

Пусть множества $\Pi_k \subset D_k^-$, $k = 1,2,3$, – замкнутые четырехугольники, определяемые следующим образом. Π_3 имеет одной парой сторон отрезки $[-1,b_3^*]$ и $[b_3^*,1]$, где b_3^* является концом диаметра круга $U(a)$, противоположным точке a, а другой парой сторон – дуги граничных полуокружностей модулярных треугольников $\Delta(-1,a,\infty)$ и $\Delta(a,1,\infty)$, принадлежащих области D_k^-. Четырехугольники Π_1 и Π_2 определяются аналогичным образом. Имеем

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= \{K(-1,a,\infty) \cap K(a,1,\infty)\},\\ \Pi_1 &= \{K(1,-1,\infty) \cap K(-1,a,\infty)\},\\ \Pi_2 &= \{K(a,1,\infty) \cap K(1,-1,\infty)\}\end{aligned} \tag{5}$$

(см. рис. 1).

Следующая лемма дополняет лемму 1.

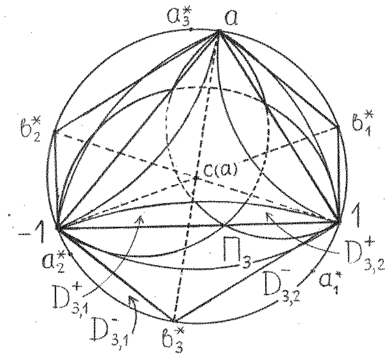

Рис. 1.

Лемма 4. *Пусть* $c(a) \in K(a)$ *и пусть*

$$b \in \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3.$$

Тогда система $\{-1, 1, a, b, \infty\}$ *не является экстремальной.*

Доказательство. Пусть, для определенности $b \in \Pi_3$. Тогда каждый из треугольников $\Delta(-1, b, a)$ и $\Delta(a, b, 1)$ является остроугольным или прямоугольным. При этом точка -1 лежит внутри модулярного треугольника $\Delta(b, a, \infty)$ или же точка 1 лежит внутри модулярного треугольника $\Delta(b, a, \infty)$. В первом из этих случаев переобозначим точки $a, b, 1$ соответственно через $-1, 1, a'$, а точку -1 – через b'. По лемме 3, при отображении $z \to f_3(z, a')$ точке b' соответствует точка $\tilde{b}$, принадлежащая множеству $K^{(h)}(-1, 1, a')$. По лемме 1, система $(-1, 1, a', \tilde{b}, \infty)$, а потому и исходная система $(-1, 1, a, b, \infty)$, не являются экстремальными. Во втором случае рассуждение полностью аналогично.

Обозначим через $D_{3,1}^-$ и $D_{3,2}^-$ подмножества области D_3^-, представляющие собой сегменты круга $U(a)$, имеющие своими хордами соответственно отрезки $[-1, b_3^*]$ и $[b_3^*, 1]$. Четырехугольник Π_3, двуугольники $D_{3,1}^-$, $D_{3,2}^-$ и образы этих двуугольников при отображении $z \to f_3(z, a)$ заполняют область D_3^-. Пусть $D_{k,1}^-$ и $D_{k,2}^-$, $k = 1, 2$, – подмножества области D_k^-, определяемые точно так же как $D_{3,1}^-$ и $D_{3,2}^-$. По лемме 4, для доказательства теоремы 2 в случае $b \in \bigcup\limits_{k=1}^{3} D_k^-$ достаточно рассматривать системы $\{-1, 1, a, b, \infty\}$,

где
$$b \in \bigcup_{k=1}^{3} [D^-_{k,1} \cup D^-_{k,2}]. \tag{6}$$

Пусть теперь $b \in \bigcup\limits_{k=1}^{3} D^+_k$. Для определенности, пусть $b \in D^+_3$. Обозначим через $D^+_{3,1}$ и $D^+_{3,2}$ подобласти двуугольника D^+_3, принадлежащие соответственно модулярным треугольникам $\Delta(a,1,\infty)$ и $\Delta(-1,a,\infty)$. Если $b \in D^+_{3,1}$, то рассмотрим треугольник $\Delta(b,a,1)$ и окружность $C(b,a,1)$. Пусть $z \to w$ – линейное преобразование, при котором точки 1 и a переходят соответственно в -1 и 1, а точки b и -1 – в b' и a'_3, $\operatorname{Im} b' > 0$, $\operatorname{Im} a'_3 > 0$. Треугольник $\Delta(-1,1,b')$ остроугольный и при отображении $w \to f_1(w,b')$ (или $w \to f_2(w,b')$) точке a'_3 соответствует точка a''_3, принадлежащая области $D^-_3(b')$, построенной для точек $(-1,1,b')$. Следовательно, указанный случай сводится к рассмотренному выше. Случай $b \in D^+_3$ исследуется совершенно аналогично. Пусть теперь $b \in \Delta^0_3$, где $\Delta^0_3 = D^+_3 \setminus \{\bar{D}^+_{3,1} \cup \bar{D}^+_{3,2}\}$. В этом случае посредством описанного выше построения приходим к системе точек $\{-1,1,b',a''_3,\infty\}$, для которой $\Delta(-1,1,b')$ – тупоугольный треугольник, $\operatorname{Im} b' > 0$, $a''_3 \in U^-(-1,1,b')$. В случае $b \in \Delta^0_3$ можно также рассмотреть окружность $C(-1,1,b)$ и треугольник $\Delta(-1,1,b)$. При суперпозиции преобразований из группы Γ система $\{-1,1,a,b,\infty\}$ переходит в $\{1,-1,\tilde{b},\infty,\tilde{a}\}$, где $\operatorname{Im} \tilde{b} > 0$, $\Delta(-1,1,\tilde{b})$ – тупоугольный треугольник, $\tilde{a} \in K^{(h)}(-1,1,\tilde{b})$. Такие системы точек рассматриваются в следующем параграфе.

5. Пусть $c(a)\overline{\in} K(a)$.

В этом случае исследование значительно отличается от предыдущего. Пусть
$$U^+(a) = \{z : z \in U(a), \operatorname{Im} a > 0\}, U^-(a) = \{z : z \in U(a), \operatorname{Im} a < 0\}.$$

Начнем со случая $b \in U^-(a)$. (В предыдущих обозначениях $U^-(a) = D^-_3(a)$.) Как и выше, пусть множество Π_3 определено в (5). Пусть $\varphi := \arg\{a - c(a)\}$, $\varphi \in (\beta, \pi/2]$ (пользуемся обозначениями п. 2). Пусть $\varphi_0 = \varphi_0(\beta)$ – решение уравнения
$$\cos\beta(\cos\beta - \cos\varphi) - 2(1-\sin\beta)(1-\sin\varphi) = 0, \quad \beta < \varphi_0 < \pi/2.$$

Нетрудно убедиться, что при $\varphi > \varphi_0$ множество Π_3 связно и ограничено шестью аналитическими дугами, при $\varphi < \varphi_0$ это множество состоит из двух компонент связности. Справедлива

Лемма 4′. *Пусть* $c(a)\overline{\in}K(-1,1,a)$, $b \in \Pi_3$. *Тогда система* $\{-1,1,a,b,\infty\}$ *является экстремальной только в случае*

$$\{-1,1,a,b,\infty\} = \{-1,1,i/\sqrt{3},-i/\sqrt{3},\infty\}.$$

Доказательство этой леммы повторяет доказательство леммы 4. Утверждение об экстремальной системе точек следует из леммы 1. Указанная система соответствует экстремальной системе точек леммы 1 при преобразовании $z \to f_3(w,-i\sqrt{3})$, $w = i\sqrt{3}z$.

Пусть D_k^-, $k = 1,2,3$, – двуугольники в круге $U(a)$, определенные в п. 4, $D_3^- = U^-(a)$. Неподвижная окружность $C_k^*(a)$, $k = 1,2,3$, разделяет область D_k^- на две области, переходящие друг в друга при отображении $z \to f_k(z,a)$. Ту из указанных областей, граница которой содержит дугу окружности $C(a)$, обозначим через D_k^*.

Пусть $b \in U^-(a)\backslash\Pi_3$. Тогда достаточно считать, что $b \in D_3^*\backslash\Pi_3$. Пусть при этом $b \in K(-1,1,\infty)$. Треугольник $\Delta(-1,1,b)$ является остроугольным. При преобразовании $z \to w = -z$ треугольнику $\Delta(-1,1,b)$ и точке a соответствуют треугольник $\Delta(-1,1,-b)$ и точка $a' = -a$, принадлежащая области $D_3^-(-b)$, построенной для окружности $C(-1,1,-b)$, и мы приходим к случаю, рассмотренному в п. 4. Таким образом, в случае $b \in U^-(a)$ достаточно ограничиться рассмотрением случая

$$b \in D_3^* \setminus \{\Pi_3 \cup K(-1,1,\infty)\}. \tag{7}$$

В случае $\varphi \geqslant \varphi_0(\beta)$ указанное множество состоит из четырех областей, две из которых имеют своими сторонами дуги полуокружности $\Gamma_3^*(a) == \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$, , а две другие представляют собой сегменты круга $U(a)$, имеющие своими хордами соответственно отрезки $[-1,-1-2i\operatorname{tg}\beta]$ и $[1,1-2i\operatorname{tg}\beta]$ (см. рис. 2). Отметим, что среди точек, удовлетворяющих условию (7), имеются те, для которых треугольник $\Delta(-1,a,b)$ или $\Delta(1,a,b)$ является остроугольным, и применимы рассуждения п. 4.

Пусть теперь $b \in U^+(a)$. Если $b \in K(-1,1,a)$ то рассмотрим треугольник $\Delta(-1,1,b)$. Точка a лежит внутри угла, образованного прямыми $L(-1,b)$ и $L(1,b)$ и при отображении $z \to f_1(z,b)$

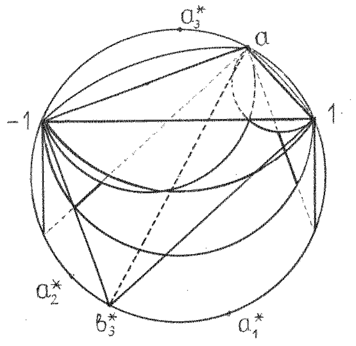

Рис. 2.

точке a соответствует точка $a' \in U^-(b)$, и мы приходим к предыдущему случаю. Если $b \in U^+(a) \setminus K(-1,1,a)$, т.е. $b \in D_1^-(a) \cup D_2^-(a)$, то достаточно считать, что

$$b \in D_1^*(a) \cup D_2^*(a). \tag{8}$$

Итак, доказана

Лемма 5. *Для доказательства теоремы* 2 *достаточно показать, что каждая из систем точек* $\{-1,1,a,b,\infty\}$, *удовлетворяющих условию* (4) *и одному из следующих условий:*

1) $c(a) \in K(a)$ *и выполнено условие* (6),

2) $c(a) \overline{\in} K(a)$ *и выполняется условие* (7) *или* (8),

не реализует максимума конформного инварианта $J(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$.

6. Предыдущие леммы показывают, что для доказательства теоремы 2 требуется рассмотреть системы $(-1,1,a,b,\infty)$, где точка $b \in U(-1,1,a)$ и достаточно близка к окружности $C(-1,1,a)$. Для этой цели удобно воспользоваться преобразованием

$$z \to \frac{1}{z\cos\beta - i\sin\beta},$$

при котором окружность $C(-1,1,a)$ переходит в единичную окружность, а система $(-1,1,a,b,\infty)$ переходит в систему $(0,a_1,$ a_2, a_3, $a_4)$, где a_1, a_2, a_3 – точки окружности $|z|=1$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $a_0 = 0$, a_1, a_2, a_3 – *точки окружности* $|z| = 1$, $|a_4| = \rho > 0$,

$$\arg\{a_{k+1}/a_k\} = 2\pi\,\lambda_k, \quad k = 1,2,3,4 \quad (\textit{здесь} \quad a_5 = a_1),$$

где

$$0 < \lambda_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1. \tag{9}$$

Для конформного инварианта

$$\log J = 2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \ldots a_4; 1, 1, \ldots, 1) - \frac{1}{2}\log \prod_{0\leqslant k<l\leqslant 4} |a_k - a_l| \tag{10}$$

справедливо неравенство

$$\log J \leqslant \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) + \Delta_1(\lambda_3, \lambda_4, \rho),$$

где

$$\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \sum_{k=1}^{4} \big\{(2 + 2\,\lambda_k^2)\log 2 + (1 + 2\,\lambda_k^2)\log \lambda_k$$
$$-(1-\lambda_k)^2\log(1-\lambda_k) - (1+\lambda_k)^2\log(1+\lambda_k)\big\}$$
$$-\frac{1}{2}\log\{64\sin\pi\,\lambda_1\sin\pi\,\lambda_2\sin\pi\,\lambda_3\sin\pi\,\lambda_4\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2)\sin\pi(\lambda_1+\lambda_4)\},$$
$$\Delta_1(\lambda_3, \lambda_4, \rho) = \frac{1}{2}\{(2 - 4\,\lambda_3^2)\log G(\sqrt{r_3}) + (2 - 4\,\lambda_4^2)\log G(\sqrt{r_4})$$
$$+(\lambda_3 + \lambda_4 - \frac{1}{2})\log\rho\} - \frac{1}{4}\left\{\log\left(1 + \frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\pi\,\lambda_3}\right)\right.$$
$$\left.+\log\left(1 + \frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\pi\,\lambda_4}\right) + \log\left(1 + \frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\pi(\lambda_3+\lambda_4)}\right)\right\}.$$

Здесь $r_k = \rho^{1/(2\,\lambda_k)}$, $k = 3, 4$; $G(t) = \frac{1}{2}(t + 1/t)$ – *функция Жуковского.*

Доказательство. Пусть S_k – угол с вершиной в начале координат, стороны которого проходят через точки a_k, a_{k+1}:

$$S_k = \{z : \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Пусть

$$w_k = f_k(z) = \{ze^{-i\arg a_k}\}^{1/(2\,\lambda_k)}$$

– отображение угла S_k на полуплоскость $\operatorname{Im} w_k > 0$. На w_k-сфере рассмотрим задачу о величине

$$\mathcal{M}(0, -1, r_k; 2\,\lambda_k\, 1, 1), = \mathcal{M}(0, 1, -r_k; 2\,\lambda_k, 1, 1),$$

где $r_k > 0$. Пусть $\rho_k(w_k)|dw_k|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей эту величину. Пусть метрика $\tilde{\rho}(z)|dz|$ определяется условием:

$$\tilde{\rho}(z)|dz| = \begin{cases} \rho_k(f_k(z))|f_k'(z)||dz| & \text{при} \quad z \in S_k, k = 1, \dots, 4, \\ 0 \quad \text{в остальных точках} & \overline{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Рассуждения, неоднократно использовавшиеся в предыдущих работах автора, показывают, что $\tilde{\rho}(z)|dz|$ является допустимой метрикой проблемы модуля $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_4; 1, 1, \dots, 1)$. Действительно, из простых геометрических соображений следует, что каждая кривая на $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, a_1, \dots, a_4\}$, гомотопная точечной окружности с центром в начале координат, имеет в $\tilde{\rho}$-метрике длину $\geqslant 1$, и каждая кривая на $\overline{\mathbb{C}}'$, гомотопная точечной окружности с центром в одной из точек $a_1, \dots, a_4$, имеет в $\tilde{\rho}$-метрике длину, удовлетворяющую тому же неравенству. Пусть $\rho^*(z)|dz|$ – экстремальная метрика указанной проблемы модуля. Учитывая упомянутое свойство $\tilde{\rho}$-метрики, получаем:

$$\begin{aligned} 2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_4; 1, 1, \dots, 1) &= 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \underset{\rho^*}{\text{площадь}} \overline{\mathbb{C}}(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi} \cdot 5 \log \varepsilon \Big\} \\ &\leqslant 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^{4} \Big\{ \underset{\rho^*}{\text{площадь}} S_k(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi} (\lambda_k \log \varepsilon + \log \varepsilon) \Big\} \\ &= 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^{4} \Big\{ \underset{\tilde{\rho}}{\text{площадь}} f_k(S_k(\varepsilon)) + \frac{1}{2\pi} (\lambda_k + 1) \log \varepsilon \Big\} \end{aligned}$$

(здесь, как обычно, $\overline{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ и $S_k(\varepsilon)$ получаются из $\overline{\mathbb{C}}$ и S_k удалением ε-окрестностей отмеченных точек). Отсюда, учитывая значения $|f_k'(z)|$ в точках a_k и a_{k+1}, находим:

$$\begin{aligned} 2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_4; 1, 1, \dots, 1) \leqslant \pi \{ &\mathcal{M}(0, -1, 1; 2\,\lambda_1, 1, 1) \\ &+ \mathcal{M}(0, -1, 1; 2\,\lambda_2, 1, 1) + \mathcal{M}(0, -1, r_3; 2\,\lambda_3, 1, 1) \\ + \mathcal{M}(0, -1, r_4, 2\,\lambda_4, 1, 1) \} &+ \sum_{k=1}^{4} \log(2\,\lambda_k) - \frac{1}{2} \Big(\frac{1}{2\,\lambda_3} + \frac{1}{2\,\lambda_4} - 2 \Big) \log \rho, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$r_k = \rho^{1/(2\,\lambda_k)}, \quad k = 3, 4. \tag{12}$$

Для упрощения полученного выражения рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$\tilde{f}(w) = \frac{(r+1)w}{2r + (r-1)w},$$

переводящее точки $0, -1, r$ соответственно в $0, -1, 1$. Учитывая равенства

$$\tilde{f}'(0) = \frac{r+1}{2r}, \quad \tilde{f}'(-1) = \frac{2r}{r+1}, \quad \tilde{f}'(r) = \frac{2}{r(r+1)},$$

получаем

$$\pi\mathcal{M}(0, -1, r; 2\,\lambda, 1, 1) = \pi\mathcal{M}(0, -1, 1; 2\,\lambda, 1, 1) \\ -\frac{1}{2}\big\{4\,\lambda^2 \log\frac{r+1}{2r} + \log\frac{4}{(r+1)^2}\big\}.$$

Отсюда и из (11), (12) находим

$$2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \ldots, a_4; 1, 1, \ldots, 1) \\ \leqslant \sum_{k=1}^{4}\{\pi\mathcal{M}(0, -1, 1; 2\,\lambda_k, 1, 1) + \log(2\,\lambda_k)\} - \frac{1}{2}\Delta,$$

где

$$\Delta = \big(\frac{1}{2\,\lambda_3} + \frac{1}{2\,\lambda_4} - 2\big)\log\rho + (4\,\lambda_3^2 - 2)\log\frac{r_3+1}{2} \\ +(4\,\lambda_4^2 - 2)\log\frac{r_4+1}{2} - 4\,\lambda_3^2\log r_3 - 4\,\lambda_4^2\log r_4. \tag{13}$$

Используя равенство $\frac{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos 2a}}{2\sin\alpha} = \sqrt{\rho\big(1+\frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\alpha}\big)}$, находим

$$\prod_{0\leqslant k<l\leqslant 4}|a_k - a_l| = \rho^{5/2}\cdot 64\sin\pi\,\lambda_1\cdot\sin\pi\,\lambda_2\cdot\sin\pi\,\lambda_3 \\ \cdot\sin\pi\,\lambda_4\cdot\sin\pi(\lambda_4+\lambda_2)\sin\pi(\lambda_1+\lambda_4) \\ \times\left\{\left(1+\frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\pi\,\lambda_3}\right)\left(1+\frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\pi\,\lambda_4}\right)\left(1+\frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\pi(\lambda_1+\lambda_4)}\right)\right\}^{1/2}. \tag{14}$$

Используя известное выражение для $\mathcal{M}(0,-1,1;2\lambda,1,1)$, $\lambda \leqslant 1$ (см., например, [7]), в результате несложных преобразований из (9), (13) и (14) получаем неравенство для $\log J$, указанное в формулировке теоремы.

Теорему 3 дополняет

Теорема 3$'$. *Пусть $a_0 = 0$, точки a_1, a_2, a_3, a_4 перенумерованы в порядке возрастания их аргументов, $|a_1| = |a_3| = 1$, $|a_2| = |a_4| = \rho > 0$ и числа λ_k, $k = 1,2,3,4$, удовлетворяют условиям (9). Тогда для конформного инварианта (10) справедливо неравенство*

$$\log J \leqslant \mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) + \Delta_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\rho),$$

где функция $\mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ определена в теореме 3,

$$\Delta_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\rho) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}(2-4\,\lambda_k^2)\log G(\sqrt{r_k})$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\log\left(1+\frac{G(\rho)-1}{2\sin^2\pi\,\lambda_k}\right),$$

$$r_k = \rho^{1/(2\,\lambda\,k)}, \quad k = 1,2,3,4; \quad G(t) = \frac{1}{2}(t+1/t).$$

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание. Теоремы 3 и 3$'$ в частном случае $\rho = 1$ были получены в [4]. Исследование свойств функции $\mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ показало [4], что в случае $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$ при $k = 1,\dots,4$, имеем неравенство

$$\log J(0,a_1,\dots,a_4) \leqslant \mathcal{F}(\lambda_1,\dots,\lambda_4)$$
$$\leqslant \mathcal{F}(1/4,\dots,1/4) < \log J(0,1,e^{2\pi i/3},e^{-2\pi i/3},\infty),$$

и равенство $J(0,a_1,\dots,a_4) = \mathcal{F}(1/4,\dots,1/4)$ достигается только в случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 1/4$, т.е. только для равноотстоящих точек a_k на окружности $|z| = 1$.

Таким образом, системы вида $\{-1,1,a,b,\infty\}$, где значения $|a|$ и $|b|$ достаточно близки к 1, не реализуют максимума $J(a_1,\dots,a_5)$.

Естественно, для успешного использования теорем 3 и 3$'$ в ряде случаев требуется предварительно применить к рассматриваемой системе точек дробно-линейное отображение. рассуждения такого рода неоднократно использовались в предыдущих доказательствах.

7. Теоремы 3 и 3′ показывают, что если точка b достаточно близка к одной из точек $-1, 1, a$, то система $\{-1, 1, a, b, \infty\}$ не является экстремальной. Последний факт можно установить и более непосредственно, используя классические неравенства для произведения конформных радиусов. Ограничимся одним случаем.

Пусть по-прежнему $\{-1, 1, a, b\infty\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$, $\{D_1, D_2, \ldots, D_5\}$ – допустимое семейство областей рассматриваемой задачи, $a_k \in D_k$, $R(D_k, a_k)$ будем обозначать через $R(a_k)$. Пусть точка b достаточно близка к точке 1. По неравенству Лаврентьева

$$R(1)R(b) \leqslant |b-1|^2,$$

а по неравенству Голузина

$$\frac{R(-1)R(a)}{R(\infty)} \leqslant \frac{64}{81\sqrt{3}}|a+1|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J &= \frac{R(-1)R(1)R(a)R(b)}{R(\infty)\{2|(a^2-1)(b^2-1)(a-b)|\}^{1/2}} \\ &\leqslant 0,3226\left|\frac{(b-1)^3(a+1)}{(b+1)(a-1)(a-b)}\right|^{1/2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Полагая

$$b = 1 + \varepsilon\, e^{i\psi}, \varepsilon > 0, \psi \quad \text{вещественное},$$

$$a = i\operatorname{tg}\beta + \frac{e^{i\varphi}}{\cos\beta}, \quad \beta \geqslant 0, \beta < \varphi < \pi - \beta,$$

находим

$$|a+1| = |1 + i\operatorname{tg}\beta + \frac{e^{i\varphi}}{\cos\beta}| = \frac{1}{\cos\beta}|e^{i\varphi} + e^{i\beta}| = \frac{2}{\cos\beta}\cos\frac{\varphi-\beta}{2},$$

$$|a-1| = |-1 + i\operatorname{tg}\beta + \frac{e^{i\varphi}}{\cos\beta}| = \frac{2}{\cos\beta}\sin\frac{\varphi+\beta}{2},$$

$$|b+1| \geqslant 2 - \varepsilon,$$

$$|a-b| \geqslant |a-1| - \varepsilon = \frac{2}{\cos\beta}\sin\frac{\varphi+\beta}{2} - \varepsilon\,.$$

Отсюда и из (15) получаем что для справедливости неравенства

$$J < J_5 = 0,08656$$

достаточно выполнения условия $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\varphi, \beta)$, где $\varepsilon(\varphi, \beta)$ – решение уравнения

$$\frac{\varepsilon^3 \cos[(\varphi - \beta)/2] \cos\beta}{\sin[(\varphi + \beta)/2](2\sin[(\varphi + \beta)/2] - \varepsilon\cos\beta)(2 - \varepsilon)} - 0,072 = 0. \qquad (16)$$

Обозначим функцию в левой части (16) через $F(\varphi, \beta, \varepsilon)$. Эта функция, как функция от φ, убывает в промежутке $[\beta, \pi - \beta]$. Таким образом, для справедливости неравенства $J < J_5$ при $\beta > 0$ достаточно выполнения неравенства $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\beta)$, где $\varepsilon(\beta)$ – решение уравнения $F(\beta, \beta, \varepsilon) = 0$. Заметим наконец, что случай, когда точка b принадлежит окрестности точки -1, сводится к предыдущему: для справедливости неравенства $J < J_5$ при всех $|b+1| \leqslant \varepsilon$ достаточно выполнения условия $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\varphi, \beta)$, где $\varepsilon_1(\varphi, \beta)$ – решение уравнения $F_1(\varphi, \beta, \varepsilon) := F(\pi - \varphi, \beta, \varepsilon) = 0$. Функция $F_1(\varphi, \beta, \varepsilon)$ возрастает в промежутке $[\beta, \pi - \beta]$, максимум этой функции достигается при $\varphi = \pi - \beta$ и равен $F(\beta, \beta, \varepsilon)$. Таким образом, доказана

Лемма 6. *Пусть $\beta \geqslant 0$, $\beta < \varphi < \pi - \beta$, и пусть*

$$a = i\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{\cos\beta}e^{i\varphi}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $F(\varphi, \beta, \varepsilon)$ – функция в левой части (16). Пусть выполнено одно из условий:

1) $|b-1| \leqslant \varepsilon(\varphi, \beta)$, где $\varepsilon(\varphi, \beta)$ – решение уравнения $F(\varphi, \beta, \varepsilon) = 0$,

2) $|b+1| \leqslant \varepsilon_1(\varphi, \beta)$, где $\varepsilon_1(\varphi, \beta)$ – решение уравнения $F_1(\varphi, \beta, \varepsilon) := \mathcal{F}(\pi - \varphi, \beta, \varepsilon) = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$J(-1, 1, a, b, \infty) < J_5.$$

Это же неравенство имеет место и в каждом из случаев

$$|b-1| \leqslant \varepsilon(\beta) \quad \text{или} \quad |b+1| \leqslant \varepsilon(\beta),$$

где $\varepsilon(\varphi)$ – решение уравнения $F_2(\beta, \varepsilon) := F(\beta, \beta, \varepsilon) = 0$.

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 48–66.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49** вып. 1 (1994), 3–76.
3. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II*, Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
4. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 72–95.
5. В. Н. Дубинин, *О максимуме одного конформного инварианта*, Препринт ДВО АН СССР. Ин-т прикладной мат., Владивосток, 1990.
6. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы*, I, II. Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 253–275; **286** (2002), 126–147.
7. Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 52–67.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 15 ноября 2004 г.