Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Н. Н. Мануйлов

ПРЯМЫЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ НА ОДНОМЕРНОМ ТОРЕ

Введение

Пусть $I_0 = [0, 1)$ – единичной полуинтервал. Отождествим его с окружностью. Рассмотрим на ней орбиту $O_0(\alpha)$ – последовательность, порождаемую начальной точкой $x_0 = 0$ и сдвигом на иррациональный вектор α: $x_{n+1} = x_n + \alpha \bmod 1$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

На полуинтервалах

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_\ell \supset I_{\ell+1} \supset \dots$$

вида $[\varepsilon_\ell, 1)$, где $\varepsilon_0 = 0$ и $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_\ell < \dots$ – последовательность чисел, связанных с α, производная $d^m O_0(\alpha)$ при $m = 0, 1, 2, \dots$ определяется как подпоследовательность элементов $O_0^{(m)}(\alpha) = O_0(\alpha) \cap I_m$, пронумерованных в порядке попадания их в полуинтервал I_m. Очевидно, что все точки $x_n^{(m)}$ орбиты $O_0^{(m)}(\alpha)$ содержатся в $O_0(\alpha)$.

Из последнего свойства орбит $O_0^{(m)}(\alpha)$ следует существование прямой перенормировки $R_m(\alpha, i)$: вложения множества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ в себя, удовлетворяющего условию

$$x_i^{(m)} = x_{R_m(\alpha,i)}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$.

В. Г. Журавлевым в [1] рассмотрен случай $\alpha = \tau_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В качестве полуинтервалов выбраны

$$I_m = [1 - \tau_1^{-m}, 1), \qquad \text{где} \qquad m = 0, 1, 2, \dots$$

Для перенормировки $R_m(\tau_1, i)$ при $m \equiv 0 \bmod 2$ имеет место явная формула

$$R_m(\tau_1, i) = iF_{m+1} + ([i\tau_1^{-1}] + 1)F_m,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00368).

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа и F_m, F_{m+1} – числа Фибоначчи.

В теореме 3.1 данной работы с помощью разбиения окружности на основе подстановки полуинтервалов доказан общий результат о перенормировках. При этом в определении перенормировок участвуют числовые последовательности – количества полуинтервалов в разбиении окружности. Как следствие, получено обобщение результатов в [1] на класс квадратичных иррациональностей τ_g вида $\tau_g = \frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$, где $g = 1, 2, 3, \ldots$ Для производных $d^m O_0(\tau_g)$ с ограничивающими полуинтервалами

$$I_m = [1 - \tau_g^{-([m/g]+1)}(\tau_g - (m \bmod 2g)), 1), \ m \equiv 0, \ldots g-1 \bmod 2g,$$

в теореме 4.1 доказан следующий результат: перенормировки $R_m(\tau_g, i)$ вычисляются по формуле

$$R_m(\tau_g, i) = \left(F^{a+1(g)}_{[m/g]+2} - F^{g(g)}_{[m/g]+1}\right)\left(\left[\frac{1}{\tau_g - a} i\right] + 1\right) + iF^{g(g)}_{[m/g]+1},$$

где $m \equiv a \bmod g$, $a = 0, \ldots g-1$, а последовательности $\{F^{k(g)}_n\}$ определены с помощью рекуррентных соотношений

$$F^{k(g)}_{n+2} = gF^{k(g)}_{n+1} + F^{k(g)}_n, \ F^{k(g)}_1 = 1, \ F^{k(g)}_2 = k,$$

для $1 \leqslant k \leqslant g$ и $n \geqslant 1$.

1. Разбиения окружности

Отождествим единичный полуинтервал $I_0 = [0, 1)$ с окружностью. Зададим на I_0 разбиения $CTil_\alpha(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, по правилам:

$$CTil_\alpha(0) = G^0_0(\alpha) \oplus E^0_0(\alpha) = [0, \{\alpha\}) \oplus [\{\alpha\}, 1),$$

$\{\cdot\}$ – дробная часть, $\oplus$ – некоммутативная операция прикладывания полуинтервалов. Индукционный переход от $CTil_\alpha(m)$ к $CTil_\alpha(m+1)$ происходит с помощью подстановок

$$\begin{aligned} &G^m_i(\alpha) \longrightarrow G^{m+1}_{i+\sharp E^m(\alpha)}(\alpha), \\ &E^m_j(\alpha) \longrightarrow G^{m+1}_j(\alpha) \oplus E^{m+1}_j(\alpha), \end{aligned} \tag{1}$$

если $|G_i^m(\alpha)| < |E_j^m(\alpha)|$, и

$$\begin{aligned} &G_i^m(\alpha) \longrightarrow E_{i+\sharp E^m(\alpha)}^{m+1}(\alpha) \oplus G_i^{m+1}(\alpha), \\ &E_j^m(\alpha) \longrightarrow E_j^{m+1}(\alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

если $|E_j^m(\alpha)| > |G_i^m(\alpha)|$, где $\sharp G^m(\alpha)$, $\sharp E^m(\alpha)$ – количества полуинтервалов $G_i^m(\alpha)$, $E_j^m(\alpha)$ в разбиении $CTil_\alpha(m)$, а на индексы i, j наложены условия

$$0 \leqslant i < \sharp G^m(\alpha), \ 0 \leqslant j < \sharp E^m(\alpha).$$

Из определения подстановок полуинтервалов нетрудно заметить, что два крайних правых полуинтервала разбиения $CTil_\alpha(m)$ – это $G_0^m(\alpha)$ и $E_0^m(\alpha)$. Причем эти полуинтервалы приложены друг к другу:

$$CTil_\alpha(m) = G_0^m(\alpha) \oplus E_0^m(\alpha).$$

Полученные разбиения в случае некоторых квадратичных иррациональностей являются геометрическими аналогами так называемых цепей Фибоначчи [2] с той лишь разницей, что каждый полуинтервал разбиения $CTil_\alpha(m)$ имеет свой индекс, определяющий его положение на окружности единичной длины. Данные разбиения обладают рекуррентными свойствами, позволяющими строить их не с помощью подстановочных конструкций, а используя прикладывание одного разбиения к другому [4].

В координатах, согласно [5], полуинтервалы $G_i^m(\alpha)$ и $E_j^m(\alpha)$ можно записать как

$$\begin{aligned} &G_i^m(\alpha) = [\{(\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha) - i)\alpha\}, \ \{(\sharp G^m(\alpha) - i)\alpha\}), \\ &E_j^m(\alpha) = [\{(\sharp G^m(\alpha) - j)\alpha\}, \ \{-j\alpha\}). \end{aligned} \tag{3}$$

Так же в работе [5] показано, что длины полуинтервалов $G_i^m(\alpha)$, $E_j^m(\alpha)$ вычисляются с помощью формул

$$|G_i^m(\alpha)| = g^m(\alpha) = \{\sharp E^m(\alpha)\alpha\}, \ |E_i^m(\alpha)| = e^m(\alpha) = 1 - \{\sharp G^m(\alpha)\alpha\}.$$

В дополнение к $CTil_\alpha(m)$ введем разбиения $CTil_\alpha^+(m)$, получаемые по индукции с помощью тех же подстановок (1), (2), но из другого нулевого разбиения:

$$CTil_\alpha^+(0) = E_1^0(\alpha) \oplus G_1^0(\alpha) = [0, 1 - \{\alpha\}) \oplus [1 - \{\alpha\}, 1).$$

Разбиение $CTil_\alpha^+(m)$ так же состоит из полуинтервалов $G_i^m(\alpha)$, $E_j^m(\alpha)$ с условиями на индексы

$$0 < i \leqslant \sharp G^m(\alpha),\ 0 < j \leqslant \sharp E^m(\alpha).$$

Крайними правыми полуинтервалами в разбиении $CTil_\alpha^+(m)$ будут $E^m_{\sharp E^m(\alpha)}(\alpha)$ и $G^m_{\sharp G^m(\alpha)}(\alpha)$, приложенные друг к другу:

$$E^m_{\sharp E^m(\alpha)}(\alpha) \oplus G^m_{\sharp G^m(\alpha)}(\alpha).$$

Посмотрим как действует сдвиг

$$S:\ x \longmapsto S(x) = x - \alpha \bmod 1$$

на все разбиение $CTil_\alpha(m)$. Согласно (3), сдвиг S переводит $G_i^m(\alpha)$ в $G_{i+1}^m(\alpha)$, $E_j^m(\alpha)$ в $E_{j+1}^m(\alpha)$. Теперь становится очевидным, что

$$CTil_\alpha^+(m) = S(CTil_\alpha(m)).$$

Выберем в качестве α квадратичную иррациональность $\tau_g = \frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$, где $g = 1, 2, 3, \ldots$ Рассмотрим g последовательностей

$$\begin{aligned}\{F_n^{1(g)}\} =&\{1, 1, \ldots\},\\ \{F_n^{2(g)}\} =&\{1, 2, \ldots\},\\ &\ldots\\ \{F_n^{g-1(g)}\} =&\{1, g-1, \ldots\},\\ \{F_n^{g(g)}\} =&\{1, g, \ldots\},\end{aligned}$$

вычисляемых с помощью рекуррентных соотношений

$$F_{n+2}^{i(g)} = gF_{n+1}^{i(g)} + F_n^{i(g)}$$

для $i \in \{1, \ldots, g\}$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ С помощью индукции можно доказать, что последовательности $\{F_n^{i(g)}\}$ обладают следующими свойствами:

$$F_{n+1}^{i+1(g)} = F_{n+1}^{i(g)} + F_n^{g(g)}, \quad i \in \{1, \ldots, g-1\},$$

$$F_{n+2}^{1(g)} = F_{n+1}^{g(g)} + F_n^{g(g)},$$

$$\tau_g^{-n}(\tau_g - i) = (-1)^n(F_{n+1}^{i(g)}\tau_g - F_{n+2}^{i(g)}), \quad i \in \{1, \ldots, g\}.$$

Вопрос о последовательностях, образованных из количеств однотипных полуинтервалов разбиения $CTil_\alpha(m)$ при произвольном иррациональном α, остается открытым, но для случая $\alpha = \tau_g$ с помощью подстановок (1), (2) и соотношений для $\{F_n^{i(g)}\}$ можно показать, что

1) количество полуинтервалов определяется формулами

$$\sharp G^m(\tau_g) = F_{[m/g]+2}^{(m+1)\mathrm{mod}\, g(g)}, \ \sharp E^m(\tau_g) = F_{[m/g]+1}^{g(g)} \tag{4}$$

при $m \equiv 0, \ldots, g-1 \bmod 2g$ и

$$\sharp G^m(\tau_g) = F_{[m/g]+1}^{g(g)}, \ \sharp E^m(\tau_g) = F_{[m/g]+2}^{(m+1)\mathrm{mod}\, g(g)} \tag{5}$$

при $m \equiv g, \ldots, 2g-1 \bmod 2g$, где $[\cdot]$ – целая часть числа;

2) длины полуинтервалов разбиения $CTil_\alpha(m)$ вычисляются по формулам

$$g^m(\tau_g) = \tau_g^{-([m/g]+1)}, \ e^m(\tau_g) = \tau_g^{-([m/g]+1)}(\tau_g - (m \bmod g) - 1), \tag{6}$$

если $m \equiv 0, \ldots, g-1 \bmod 2g$, и

$$g^m(\tau_g) = \tau_g^{-([m/g]+1)}(\tau_g - (m \bmod g) - 1), \ e^m(\tau_g) = \tau_g^{-([m/g]+1)}, \tag{7}$$

если $m \equiv g, \ldots, 2g-1 \bmod 2g$.

2. Орбиты и производные

Отождествим полуинтервал $I_\ell = I_\ell^+$ с окружностью и рассмотрим последовательность $Orb(a_0, \beta, I_\ell) = \{a_i\}_{i=0}^\infty$ – орбиту начальной точки $a_0 \in I_\ell$ относительно сдвига $\beta > 0$:

$$a_i \mapsto a_{i+1} = a_i + \beta \bmod |I_\ell|.$$

Если I_ℓ в координатах имеет вид $I_\ell = [a, b)$, то на полуинтервале $I_\ell^- = (a, b]$ определим орбиту $Orb(a_0, -\beta, I_\ell^-) = \{a_i\}_{i=0}^\infty$ начальной точки $a_0 \in I_\ell^-$ с помощью сдвига

$$a_i \mapsto a_{i+1} = a_i - \beta \bmod |I_\ell^-|.$$

Выберем произвольно иррациональное число $\alpha > 0$. Построим для него разбиения $CTil_\alpha(m)$ из полуинтервалов $G^m(\alpha)$ с длиной $g^m(\alpha)$ и $E^m(\alpha)$ с длиной $e^m(\alpha)$ (см. п. 1).

На полуинтервалах

$$I_m^+(\alpha) = [\{(\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha))\alpha\}, 1), \ I_m^-(\alpha) = (\{(\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha))\alpha\}, 1] \tag{8}$$

рассмотрим классы последовательностей

$$\begin{aligned} O_m^{\pm}(\alpha) &= Orb(a, \pm g^m(\alpha), I_m^{\pm}(\alpha)) = \{a^{\pm}(\alpha, m, i)\}_{i=0}^{\infty}, \ \sharp G^m(\alpha) \geqslant \sharp E^m(\alpha), \\ O_m^{\pm}(\alpha) &= Orb(a, \pm e^m(\alpha), I_m^{\pm}(\alpha)) = \{a^{\pm}(\alpha, m, i)\}_{i=0}^{\infty}, \ \sharp E^m(\alpha) > \sharp G^m(\alpha) \end{aligned} \tag{9}$$

из элементов $a^{\pm}(\alpha, m, i) = a \pm \alpha' \bmod |I_m^{\pm}(\alpha)|$, где $\sharp G^m(\alpha)$, $\sharp E^m(\alpha)$ – количества полуинтервалов $G^m(\alpha)$, $E^m(\alpha)$ в $CTil_\alpha(m)$, α' – сдвиг, порождающий орбиту. Начальная точка a определяется как дробная часть $a = \{(\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha))\alpha\}$ в случае $O_m^+(\alpha)$ и $a = 1$ в случае $O_m^-(\alpha)$.

В [1, 3] определено понятие производной последовательности $d^k O_m^{\pm}(\alpha)$ как ограничения $O_m^{\pm}(\alpha)$ на полуинтервал $I_{m+k}^{\pm}(\alpha)$. Очевидно, что точки последовательностей $O_m^{\pm}(\alpha)$, попадающие в полуинтервалы (8), будут снова образовывать орбиты.

Для $\alpha = \tau_g = \frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$, где $g = 1, 2, 3, \ldots$, возможны два случая (см. [3]):

$$\begin{aligned} d^m O_0^{\pm}(\tau_g) =& O_m^{\pm}(\tau_g), \quad \text{если} \quad m \equiv 0, \ldots, g-1 \bmod 2g, \\ d^m O_0^{\pm}(\tau_g) =& O_m^{\mp}(\tau_g), \quad \text{если} \quad m \equiv g, \ldots, 2g-1 \bmod 2g, \end{aligned}$$

причем согласно (4), (5) условие $m \equiv 0, \ldots, g-1 \bmod 2g$ эквивалентно неравенству $\sharp G^m(\alpha) \geqslant \sharp E^m(\alpha)$, а $m \equiv g, \ldots, 2g-1 \bmod 2g$ эквивалентно неравенству $\sharp E^m(\alpha) > \sharp G^m(\alpha)$.

Обобщая последние равенства на произвольное иррациональное α, будем иметь

$$\begin{aligned} d^m O_0^{\pm}(\alpha) =& O_m^{\pm}(\alpha), \ \sharp G^m(\alpha) \geqslant \sharp E^m(\alpha), \\ d^m O_0^{\pm}(\tau_g) =& O_m^{\mp}(\alpha), \ \sharp E^m(\alpha) > \sharp G^m(\alpha). \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть h_m – гомотетия с центром в точке 1, переводящая полуинтервалы $I_m^{\pm}(\alpha)$ в $I_0^{\pm}(\alpha)$. Тогда $N(O_m^{\pm}(\alpha))$ является образом $O_m^{\pm}(\alpha)$ относительно этой гомотетии. Орбиты $N(O_m^{\pm}(\alpha))$ порождены сдвигами $Der_m^{\pm}(\alpha)$, подобными сдвигам на $O_m^{\pm}(\alpha)$. Назовем $N(O_m^{\pm}(\alpha))$ нормированными орбитами, а $Der_m^{\pm}(\alpha)$ — нормированными сдвигами на них.

3. Прямые перенормировки

Пусть $a^{\pm}(\alpha,0,0^{(m)})$, $a^{\pm}(\alpha,0,1^{(m)})$, $\dots$, $a^{\pm}(\alpha,0,i^{(m)})$, $\dots$ – элементы из $O_0^{\pm}(\alpha)$, последовательно попадающие в полуинтервал $I_m^{+}(\alpha)$ или $I_m^{-}(\alpha)$ в соответствии с (10). По определению производной, указанные элементы являются элементами $a(\alpha,m,0)$, $a(\alpha,m,1)$, $\dots$, $a(\alpha,m,i)$, $\dots$ из $O_m^{+}(\alpha)$ или элементами $a^{-}(\alpha,m,0)$, $a^{-}(\alpha,m,1)$, $\dots$, $a^{-}(\alpha,m,i)$, $\dots$ из $O_m^{-}(\alpha)$. Отсюда следует существование однозначно определенных инъективных отображений

$$\mathbb{N} \overset{R_m^{+}(\alpha,i)}{\hookrightarrow} \mathbb{N} : i \mapsto R_m^{+}(\alpha,i) = i^{(m)},$$
$$\mathbb{N} \overset{R_m^{-}(\alpha,i)}{\hookrightarrow} \mathbb{N} : i \mapsto R_m^{-}(\alpha,i) = i^{(m)} \qquad (11)$$

множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ в себя, обладающих свойствами:

$$a^{\pm}(\alpha,0,R_m^{\pm}(\alpha,i)) = a^{\pm}(\alpha,m,i),\ \sharp G^m(\alpha) \geqslant \sharp E^m(\alpha),$$
$$a^{\pm}(\alpha,0,R_m^{\pm}(\alpha,i)) = a^{\mp}(\alpha,m,i),\ \sharp E^m(\alpha) > \sharp G^m(\alpha).$$

Назовем отображения $R_m^{\pm}(\alpha,i)$ прямыми перенормировками орбит.

Зная координаты полуинтервалов разбиения $CTil_{\alpha}(m)$, не составляет труда вычислить $R_m^{\pm}(\alpha,0)$. Действительно,

$$I_m(\alpha) = [\{(\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha)\alpha)\},1),$$
$$I_m^{-}(\alpha) = (\{(\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha)\alpha)\},1],$$

и $1 \equiv 0 \bmod 1$. Тогда

$$R_m^{+}(\alpha,0) = \sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha),\ R_m^{-}(\alpha,0) = 0, \qquad (12)$$

если $d^m O_0^{\pm}(\alpha) = O_m^{\pm}(\alpha)$,

$$R_m^{+}(\alpha,0) = 0,\ R_m^{-}(\alpha,0) = \sharp E^m(\alpha) - \sharp G^m(\alpha), \qquad (13)$$

если $d^m O_0^{\pm}(\alpha) = O_m^{\mp}(\alpha)$.

Пусть $w_m^{\pm}(\alpha,i)$ – число шагов, через которое точка $a^{\pm}(\alpha,0,i)$ из $I_m^{+}(\alpha)$ или $I_m^{-}(\alpha)$ вновь вернется в заданный полуинтервал. Согласно п. 1, имеем

$$I_m^{\pm}(\alpha) = (G_0^m(\alpha))^{\pm} \oplus (E_0^m(\alpha))^{\pm} = (E^m_{\sharp E^m(\alpha)}(\alpha))^{\pm} \oplus (G^m_{\sharp G^m(\alpha)}(\alpha))^{\pm}.$$

Формулы подразбиения полуинтервалов $I_m^{\pm}(\alpha)$, сдвиг

$$S:\ x \longmapsto S(x) = x - \alpha \bmod 1$$

и равенство $CTil_\alpha^+(m) = S(CTil_\alpha(m))$ дают возможность записать, что

$$w_m^+(\alpha,i) = \begin{cases} \sharp E^m(\alpha), a^+(\alpha,m,i) \in E^m_{\sharp E^m(\alpha)}(\alpha), \\ \sharp G^m(\alpha), a^+(\alpha,m,i) \in G^m_{\sharp G^m(\alpha)}(\alpha), \end{cases}$$

$$w_m^-(\alpha,i) = \begin{cases} \sharp E^m(\alpha), a^-(\alpha,m,i) \in (E_0^m(\alpha))^-, \\ \sharp G^m(\alpha), a^-(\alpha,m,i) \in (G_0^m(\alpha))^-, \end{cases}$$

если $d^m O_0^{\pm}(\alpha) = O_m^{\pm}(\alpha)$,

$$w_m^+(\alpha,i) = \begin{cases} \sharp E^m(\alpha), a^-(\alpha,m,i) \in (E^m_{\sharp E^m(\alpha)}(\alpha))^-, \\ \sharp G^m(\alpha), a^-(\alpha,m,i) \in (G^m_{\sharp G^m(\alpha)}(\alpha))^-, \end{cases}$$

$$w_m^-(\alpha,i) = \begin{cases} \sharp E^m(\alpha), a^+(\alpha,m,i) \in E_0^m(\alpha), \\ \sharp G^m(\alpha), a^+(\alpha,m,i) \in G_0^m(\alpha), \end{cases}$$

если $d^m O_0^{\pm}(\alpha) = O_m^{\mp}(\alpha)$.

С помощью функции $w^{\pm}(\alpha,i)$ можно вычислить перенормировки $R_m^{\pm}(\alpha,i)$:

$$R_m^{\pm}(\alpha,i) = R_m^{\pm}(\alpha,0) + \sum_{0\leqslant j<i} w_m^{\pm}(\alpha,j). \tag{14}$$

Пусть h'_m – гомотетия с центром в 1, переводящая нормированные орбиты $N(O_m^{\pm}(\alpha))$ (см. п. 2) в $O_m^{\pm}(\alpha)$. На произвольную точку последовательности $N(O_m^{\pm}(\alpha))$ отображение h'_m действует следующим образом:

$$h'_m a^{\pm}(Der_m^+(\alpha),0,i) = a^{\pm}(\alpha,m,i).$$

Воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} a^{\pm}(Der_m^+(\alpha),0,i) & \overset{x\mapsto x+Der_m^{\pm}(\alpha)\bmod 1}{\longmapsto} & a^{\pm}(Der_m^+(\alpha),0,i+1) \\ \downarrow h'_m & & \downarrow h'_m \\ a^{\pm}(\alpha,m,i) & \overset{x\mapsto x\pm\alpha'\bmod |I_m^{\pm}(\alpha)|}{\longmapsto} & a^{\pm}(\alpha,m,i+1), \end{array}$$

где α' – сдвиг на $O_m^{+}(\alpha)$. Видим, что между элементами последовательностей $N(O_m^{\pm}(\alpha))$ и $O_m^{\pm}(\alpha)$ существуют соответствия:

$$a^{+}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(G_1^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{+}\Leftrightarrow a^{+}(\alpha,m,i)\in(G^m_{\sharp G^m(\alpha)}(\alpha))^{+},$$

$$a^{-}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(G_0^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{-}\Leftrightarrow a^{-}(\alpha,m,i)\in(G^m_0(\alpha))^{-},$$

$$a^{+}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(E_1^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{+}\Leftrightarrow a^{+}(\alpha,m,i)\in(E^m_{\sharp E^m(\alpha)}(\alpha))^{+},$$

$$a^{-}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(E_0^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{-}\Leftrightarrow a^{-}(\alpha,m,i)\in(E^m_0(\alpha))^{-}.$$

С учетом последних соответствий формулы для $w_m^{\pm}(\alpha,i)$ перепишутся в следующем виде:

$$w_m^{+}(\alpha,i)=\begin{cases}\sharp E^m(\alpha), & a^{+}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in E_1^0(Der_m^{+}(\alpha)),\\ \sharp G^m(\alpha), & a^{+}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in G_1^0(Der_m^{+}(\alpha)),\end{cases}$$

$$w_m^{-}(\alpha,i)=\begin{cases}\sharp E^m(\alpha), & a^{-}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(E_0^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{-},\\ \sharp G^m(\alpha), & a^{-}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(G_0^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{-},\end{cases}$$

если $d^mO_0^{\pm}(\alpha)=O_m^{\pm}(\alpha)$,

$$w_m^{+}(\alpha,i)=\begin{cases}\sharp E^m(\alpha), & a^{-}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(E_1^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{-},\\ \sharp G^m(\alpha), & a^{-}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in(G_1^0(Der_m^{+}(\alpha)))^{-},\end{cases}$$

$$w_m^{-}(\alpha,i)=\begin{cases}\sharp E^m(\alpha), & a^{+}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in E_0^0(Der_m^{+}(\alpha)),\\ \sharp G^m(\alpha), & a^{+}(Der_m^{+}(\alpha),0,i)\in G_0^0(Der_m^{+}(\alpha)),\end{cases}$$

если $d^mO_0^{\pm}(\alpha)=O_m^{\mp}(\alpha)$.

Найдем явный вид прямых перенормировок $R_m^{\pm}(\alpha,i)$. Для этого рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $d^mO_0^{\pm}(\alpha)=O_m^{\pm}(\alpha)$ (или $\sharp G^m(\alpha)\geqslant\sharp E^m(\alpha)$).

Используя выражения для координат полуинтервалов разбиений $CTil_\alpha(m)$, $CTil_\alpha^{+}(m)$, получим

$$w_m^{+}(\alpha,i)=\begin{cases}\sharp E^m(\alpha), & \{Der_m^{+}(\alpha)i\}<\{1-Der_m^{+}(\alpha)\},\\ \sharp G^m(\alpha), & \{Der_m^{+}(\alpha)i\}\geqslant\{1-Der_m^{+}(\alpha)\},\end{cases}$$

$$w_m^{-}(\alpha,i)=\begin{cases}\sharp E^m(\alpha), & \{-Der_m^{+}(\alpha)i\}>\{Der_m^{+}(\alpha)\},\\ \sharp G^m(\alpha), & \{-Der_m^{+}(\alpha)i\}\leqslant\{Der_m^{+}(\alpha)\}.\end{cases}$$

Заметим, что неравенство $\{Der_m^{+}(\alpha)i\}<\{1-Der_m^{+}(\alpha)\}$ всегда можно свести к неравенству $\{-Der_m^{+}(\alpha)i\}>\{Der_m^{+}(\alpha)\}$, т.е.

$$w_m^{+}(\alpha,i)=w_m^{-}(\alpha,i). \tag{15}$$

Выберем функцию

$$T_m^{\pm}(\alpha, i) = (\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha))[Der_m^{+}(\alpha)i] + \sharp E^m(\alpha)i + R_m^{\pm}(\alpha, 0)$$

и рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\Delta T_m^{\pm}(\alpha, i) = T_m^{\pm}(\alpha, i+1) - T_m^{\pm}(\alpha, i) &= \\ = (\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha))([Der_m^{+}(\alpha)i + Der_m^{+}(\alpha)]&- \\ - [Der_m^{+}(\alpha)i]) + \sharp E^m(\alpha).&\end{aligned}$$

В зависимости от значения $[Der_m^{+}(\alpha)i + Der_m^{+}(\alpha)] - [Der_m^{+}(\alpha)i]$, разностная функция $\Delta T_m^{\pm}(\alpha, i)$ может принимать всего два значения: $\sharp G^m(\alpha)$ или $\sharp E^m(\alpha)$. В явном виде это будет выглядеть так:

$$\Delta T_m^{\pm}(\alpha, i) = \begin{cases} \sharp E^m(\alpha), & \text{если } \{Der_m^{+}(\alpha)i\} < \{1 - Der_m^{+}(\alpha)\}, \\ \sharp G^m(\alpha), & \text{если } \{Der_m^{+}(\alpha)i\} \geqslant \{1 - Der_m^{+}(\alpha)\}. \end{cases}$$

Сравнивая $\Delta T_m^{\pm}(\alpha, i)$ с $w_m^{+}(\alpha, i)$ и учитывая (15), получаем

$$\Delta T_m^{\pm}(\alpha, i) = w_m^{\pm}(\alpha, i). \tag{16}$$

Случай 2. $d^m O_0^{\pm}(\alpha) = O_m^{\mp}(\alpha)$ (или $\sharp G^m(\alpha) < \sharp E^m(\alpha)$). В этом случае функциям $w^{\pm}(\alpha, i)$ будут соответствовать соотношения

$$w_m^{+}(\alpha, i) = \begin{cases} \sharp E^m(\alpha), & \{-Der_m^{+}(\alpha)i\} \leqslant \{Der_m^{+}(\alpha)\}, \\ \sharp G^m(\alpha), & \{-Der_m^{+}(\alpha)i\} > \{Der_m^{+}(\alpha)\}, \end{cases}$$

$$w_m^{-}(\alpha, i) = \begin{cases} \sharp E^m(\alpha), & \{Der_m^{+}(\alpha)i\} \geqslant \{1 - Der_m^{+}(\alpha)\}, \\ \sharp G^m(\alpha), & \{Der_m^{+}(\alpha)i\} < \{1 - Der_m^{+}(\alpha)\}. \end{cases}$$

Сравнивая выражения для $w^{+}(\alpha, i)$ и $w^{-}(\alpha, i)$, заключаем

$$w_m^{+}(\alpha, i) = w_m^{-}(\alpha, i). \tag{17}$$

Возьмем функцию

$$T_m^{\pm}(\alpha, i) = (\sharp E^m(\alpha) - \sharp G^m(\alpha))[Der_m^{+}(\alpha)i] + \sharp G^m(\alpha)i + R_m^{\pm}(\alpha, i).$$

Тогда ее разностная функция $\Delta T_m^{\pm}(\alpha, i) = T_m^{\pm}(\alpha, i+1) - T_m^{\pm}(\alpha, i)$ будет определена следующим равенством:

$$\begin{aligned}\Delta T_m^{\pm}(\alpha, i) = (\sharp G^m(\alpha) - \sharp E^m(\alpha))([Der_m^{+}(\alpha)i \\ + Der_m^{+}(\alpha)] - [Der_m^{+}(\alpha)i]) + \sharp E^m(\alpha).\end{aligned}$$

Из этого равенства вытекает представление для $\Delta T_m^{\pm}(\alpha,i)$:

$$\Delta T_m^{\pm}(\alpha,i)=\begin{cases}\sharp E^m(\alpha), & \text{если } \{Der_m^{+}(\alpha)i\}\geqslant\{1-Der_m^{+}(\alpha)\},\\ \sharp G^m(\alpha), & \text{если } \{Der_m^{+}(\alpha)i\}<\{1-Der_m^{+}(\alpha)\}.\end{cases}$$

Снова сравнивая $\Delta T_m^{\pm}(\alpha,i)$ и $w_m^{\pm}(\alpha,i)$, приходим к равенству

$$\Delta T_m^{\pm}(\alpha,i)=w_m^{\pm}(\alpha,i) \tag{18}$$

для случая $d^mO_0^{\pm}(\alpha)=O_m^{\mp}(\alpha)$.

Вернемся к формуле (14) для прямых перенормировок $R_m^{\pm}(\alpha,i)$. Согласно этой формуле и (16), (18), имеем

$$R_m^{\pm}(\alpha,i)=R_m^{\pm}(\alpha,i)+\sum_{0\leqslant j<i}\Delta T_m^{\pm}(\alpha,j)=R_m^{\pm}(\alpha,0)+T_m^{\pm}(\alpha,i)-T_m^{\pm}(\alpha,0).$$

Из определения $T_m^{\pm}(\alpha,i)$ следует, что $R_m^{\pm}(\alpha,0)=T_m^{\pm}(\alpha,0)$, и тогда

$$R_m^{\pm}(\alpha,i)=T_m^{\pm}(\alpha,i). \tag{19}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для перенормировок $R_m^{\pm}(\alpha,i)$, определенных в (11), и орбит $O_m^{\pm}(\alpha)$, определенных в (9), имеет место явная формула*

$$R_m^{\pm}(\alpha,i)=(\sharp G^m(\alpha)-\sharp E^m(\alpha))[Der_m^{+}(\alpha)i]+\sharp E^m(\alpha)i+R_m^{\pm}(\alpha,0),$$

если $d^mO_0^{\pm}(\alpha)=O_m^{\pm}(\alpha)$, и

$$R_m^{\pm}(\alpha,i)=(\sharp E^m(\alpha)-\sharp G^m(\alpha))[Der_m^{+}(\alpha)i]+\sharp G^m(\alpha)i+R_m^{\pm}(\alpha,0),$$

если $d^mO_0^{\pm}(\alpha)=O_m^{\mp}(\alpha)$, где перенормировка $R_m^{\pm}(\alpha,0)$ определена в (12), (13).

4. Перенормировки $R_m^{\pm}(\alpha,i)$ при $\alpha=\tau_g$

Пусть $\alpha=\tau_g=\frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$ для $g=1,2,3,\dots$ Рассмотрим нормированные орбиты $N(O_m^{\pm}(\tau_g))$ и порождающие их сдвиги $Der_m^{\pm}(\tau_g)$ (см. п. 2), где $m=0,1,2,3,\dots$

Предложение 4.1. *Пусть a принимает одно из значений $0,\dots,g-1$, тогда*

$$\begin{aligned}Der_m^{\pm}(\tau_g)&=\pm\frac{g^m(\tau_g)}{g^m(\tau_g)+e^m(\tau_g)}=\pm\frac{1}{\tau_g-a} \quad \text{для} \quad m\equiv a \bmod 2g,\\ Der_m^{\pm}(\tau_g)&=\pm\frac{e^m(\tau_g)}{g^m(\tau_g)+e^m(\tau_g)}=\pm\frac{1}{\tau_g-a} \quad \text{для} \quad m\equiv g+a \bmod 2g,\end{aligned} \tag{20}$$

где $g^m(\tau_g)$, $e^m(\tau_g)$ – *длины соответствующих полуинтервалов разбиения* $CTil_{\tau_g}(m)$.

Доказательство. Длины полуинтервалов $I_m^{\pm}(\tau_g)$ удовлетворяют равенствам

$$|I_m^{\pm}(\tau_g)| = g^m(\tau_g) + e^m(\tau_g),\ \ |I_0^{\pm}(\tau_g)| = 1,$$

поскольку $I_m^{\pm}(\tau_g) = G_0^m(\tau_g) \oplus E_0^m(\tau_g)$, согласно (3) и (8). Из определения нормированных орбит и нормированных сдвигов следует, что для доказательства предложения достаточно рассмотреть увеличение длины сдвига, порождающего орбиты $O_m^{\pm}(\tau_g)$, в $|I_0^{\pm}(\tau_g)|/|I_m^{\pm}(\tau_g)|$ раз. Для $O_m^{\pm}(\tau_g)$, где $m \equiv 0,\dots,g-1 \bmod 2g$, величина сдвига равна $g^m(\tau_g)$, а для $O_m^{\pm}(\tau_g)$, где $m \equiv g,\dots,2g-1 \bmod 2g$, сдвиг равен $e^m(\tau_g)$. Явное значение сдвигов вычисляется с помощью формул для длин полуинтервалов $e^m(\tau_g)$ и $g^m(\tau_g)$ (6), (7). $\bullet$

Теорема 3.1 для случая $\alpha = \tau_g$ принимает следующий вид.

Теорема 4.1. *Перенормировки* $R_m^{\pm}(\alpha, i)$, *где* $\alpha = \tau_g = \frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$, *вычисляются по формуле*

$$R_m^{\pm}(\tau_g, i) = \left(F_{[m/g]+2}^{a+1(g)} - F_{[m/g]+1}^{g(g)}\right)\left[\frac{1}{\tau_g - a} i\right] + F_{[m/g]+1}^{g(g)} i + R_m^{\pm}(\tau_g, 0),$$

где $m \equiv a \bmod g$, $a = 0,\dots g-1$, *последовательности* $\{F_n^{k(g)}\}$ *определены в п. 1, а нулевые прямые перенормировки вычисляются из следующих равенств:*

$$R_m^{+}(\tau_g, 0) = F_{[m/g]+2}^{a+1(g)} - F_{[m/g]+1}^{g(g)},\ \ R_m^{-}(\tau_g, 0) = 0,$$

если $d^m O_0^{\pm}(\alpha) = O_m^{\pm}(\alpha)$, *и*

$$R_m^{+}(\tau_g, 0) = 0,\ \ R_m^{-}(\tau_g, 0) = F_{[m/g]+2}^{a+1(g)} - F_{[m/g]+1}^{g(g)},$$

если $d^m O_0^{\pm}(\alpha) = O_m^{\mp}(\alpha)$.

Литература

1. В. Г. Журавлев, Одномерные разбиения Фибоначчи, Изв. РАН, сер. матем., 2004. (В печати.)
2. Hyeong-Chai Jeong, Eunsang Kim, Chang-Yeong Lee, Noncommutative torus from Fibonacci chains via foliation, J. Phys. A **34**, No. 31 (2001), 1–19.

3. Н. Н. Мануйлов, Самоподобие некоторых последовательностей точек на окружности, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 81–95.
4. Н. Н. Мануйлов, Рекуррентные самоподобные разбиения, Чебышевский сборник **4**, вып. 2 (2003), Тула, 2003, 87–90.
5. Н. Н. Мануйлов, А. В. Шутов, Глобальный порядок разбиения окружности, Молодежь. Образование. Экономика. Сборник научных статей участников 5-ой Всероссийской научно–практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов, 4 мая 2004 г., Ярославль, 2004, 101–103.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 15 июля 2004 г.