Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

А. В. Олесов

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МАЖОРАНТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Будем называть допустимыми однозначные на всей конечной плоскости аналитические функции с изолированными особыми точками. Через E обозначим совокупность всех допустимых функций $\omega(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{\omega(\overline{z})}{\omega(z)}\right| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Функцию, принимающую вещественные значения в вещественных точках ее области определения, в дальнейшем будем называть вещественной.

Допустимую вещественную функцию $f(z)$ назовем подчиненной функции $\omega(z) \in E$, если

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Н. Н. Мейман [1] доказал, что данные условия обеспечивают выполнение на вещественной оси неравенства $|f'(x)| \leqslant |\omega'(x)|$. В настоящей работе прежде всего доказываются точные неравенства следующего характера. Для каждого z, $\operatorname{Im} z > 0$, указывается область в единичном круге, содержащая значение $f(z)/\omega(z)$ и ограниченная эллипсами с фокусами в точках $\pm\sqrt{\overline{\omega}(z)/\omega(z)}$, где $\overline{\omega}(z) = \overline{\omega(\overline{z})}$ (теорема 1). Теорема 1 усиливает неравенство Н. И. Ахиезера [2, с. 343]:

$$2|f(z)| \leqslant |\omega(z)| + |\overline{\omega}(z)|, \quad z \in \mathbb{C},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028).

доказанное при значительно менее общих условиях. В нулях дроби $\overline{\omega}(z)/\omega(z)$ теорема 1 дает

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Более сильный для таких точек результат сформулирован в теореме 3. В теореме 2 оценивается производная $f'(x)$ для точек вещественной оси. В качестве ее следствий приводятся неравенства усиливающие аналогичные результаты Н. Н. Меймана. Применение основных результатов статьи к специально строящимся аналитическим функциям позволяет получить ряд неравенств для полиномов и рациональных функций. Следствие 5 уточняет результат В. Н. Дубинина [3, с. 72], обобщает и усиливает результат П. Борвейна, Т. Эрдейи и Д. Занга [4] для рационально-тригонометрических функции, содержащий, в свою очередь, классическое неравенство Бернштейна–Сегё. В работе также усиливается известное неравенство С. Б. Стечкина [5] для тригонометрических полиномов.

В §2 данной статьи вводится ряд вспомогательных функций, к числу которых относится конформное и однолистное отображение $w = g(\zeta)$, строящееся по заданным функциям $\omega(z)$, $f(z)$ и играющее в работе ключевую роль. Далее приводятся основные результаты, полученные путём применения к указанному конформному отображению результатов геометрической теории функций комплексного переменного. Данный подход к получению неравенств для полиномов был предложен В. Н. Дубининым в работах [3, 6, 7].

§2. Построение конформного отображения

Пусть $f(z)$ подчинена функции $\omega(z) = s(z) + it(z) \in E$, где $s(z)$, $t(z)$ – допустимые вещественные функции, определяемые равенствами

$$s(z) = \left[\omega(z) + \overline{\omega}(z)\right]/2, \quad t(z) = -i\left[\omega(z) - \overline{\omega}(z)\right]/2;$$

γ – совокупность нулей дроби $\overline{\omega}(z)/\omega(z)$; $\gamma_1 \subset \gamma$ – нули первой кратности. Пусть, далее,

$$H(z) = \overline{\omega}(z)\omega(z) = s^2(z) + t^2(z);$$

$$\rho(z) = f(z)/\sqrt{H(z)}; \quad \delta(z) = s(z)/\sqrt{H(z)};$$

Обозначим через $w = \Phi(z)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $[-1, 1]$ на область $|w| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi(1) = 1$. Тогда $w = \Phi(z)$ – функция, обратная к функции Жуковского

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \quad |w| > 1.$$

Из представления $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ находим

$$\Phi'(z)/\Phi(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1}, \tag{1}$$

$$\Phi[\delta(z)] = \omega(z)/\sqrt{H(z)}, \quad \operatorname{Im} z > 0, \; z \notin \gamma. \tag{2}$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем считать, что $\gamma \neq \varnothing$.

Предположим, что для некоторого $a \in \gamma$ выполняется условие

$$\lambda(a) := 2 \lim_{z \to a} \left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| = \lim_{z \to a} \left|\frac{f(z)}{s(z)}\right| \neq 0.$$

Пусть

$$z(w) = \frac{\overline{a}w + a}{w + 1}$$

– конформное и однолистное отображение круга $|w| < 1$ на верхнюю полуплоскость такое, что $z(0) = a$; $w = w(z)$ – функция, обратная к $z(w)$.

Полагая, что в определениях двузначных функций $\rho(z)$, $\delta(z)$, значения $\sqrt{H(z)}$ совпадают, определим на множестве

$$G_z := \{z : \operatorname{Im} z > 0, \, \rho(z) \notin [-1, 1]\}$$

функцию

$$L(z) := \frac{\Phi[\rho(z)]}{\Phi[\delta(z)]} = \frac{f(z) + \sqrt{f^2(z) - H(z)}}{\omega(z)},$$

являющуюся, в силу нечетности $\Phi(z)$, однозначной и аналитической. В силу обобщенного принципа максимума модуля [8, с. 250],

$$|L(z)| \leqslant 1, \quad z \in G_z. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\zeta = F(w) = wL^{-k(a)}[z(w)], \quad w \in G_w = w(G_z),$$

где

$$k(a)=\begin{cases}1, & \text{при} \quad a\in\gamma\setminus\gamma_1,\\ 2, & \text{при} \quad a\in\gamma_1.\end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{D}$ – совокупность областей, составляющих множество

$$G_w\setminus\{w:|F(w)|=1\}.$$

При приближении точки w к границе каждой области из $\mathfrak{D}$ все предельные значения модуля $|F(w)|$ больше либо равны единице. Это утверждение следует из неравенства (3), неравенства

$$\left|w\Phi^{k(a)}[\delta(z)]\right|^{-1}=\left|\frac{z-\overline{a}}{z-a}\right|\left|\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right|^{k(a)/2}\leqslant 1,\ \ z=z(w),\ \ |w|<1, \quad (4)$$

справедливого в силу принципа максимума модуля, а также из граничных свойств функции $\Phi[\rho(z(w))]$. Кроме того,

$$|F'(0)|=[\lambda(a)]^{-k(a)}\neq 0.$$

Не составляет труда показать, что лемма 2.1 работы [7] имеет место и без предположения, что область, фигурирующая в формулировке этой леммы, ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых. Повторяя доказательство леммы 2.2 [7] по отношению к функции $F(w)$, убеждаемся, что для любой области $D\in\mathfrak{D}$ выполняется либо $F(D)\cap\{\zeta:|\zeta|<1\}=\varnothing$, либо $F(D)=\{\zeta:|\zeta|<1\}$. Во втором случае существует обратная к $F(w)$ функция $w=g(\zeta)$, однолистно отображающая круг $|\zeta|<1$ на область D.

§3. Неравенства для аналитических функций

3.1. Введем следующие обозначения:
$l(z)=\left[\dfrac{r(z)}{\alpha_{\lambda,r(z)}}\right]^{1/k(a)}$; $h(z)=\left[\dfrac{r(z)}{\beta_{\lambda,r(z)}}\right]^{1/k(a)}$; $r(z)=\left|\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}\right|$; $\lambda=[\lambda(a)]^{k(a)}$; $\alpha_{\lambda,r}$, $\beta_{\lambda,r}$ – корни уравнений

$$\lambda(1+r)^2x=r(1+x)^2 \quad \text{и} \quad \lambda(1-r)^2x=r(1-x)^2,$$

соответственно, лежащие на интервале $[r,1)$;

$$r_\lambda=2\lambda^{-1}-1-2\sqrt{\lambda^{-1}(\lambda^{-1}-1)}.$$

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ подчинена функции $\omega(z) = s(z) + it(z) \in E$ и в некоторой точке $a \in \gamma$ $\lambda(a) \neq 0$, то имеют место неравенства*

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)} - \sqrt{\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}}\right| + \left|\frac{f(z)}{\omega(z)} + \sqrt{\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant h(z) + h^{-1}(z)\left|\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right| \leqslant 1 + \left|\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right|, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{5}$$

Для $z : r(z) < r_\lambda$ имеем

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)} - \sqrt{\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}}\right| + \left|\frac{f(z)}{\omega(z)} + \sqrt{\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}}\right| \geqslant l(z) + l^{-1}(z)\left|\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right|. \tag{6}$$

Если в неравенстве (4) имеет место равенство, то для функций

$$f(z) = \sqrt{\lambda}[As(z) + Bt(z)], \quad \textit{если} \quad k(a) = 2, \tag{7}$$

$$f(z) = \lambda[As(z) + Bt(z)] + (1-\lambda)\sqrt{H(z)}, \quad \textit{если} \quad k(a) = 1, \tag{8}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 = 1, \quad 0 < \lambda \leqslant 1,$$

и только для них, достигается равенство слева в (5) и в (6). В противном случае равенство достигается только для функций вида

$$f(z) = As(z) + Bt(z), \quad A^2 + B^2 = 1. \tag{9}$$

Доказательство. Приведем доказательство для $a \in \gamma \setminus \gamma_1$, в противном случае рассуждения аналогичны. Пусть $w = g(\zeta)$ – соответствующая функция из §2. Согласно лемме Шварца, $|g'(0)| = \lambda \leqslant 1$. Функция $g^*(\zeta) := g(\zeta)/g'(0)$ в круге $|\zeta| < 1$ однолистна, по модулю меньше чем λ^{-1} и представляется степенным рядом

$$g^*(\zeta) = \zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + \dots . \tag{10}$$

В классе таких функций известны точные оценки

$$\left(\frac{1 + |\lambda g^*(\zeta)|}{1 + |\zeta|}\right)^2 \leqslant \left|\frac{g^*(\zeta)}{\zeta}\right| \leqslant \left(\frac{1 - |\lambda g^*(\zeta)|}{1 - |\zeta|}\right)^2, \quad 0 < |\zeta| < 1, \tag{11}$$

причем равенство слева или справа, хотя бы в одной точке, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{g^*(\zeta)}{[1+e^{i\alpha}\lambda g^*(\zeta)]^2} \equiv \frac{\zeta}{(1+e^{i\alpha}\zeta)^2}, \tag{12}$$

α вещественно (см. например, [7, 9]).

Пусть $w \neq 0$, $|w| = r$, – точка множества $g(|\zeta| < 1)$. Правое неравенство в (11) дает

$$\frac{(1-|F(w)|)^2}{|F(w)|} \leqslant \lambda\frac{(1-r)^2}{r}.$$

Ввиду строгого убывания функции $y = (x-1)^2/x$ на промежутке $0 < x < 1$, существует единственный корень $\beta_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(1-r)^2x = r(1-x)^2$, лежащий в интервале $[r, 1)$. По этой же причине имеет место неравенство

$$|F(w)| \geqslant \beta_{\lambda,r}, \tag{13}$$

которое тем более выполняется для точек $w \notin g(|\zeta| < 1)$. Из (13) находим

$$|\Phi[\rho(z)]| \leqslant \frac{r}{\beta_{\lambda,r}}|\Phi[\delta(z)]| \leqslant |\Phi[\delta(z)]|, \quad z = z(w), \ \ w \notin w(\gamma).$$

Учитывая, что функция Жуковского переводит окружность $|w| = r$ в эллипс с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $r+1/r$, после элементарных преобразований приходим к неравенствам (5), в которых

$$h(z) = |w(z)|/\beta_{\lambda,|w(z)|}.$$

Пусть w, $|w| = r < r_\lambda$, – точка множества $g(|\zeta| < 1)$. Левое неравенство в (11) и строгое убывание функции $y = (1+x)^2/x$ на промежутке $0 < x < 1$ дают

$$\frac{(1+|F(w)|)^2}{|F(w)|} \geqslant \lambda\frac{(1+r)^2}{r} > \lambda\frac{(r_\lambda+1)^2}{r_\lambda} = 4.$$

Следовательно, существует единственный корень $\alpha_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(1+r)^2x = r(1+x)^2$, лежащий в интервале $[r, 1)$, и для этого корня имеем

$$|F(w)| \leqslant \alpha_{\lambda,r}. \tag{14}$$

Покажем теперь, что любая точка $w \neq 0$, $|w| < r_\lambda$, принадлежит области $g(|\zeta| < 1)$. Предположим противное, т.е. что имеет место неравенство

$$r_\lambda > r^* = \sup\{r : r < 1,\ |F(w)| < 1,\ \forall\, w,\ |w| = r\}.$$

Очевидно, на окружности $|w| = r^*$ найдется точка w^*, для которой

$$|F(w^*)| = 1. \tag{15}$$

С другой стороны, для любой последовательности точек w_k, $|w_k| < r^*$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к w^*, оценка (14) дает

$$|F(w_k)| \leqslant \alpha_{\lambda, r^*}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

что противоречит условию (15). Следовательно, (14) выполняется для любых точек w, $|w| = r < r_\lambda$, откуда вытекает неравенство

$$|\Phi[\rho(z)]| \geqslant \frac{r}{\alpha_{\lambda,r}} |\Phi[\delta(z)]|, \quad z = z(w),\ \ w \notin w(\gamma),\ \ |w| < r_\lambda,$$

эквивалентное неравенству (6), в котором

$$l(z) = |w(z)|/\alpha_{\lambda, |w(z)|}.$$

Приступим к доказательству утверждения о случаях равенства. В соответствии с предыдущим доказательством, равенство в (5) или (6) в точке $z \notin \gamma$ возможно только в случае равенства в (13) или (14), соответственно, в точке $w = w(z)$. Данный факт имеет место и для $z \in \gamma$, что проверяется непосредственно.

Пусть $\lambda < 1$ и пусть неравенство (4) является строгим. Покажем, что в этом случае функция $g^*(\zeta)$ не может удовлетворять тождеству (12), значит, неравенства (13) и (14) являются строгими. Действительно, предполагая противное, получим

$$\Psi(e^{i\alpha} F(w)) \equiv \lambda \Psi(e^{i\beta} w) + \lambda - 1, \quad \beta = \alpha - \arg g'(0),\ \ w \in G.$$

Отсюда

$$f(z) = \sqrt{H(z)}\Psi\big[w\Phi[\delta(z)]e^{i\alpha}\Phi(\lambda\Psi(e^{i\beta}w) + \lambda - 1)\big], \quad z = z(w).$$

Поскольку функция $\Phi(z)$ двузначна в точках отрезка $(-1, 1)$ и принимает на нем значения, равные по модулю единице, то учитывая неравенство (4), которое в данном случае является строгим, а также однолистность функции Жуковского во внешности единичного круга, заключаем, что функция, стоящая в правой части последнего равенства, не может быть однозначно и регулярно определена в точках $w = re^{-i\beta}$, $\Phi^{-1}(2\lambda^{-1} - 1) < r < 1$, а это противоречит определению функции, стоящей в левой части. Если (4) является равенством, то то же требование однозначности дает

$$w\Phi[\delta(z)]e^{i\alpha} \equiv \pm 1,$$

откуда

$$f(z) = \lambda[As(z) + Bt(z)] + (1 - \lambda)\sqrt{H(z)}, \quad A^2 + B^2 = 1.$$

Очевидно, для этих функций в левой части (5) достигается равенство. То, что равенство достигается и в (6), следует из того, что для функции $g^*(\zeta)$, удовлетворяющей тождеству (12), равенство в левой части (11) имеет место во всех точках отрезка $\zeta = re^{-i\alpha}$, $0 < r < 1$ (и только в этих точках), и из того, что какая-то часть данного отрезка переходит при отображении $w = g(\zeta)$ в круг $|w| < r_\lambda$. На самом деле, указанным свойством обладает весь отрезок, ибо в противном случае в неравенстве (14), которое при достаточно малых r превращается в равенство, $|F(w)| < 1$, а с другой стороны, на указанном отрезке существует точка ζ, для которой $\alpha_{\lambda,r} = 1$, $r = |g(\zeta)|$ (непосредственная проверка показывает, что данный образ данного отрезка совпадает с отрезком $w = re^{-i\beta}$, $0 < r < r_\lambda$).

Если $\lambda = 1$, то, согласно лемме Шварца, $g^*(\zeta) \equiv \zeta$, при этом неравенства (11) обращаются в равенства. Следовательно, знаки равенства в (13) и (14) имеют место лишь при

$$F(w) \equiv e^{i\varphi}w, \quad \varphi \equiv \text{const},$$

откуда

$$f(z) = \sqrt{H(z)}\Psi(e^{-i\varphi}\Phi[\delta(z)]) = \cos\varphi s(z) + \sin\varphi t(z).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если в условиях теоремы $\lambda(a) = 0$, то посредством предельного перехода нетрудно доказать справедливость неравенства (5), в котором $h(z) = [r(z)]^{1/k(a)}$. Если $\gamma = \varnothing$, то неравенство между левой и правой частями (5), с равенством только для функций вида (9), непосредственно следует из (3).

Пусть γ^* – совокупность особых точек функций $f(z)$ и $\omega(z)$, лежащих на вещественной оси. На множестве $G_z \setminus \gamma$, за исключением особых точек, определена аналитическая и непрерывная вплоть до $\mathbb{R} \setminus \gamma^*$ функция

$$\Delta(z) = -if(z)(\Phi[\rho(z)]/\rho(z) - 1) \quad (\Delta(z) = \sqrt{H(z) - f^2(z)}).$$

Положим $\Omega(x) := \omega'(x)/\omega(x)$. Непосредственные вычисления с использованием равенств (1) и (2) дают

$$\frac{\Phi'[\rho(z)]}{\Phi[\rho(z)]}\rho'(z) = \frac{1}{i\Delta(z)}\left[f'(z) - f(z)\frac{H'(z)}{2H(z)}\right], \quad z \in G_z \setminus \gamma, \tag{16}$$

$$\frac{H'(x)}{2H(x)} = \operatorname{Re}\Omega(x), \ \ \frac{\Phi'[\delta(x)]}{\Phi[\delta(x)]}\delta'(x) = i\operatorname{Im}\Omega(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*. \tag{17}$$

На основании последнего равенства нетрудно установить, что

$$\frac{\partial \arg \omega(x)}{\partial x} = \operatorname{Im}\Omega(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*.$$

Это утверждение также можно найти в [1, с. 23].

3.2. Пусть

$$A(z) = \frac{s(z)f(z) + t(z)\Delta(z)}{H(z)}, \quad B(z) = \frac{t(z)f(z) - s(z)\Delta(z)}{H(z)},$$

$$\widetilde{A}(z) = \frac{s(z)f(z) - t(z)\Delta(z)}{H(z)}, \quad \widetilde{B}(z) = \frac{t(z)f(z) + s(z)\Delta(z)}{H(z)}.$$

Теорема 2. *Если функция $f(z)$ подчинена функции $\omega(z) = s(z) + it(z) \in E$, то в точках $x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*$, в которых $\Delta(x) \geqslant 0$, имеют место оценки*

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x)s'(x) + \widetilde{B}(x)t'(x) + \Delta(x)\Lambda(x) \leqslant f(x)\operatorname{Re}\Omega(x) \leqslant f'(x) \leqslant \\ \leqslant A(x)s'(x) + B(x)t'(x) - \Delta(x)\Lambda(x),\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\Lambda(x) := \max_{a\in\gamma}\left\{\frac{\operatorname{Im} a}{|x-a|^2}K(a)\right\}, \quad K(a) := \frac{2}{k(a)}\left(1 - [\lambda(a)]^{k(a)/2}\right),$$

либо $\Lambda(x) :\equiv 0$ при $\gamma = \varnothing$. Для функций вида (9)

$$A(z) \equiv A, \quad B(z) \equiv B.$$

Доказательство. Пусть $\rho'(x) \neq 0$ в некоторой точке $x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*$ и $\Delta(x) > 0$. Если положить $\sqrt{H(x)} > 0$, то из определения функции $\Delta(z)$ следует, что $\rho(x)$ лежит на верхнем берегу отрезка $[-1, 1]$, т.е. $\rho'(x) > 0$, что эквивалентно промежуточному неравенству в (18).

Докажем теперь крайние неравенства. Пусть $a \in \gamma$, $\lambda(a) \neq 0$, $w = g(\zeta)$ – соответствующая однолистная функция из §2. Если точка ζ, $|\zeta| = 1$, является точкой регулярности функции $g(\zeta)$, причем $|g(\zeta)| = 1$, то предельным переходом из правой части (11) получим

$$|g'(\zeta)| \geqslant [\lambda(a)]^{-k(a)/2}. \tag{19}$$

Если точка w, $|w| = 1$, является точкой регулярности функции $F(w)$ и одновременно лежит на границе области $D \in \mathfrak{D}$ такой, что $F(D) \cap \{\zeta : |\zeta| < 1\} = \varnothing$, то необходимо в этой точке

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} \leqslant 0.$$

Если $F(D) = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, то из (19) заключаем, что в такой точке

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = |g'(\zeta)|^{-1} \leqslant [\lambda(a)]^{k(a)/2}. \tag{20}$$

Таким образом, (20) выполняется во всех точках множества

$$\{w : |w| = 1,\ \rho'[z(w)] \neq 0,\ w \neq -1,\ z(w) \notin \gamma^*\}.$$

В этих точках, в силу (16) и (17),

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = 1 + k(a) \left| \frac{\partial}{\partial w} \Phi[\rho(z)] \right| - k(a) \left| \frac{\partial}{\partial w} \Phi[\delta(z)] \right| =$$

$$= 1 + k(a)|z'(w)| \left(\left| \frac{f'(z) - f(z)\operatorname{Re}\Omega(z)}{\Delta(z)} \right| - |\operatorname{Im}\Omega(z)| \right), \quad z = z(w).$$

Отсюда, согласно (20), получим

$$|f'(x) - f(x)\operatorname{Re}\Omega(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta(x)| \left(-\operatorname{Im}\Omega(x) - \frac{1 - [\lambda(a)]^{k(a)/2}}{k(a)} |w'(x)| \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*. \tag{21}$$

Замечая, что $w'(z) = -2i\operatorname{Im} a/(z - \overline{a})^2$,

$$f(z) = A(z)s(z) + B(z)t(z), \quad f(z) = \widetilde{A}(z)s(z) + \widetilde{B}(z)t(z),$$

$$\Delta(z) = A(z)t(z) - B(z)s(z), \quad -\Delta(z) = \widetilde{A}(z)t(z) - \widetilde{B}(z)s(z),$$

и пользуясь равенством

$$[As(x) + Bt(x)]\operatorname{Re}\Omega(x) - [At(x) - Bs(x)]\operatorname{Im}\Omega(x) = As'(x) + Bt'(x),$$

справедливым для любых чисел A и B, получим неравенства (18), в которых

$$\Lambda(x) = \frac{\operatorname{Im} a}{|x-a|^2}K(a).$$

Случай $\lambda(a) = 0$ рассматривается при помощи предельного перехода. Для рассмотрения случая $\gamma = \varnothing$ следует применить (18) к функциям

$$\widetilde{f}(z) = f(z)(z^2 + r^2)/z^2, \quad \widetilde{\omega}(z) = \omega(z)(z + ir)^2/z^2, \quad r > 0,$$

и перейти к пределу при $r \to 0$. Последнее утверждение теоремы проверяется непосредственно.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 2 $\Delta(x) \leqslant 0$, то, применяя (18) к функции $-f(z)$, получим аналогичные оценки и для таких точек.

Замечание 3. В условиях теоремы 2

$$A(x)s'(x) + B(x)t'(x) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\Phi[\rho(x)]}{\Phi[\delta(x)]}[s'(x) + it'(x)]\right\},$$

$$\widetilde{A}(x)s'(x) + \widetilde{B}(x)t'(x) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{\Phi[\rho(x)]}}{\Phi[\delta(x)]}[s'(x) + it'(x)]\right\}.$$

В силу равенств $A^2(z) + B^2(z) = 1$, $\widetilde{A}^2(z) + \widetilde{B}^2(z) = 1$, из теоремы 2 следует

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 при любых $x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$\big|f'(x) + \alpha f(x)\big| \leqslant \max\Big|A\big[s'(x) + \alpha s(x)\big] + B\big[t'(x) + \alpha t(x)\big]\Big| -$$
$$- \sqrt{\big|\omega(x)\big|^2 - f^2(x)}\,\Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*,$$

где для каждого фиксированного x максимум берется по всевозможным парам чисел A, B, удовлетворяющих равенствам

$$A^2 + B^2 = 1, \quad As(x) + Bt(x) = f(x).$$

Следствие 2. *Пусть допустимая (не вещественная) функция $f(z)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{f(\overline{z})}{\omega(z)}\right| \leqslant 1, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0,$$

$\omega(z) \in E$. *Тогда при любых* $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*$

$$\left|f'(x) + \alpha f(x)\right| \leqslant \left|\omega'(x) + \alpha\omega(x)\right| -$$

$$- \min_{0 \leqslant \varphi < 2\pi} \left\{\sqrt{|\omega(x)|^2 - \left[\operatorname{Re}\left(e^{i\varphi} f(x)\right)\right]^2}\, \Lambda_\varphi(x)\right\},$$

где $\Lambda_\varphi(x)$ *совпадает с* $\Lambda(x)$, *определенной для функции*

$$\left[e^{i\varphi} f(z) + e^{-i\varphi}\overline{f}(z)\right]/2.$$

Для доказательства данного неравенства в фиксированной точке x нужно применить следствие 1 к функции

$$\left[e^{i\varphi} f(z) + e^{-i\varphi}\overline{f}(z)\right]/2,$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi}\left[f'(x) + \alpha f(x)\right]\right\} = |f'(x) + \alpha f(x)|.$$

Согласно (1) и (16), неравенство (21) эквивалентно неравенству

$$\frac{|\rho'(x)|}{\sqrt{1 - \rho^2(x)}} \leqslant -\operatorname{Im}\Omega(x) - \frac{K(a)}{2}|w'(x)|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \gamma^*, \tag{22}$$

правая часть которого, как легко проверить, равна

$$\frac{\partial \arg\overline{\omega}(x) - K(a)\arg(x - a)}{\partial x}.$$

Обозначим через (x_1, x_2) интервал вещественной оси, не содержащий точек γ^*, и положим для некоторого $a \in \gamma$

$$\psi(\theta) = \frac{f(x)}{|\omega(x)|}, \quad \theta = \theta(x) = \arg\overline{\omega}(x) - K(a)\arg(x - a),$$

$$\alpha = \theta(x_1), \quad \beta = \theta(x_2).$$

Следствие 3. *Справедливо неравенство*

$$|\psi'(\theta)| \leqslant \sqrt{1-\psi(\theta)^2}, \quad \alpha < \theta < \beta, \tag{23}$$

обращающееся в равенство для функций вида (9).

Следствие 3 усиливает аналогичный результат Н. Н. Меймана [1], который в определении функции $\psi(\theta)$ полагал $\theta(x) = \arg\overline{\omega}(x)$.

Интегрируя (23), находим

$$|\arccos\psi(\theta) - \arccos\psi(\theta_0)| \leqslant |\theta-\theta_0|, \quad \theta,\, \theta_0 \in (\alpha,\beta).$$

Отсюда, в свою очередь, следуют эквивалентные (23) неравенства

$$\psi(\theta) \geqslant \cos(\theta-\theta_0-\varepsilon), \quad \theta \in [\theta_0-\pi+\varepsilon,\, \theta_0], \tag{24}$$

$$\psi(\theta) \geqslant \cos(\theta-\theta_0+\varepsilon), \quad \theta \in [\theta_0,\, \theta_0+\pi-\varepsilon], \tag{25}$$

где $\varepsilon = \arccos\psi(\theta_0)$, а также

$$|\psi(\theta+h)-\psi(\theta)| \leqslant 2\sin(h/2), \quad 0 < h \leqslant \pi, \tag{26}$$

и неравенство

$$|\psi(\theta+h)-\psi(\theta)| \leqslant \sin h, \quad 0 < h \leqslant \pi/2,$$

при дополнительном условии $\psi(\theta+h)\psi(\theta) \geqslant 0$.

Следствие 4. *Если* $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ *и* $\sup|\psi(\theta)| = 1$, *то имеет место неравенство*

$$\sup_{-\infty<\theta<+\infty} \left| \int\limits_{\theta}^{\theta+h} \psi(\theta)\, d\theta \right| \geqslant 2\sin\frac{h}{2}, \quad 0 < h \leqslant 2\pi.$$

Доказательство. Будем полагать, что $\sup\psi(\theta) = 1$, в противном случае рассматриваем функцию $-\psi(\theta)$. Выбрав θ_0 так, чтобы $\psi(\theta_0)$ было достаточно близко к 1, мы можем сделать ε сколь угодно малым. Остается проинтегрировать неравенства (24), (25) на интервалах $[\theta_0-h/2,\, \theta_0]$, $[\theta_0,\, \theta_0+h/2]$, соответственно.

3.3. Пусть дана последовательность чисел t_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, лежащих в полуполосе

$$\operatorname{Im} t < 0, \quad -\pi < \operatorname{Re} t \leqslant \pi,$$

и пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу $\mathcal{T}_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, если:

1) $f(t) = p_m(t)/q_k(t)$, где $p_m(t)$, $q_k(t)$ – тригонометрические полиномы с вещественными коэффициентами порядка соответственно m и k, причем $m - k \leqslant n$;

2) t_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, – полюсы функции $f(t)$, считающиеся с учетом их кратностей;

3) имеет место неравенство $|f(t)| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Положим

$$W(\zeta) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \overline{e^{it_j}}\zeta}{\zeta - e^{it_j}}, \quad \omega(t) = e^{int} W(e^{it}).$$

Если $f(t) \in \mathcal{T}_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, то можно показать, что $f(-t)$ подчинена функции $\omega(-t) \in E$. Неравенство (22) для данных функций дает некоторую оценку $|f'(t)|$ на $\mathbb{R}$. Мы ее не приводим, поскольку имеет место более сильный результат. Для его формулировки введем следующие обозначения:

$$I = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, k\}, & \text{если} \quad n = 0, \\ \{0, 1, \ldots, k\}, & \text{если} \quad n > 0; \end{cases}$$

$$\varPi_j(t) = \lim_{\tau \to t_j} \left\{ \frac{|e^{i\tau}|^2 - 1}{|e^{it} - e^{i\tau}|^2} \left(1 - |2f(\tau)/\omega(\tau)|^{1/2}\right) \right\},$$

$t_0 = -i\infty$. Последнее равенство означает эквивалентность условий

$$t \to t_0, \quad e^{it} \to \infty.$$

Следствие 5. *Если $f(t) \in \mathcal{T}_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, то при $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$|f'(t)| \leqslant \sqrt{1 - f^2(t)} \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{|e^{it_j}|^2 - 1}{|e^{it} - e^{it_j}|^2} + n - \max_{j \in I} \varPi_j(t) \right], \tag{27}$$

Для функций вида

$$f(t) = \frac{A}{2}\left[\omega(t) + \frac{1}{\omega(t)}\right] + \frac{B}{2i}\left[\omega(t) - \frac{1}{\omega(t)}\right], \quad A^2 + B^2 = 1,$$

неравенство превращается в равенство.

Доказательство. Пусть $R(\zeta)$ – алгебраическая дробь, удовлетворяющая равенству $f(t) = R(e^{it})$, и пусть

$$\widetilde{f}(z) = R[\zeta(z)], \quad \widetilde{\omega}(z) = \zeta^n(z)W[\zeta(z)],$$

где $\zeta(z) = (z+i)/(z-i)$ – однолистное отображение верхней полуплоскости на область $|\zeta| > 1$. В силу обобщенного принципа максимума,

$$|\zeta^{-n}R(\zeta)/W(\zeta)| < 1, \quad |\zeta| > 1, \quad \text{т. е. } |\widetilde{f}(z)/\widetilde{\omega}(z)| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Кроме того,

$$\overline{\widetilde{\omega}}(z) = 1/\widetilde{\omega}(z), \quad |\widetilde{\omega}(z)| > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Таким образом, функция $\widetilde{f}(z)$ подчинена функции $\widetilde{\omega}(z) \in E$. Пусть

$$z(\zeta) = i(\zeta+1)/(\zeta-1)$$

– функция, обратная к $\zeta(z)$. Точки

$$z(e^{it_j}), \quad j = 1, \ldots, k,$$

а при $n > 0$ и точка $z = i$, – кратные нули дроби $\overline{\widetilde{\omega}}(z)/\widetilde{\omega}(z)$. Полагая $x(t) = z(e^{it})$, заметим, что

$$\omega(t) = \widetilde{\omega}[x(t)], \quad f(t) = \widetilde{f}[x(t)].$$

Простые вычисления показывают, что применение неравенства (21) к $\widetilde{f}(z)$, $\widetilde{\omega}(z)$ и домножение левой и правой его частей на $-x'(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дает (27). Случай равенства проверяется непосредственно.

Следующий результат был получен В. Н. Дубининым в [6].

Следствие 6. *Если тригонометрический полином*

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad a_k,\, b_k \in \mathbb{R}, \quad a_n^2 + b_n^2 \neq 0,$$

удовлетворяет неравенству $|p_n(t)| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$, *то*

$$|p_n'(t)| \leqslant \left[n - 1 + (a_n^2 + b_n^2)^{1/4}\right] \sqrt{1 - p_n^2(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для полиномов

$$p_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad a_n^2 + b_n^2 = 1,$$

неравенство превращается в равенствою.

Доказательство совпадает с доказательством следствия 5, в котором нужно полагать $B_c(\zeta) \equiv 1$.

Следствие 7. *Для тригонометрического полинома*

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad a_k,\, b_k \in \mathbb{R}, \quad a_n^2 + b_n^2 \neq 0$$

выполняется

$$\max_t |p_n(t+h) - p_n(t)| \leqslant 2 \sin \frac{\widetilde{n} h}{2} M, \quad 0 < h < \frac{\pi}{\widetilde{n}}, \tag{28}$$

$$\max_t |p_n(t+h) - p_n(t)| \geqslant \frac{2}{n} \sin \frac{\overline{n} h}{2} M_1, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{\overline{n}}, \tag{29}$$

где $M = \max_t |p_n(t)|$, $M_1 = \max_t |p_n'(t)|$,

$$\widetilde{n} = n - 1 + \sqrt{1/M}\,(a_n^2 + b_n^2)^{1/4}, \quad \widetilde{n} = n - 1 + \sqrt{n/M}_1\,(a_n^2 + b_n^2)^{1/4}.$$

Доказательство. Если $\psi(\theta)$ – дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, то для справедливости неравенства (26) и следствия 4 достаточно выполнение неравенства (23) на вещественной оси, что было установлено при доказательстве соответствующих утверждений. Но, в силу следствия 6, для функций

$$\psi(\theta) = p_n(\theta, \widetilde{n})/M, \quad \psi_1(\theta) = p_n'(\theta, \overline{n})/M_1,$$

это неравенство имеет место. Неравенство (26) для функции $\psi(\theta)$ превращается в (28), а применение следствия 4 к $\psi_1(\theta)$ дает (29).

Отметим, что (29) усиливает известное неравенство С. Б. Стечкина [5].

3.4. Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ подчинена функции $\omega(z) = s(z)+it(z) \in E$ и $\lambda(a) \neq 0$ в некоторой точке $a \in \gamma$. Тогда*

$$[\lambda(a)]^{k(a)}\left(1+k(a)\operatorname{Im}a\lim_{z\to a}|D(z)|\right) \leqslant 1,$$

где

$$D(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}\left(1+\frac{H(z)}{2f^2(z)}\right) - \frac{s'(z)}{s(z)}\left(1+\frac{H(z)}{2s^2(z)}\right) + \\ +\frac{H'(z)}{4}\left(\frac{1}{s^2(z)}-\frac{1}{f^2(z)}\right).$$

Если $|\overline{\omega}(z)/\omega(z)|^{k(a)} = |(z-a)/(z-\overline{a})|^2$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$, то равенство достигается только для функций вида (7) или (8), в противном случае – только для функций вида (9).

Доказательство. Пусть в некоторой проколотой окрестности точки $w=0$

$$P(w) = w\frac{F'(w)}{F(w)}.$$

Для данной функции имеем

$$P(w) = 1+k(a)z'(w)w\left[\frac{\Phi'[\delta(z)]\delta'(z)}{\Phi[\delta(z)]} - \frac{\Phi'[\rho(z)]\rho'(z)}{\Phi[\rho(z)]}\right], \quad z = z(w).$$

Заметим, что $z'(0) = -2\operatorname{Im}a$. Учитывая данный факт, а также равенство (1), получим

$$\lim_{w\to 0}\frac{P(w)-1}{w} = 2k(a)D\operatorname{Im}a,$$

где

$$D := \lim_{z\to a}\left[\frac{\rho'(z)}{\sqrt{\rho^2(z)-1}} - \frac{\delta'(z)}{\sqrt{\delta^2(z)-1}}\right] =$$

$$= \lim_{z\to a}\left[\frac{f'(z)\sqrt{H(z)}-\rho(z)H'(z)/2}{H(z)\sqrt{\rho^2(z)-1}} - \frac{s'(z)H(z)-s(z)H'(z)/2}{it(z)H(z)}\right].$$

Используя теорему Сохоцкого, не составляет труда установить, что точка a не может быть существенно особой точкой функций $\omega(z)$, $\overline{\omega}(z)$. В виду этого, из элементарных соображений находим

$$\lim_{z\to a}\left[\frac{f'(z)\sqrt{H(z)}}{H(z)\sqrt{\rho^2(z)-1}} - \frac{s'(z)}{it(z)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to a}\left[\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{s'(z)}{s(z)} + \frac{f'(z)H(z)}{2f^3(z)} - \frac{s'(z)H(z)}{2s^3(z)}\right],$$

$$\lim_{z\to a}\left[\frac{s(z)H'(z)/2}{it(z)H(z)} - \frac{\rho(z)H'(z)/2}{H(z)\sqrt{\rho^2(z)-1}}\right] = \lim_{z\to a}\left[\frac{H'(z)}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{s(z)\left(\rho(z)-\Phi^{-1}[\rho(z)]\right) - it(z)\rho(z)}{it(z)H(z)\rho(z)}\right] = \lim_{z\to a}\left[\frac{H'(z)}{4s^2(z)} - \frac{H'(z)}{4f^2(z)}\right].$$

Таким образом, $D = \lim\limits_{z\to a} D(z)$. С другой стороны, на основании правила Лопиталя,

$$\lim_{w\to 0}\frac{P(w)-1}{w} = \frac{F''(0)}{2F'(0)}.$$

В этом случае, очевидно,

$$g''(0) = -F''(0)[g'(0)]^3 = -4k(a)D\,\mathrm{Im}\,a[g'(0)]^2,$$

следовательно, в разложении функции (10)

$$\alpha_2 = -2k(a)D\,\mathrm{Im}\,a\lim_{z\to a}[f(z)/s(z)]^{k(a)}.$$

Согласно [10, с. 94],

$$|\alpha_2| \leqslant 2\bigl(1-[\lambda(a)]^{k(a)}\bigr), \tag{30}$$

что эквивалентно неравенству теоремы.

Для доказательства утверждения о случаях равенства отметим, что равенство в (30) возможно лишь в случае выполнения тождества (12) ([10, с. 94]), что имеет место, как было показано в доказательстве теоремы 1, лишь для указанных функций. Теорема доказана.

Замечание 4. Если в условиях теоремы $a \in \gamma \setminus \gamma_1$, то формула для $D(z)$ принимает особенно простой вид:

$$D(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{s'(z)}{s(z)}.$$

Литература

1. Н. Н. Мейман, *Дифференциальные неравенства и некоторые вопросы распределения нулей целых и однозначных аналитических функций,* Успехи мат. наук **7**, вып. 3 (1952), 3–62.
2. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации,* М., 1965.
3. В. Н. Дубинин, *О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций,* Изв. РАН, сер. мат. **66**, No. 2 (2002), 67–80.
4. P. Borwein, T. Erdelyi, J. Zhang, *Chebyshev polynomials and Markov-Bernstein type inequalities for the rational spaces,* J. London Math. Soc. **50** (1994), 501–519.
5. С. Б. Стечкин, *Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна,* Докл. АН СССР **60**, No. 9 (1948), 1511–1514.
6. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности,* Мат. сб. **191**, No. 12 (2000), 51–60.
7. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов,* Алгебра и анализ **13**, вып. 5 (2001), 16–43.
8. У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции,* М., 1980.
9. Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге,* Вестн. ЛГУ, No. 11, сер. мат., физ., хим., вып. 4 (1955), 3–21.
10. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций,* М., 1975.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

Поступило 19 апреля 2004 г.

E-mail: olesov@iam-mail.febras.ru