Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

А. В. Олесов

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ И ПОЛИНОМОВ

§1. Введение

Целой функцией конечной степени, следуя С. Н. Бернштейну, мы будем называть целую функцию $f(z)$, для которой

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty.$$

Указанный верхний предел называется степенью функции $f(z)$.

Обозначим через A_σ^τ множество целых функций конечной степени, в том числе и многочленов, для которых выполняются следующие условия:

1. $f(z) \neq 0$, $\operatorname{Im} z > 0$,
2. $h_f(\pi/2) = \tau$, $h_f(-\pi/2) = \sigma$,

где

$$h_f(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r}$$

– индикатор роста функции $f(z)$. Если функция $f(z)$ класса A_σ^τ ограничена на вещественной оси и $\sigma \geqslant \tau$, то $f(z)$ – целая функция степени σ. Множество ограниченных на вещественной оси функций из A_σ^0 составляет класс функций, асимметрических в смысле Боаса.

Классический результат Бернштейна состоит в том, что если целая функция конечной степени σ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

то

$$|f'(x)| \leqslant \sigma, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Из принципа Фрагмена и Линделефа следует, что для таких функций

$$|f(z)| \leqslant e^{\sigma|y|}, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028).

Боас [1] показал, что для функций $f(z) \in A_\sigma^0$, удовлетворяющих условию (1), неравенства (2) и (3) можно заменить на более сильные:

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\sigma}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{e^{\sigma|y|}+1}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z \leqslant 0. \tag{5}$$

Н. К. Говил и К. И. Рахман [2] уточнили (4), доказав следующую теорему.

Теорема А. *Пусть* $f(z)$ *– целая функция конечной степени* σ, *и пусть*

$$f(z) \neq 0, \quad \operatorname{Im} z > -k, \quad k > 0,$$

$$h_f(\pi/2) = 0, \quad h_{f'}(\pi/2) = -\lambda < 0, \quad h_{\omega'}(\pi/2) \leqslant -\lambda < 0,$$

где $\omega = e^{i\sigma z}\overline{f}(z)$. *Тогда* (1) *влечет неравенство*

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\sigma}{1+e^{\lambda k}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Равенство достигается для функции

$$f(z) = \left[\frac{\exp(i\lambda z) - \exp(\lambda k)}{1+\exp(\lambda k)}\right]^{\sigma/\lambda}.$$

Здесь и далее,

$$\overline{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}.$$

Т. Г. Генчев [3] обобщил неравенство (4) на функцию A_σ^τ, $\sigma \geqslant \tau$, доказав, что (1) влечет точное неравенство

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sigma e^{\sigma|y|} + |\tau| e^{-\tau|y|}\right), \quad y = \operatorname{Im} z \leqslant 0. \tag{6}$$

Кроме того, он показал, что если для целой функции $f(z)$, удовлетворяющей неравенству (1),

$$\overline{f}(z)e^{i(\sigma-\tau)z} \in A_\sigma^\tau, \quad \tau \leqslant 0,$$

то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f'(x)| \geqslant \frac{1}{2}(\sigma + |\tau|). \tag{7}$$

В [4] Р. Б. Гарднер и Н. К. Говил установили, что для функций $f(z) \in A^0_\sigma$, удовлетворяющих (1),

$$|\sigma f(z) + i(1-\zeta)f'(z)| \leqslant \frac{\sigma}{2}\big(|\zeta|e^{\sigma|y|}+1\big), \quad y = \operatorname{Im} z \leqslant 0, \quad |\zeta| \geqslant 1. \quad (8)$$

Оба неравенства Боаса содержатся в (8) как частные случаи при $\zeta = \infty$ и $\zeta = 1$.

В настоящей работе доказывается ряд точных неравенств для функций из A^τ_σ. Для любых z и ζ из нижней полуплоскости получена двусторонняя оценка модуля $|L(z)|$,

$$L(z) := \frac{f(z)}{\overline{f}(z)e^{i(\sigma-\tau)z}},$$

зависящая от z, ζ и $|L(\zeta)|$ (теорема 1). Данный результат уточняет неравенство

$$|L(z)| \leqslant 1, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0, \quad (9)$$

вытекающее из леммы Б. Я. Левина. Утверждение теоремы 5 является другим уточнением неравенства (9). В теореме 3 оценивается величина $\operatorname{Im}\{f'(x)/f(x)\}$ на вещественной оси. Этот результат можно рассматривать как оценку $|L'(x)|$ снизу через значения модуля $|L(z)|$ в точках нижней полуплоскости. Следствие 2 уточняет неравенство (6), а следствие 4 усиливает его. Следствие 3 обобщает и усиливает теорему А. При этом выясняется, что условие

$$h_{\omega'}(\pi/2) \leqslant -\lambda < 0,$$

фигурирующие в формулировке теоремы А, является лишним. Следствие 5 обобщает и усиливает (7). Для тригонометрических полиномов указанные теоремы усилены и записаны в терминах алгебраических полиномов. В работе также усиливается неравенство Эрдеша–Лакса [5] (следствия 7, 9), усиливается и обобщается неравенство Турана [6] (следствие 10). Следствие 8 усиливает следующее утверждение, принадлежащее Чену и Малику [7].

Теорема B. *Пусть полином* $p(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k z^k$ *не обращается в нуль в круге* $|z| < k$, $k \geqslant 1$, *тогда*

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \leqslant \frac{n}{1+k'}\max_{|z|=1}|p(z)|.$$

Если l является делителем n, то для полинома $p(z) = (z^l + k^l)^{n/l}$ имеет место равенство.

Легко видеть, что теорема B являлась бы простым следствием теоремы A, если бы не ограничение на $\omega'(z)$, которое, как уже было сказано, является лишним.

Последняя теорема уточняет неравенство Гарднера и Говила для $|\zeta| = 1$, а вместе с неравенством Боаса (4) содержит (8).

Доказательства основных теорем основываются на построении по заданной функции $f(z) \in A_\sigma^\tau$ конформного и однолистного отображения $w = g(\xi)$ и на последующем применении к этому отображению результатов геометрической теории функций. Данный подход к получению неравенств для полиномов был предложен В. Н. Дубининым в работах [8, 9]. Для доказательства теоремы 7 используется теорема автора для мажорантных аналитических функций.

§2. Некоторые конформные отображения

Важную роль в работе играет лемма Б. Я. Левина [10], являющаяся обобщением известного принципа Фрагмена и Линделефа.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ и $\omega(z)$ – целые функции конечной степени, причем $\omega(z)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости и*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\psi(z) = f(z)/\omega(x)$ – функция экспоненциального типа в верхней полуплоскости, причем

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ k = h_\psi(\pi/2)$$

и

$$|\psi(z)| \leqslant e^{ky}, \quad y = \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Пусть $f(z) \in A_\sigma^\tau$. Зафиксируем какую либо точку ζ, $\operatorname{Im}\zeta < 0$, для которой $f(\zeta) \neq 0$, и введем в рассмотрение функцию

$$\xi = F_1(w) = wL^{-1}[z(w)], \quad |w| < 1,$$

где

$$z(w) = \frac{\overline{\zeta} w + \zeta}{w + 1}$$

– конформное отображение единичного круга на нижнюю полуплоскость такое, что $z(0)=\zeta$.

Пусть $\mathfrak{D}$ – совокупность областей, составляющих множество

$$\{w:\,|w|<1\}\setminus\{w:|F_1(w)|=1\}.$$

Из неравенства (9), справедливого в силу леммы 1, следует, что при приближении точки w к границе каждой области из $\mathfrak{D}$ все предельные значения модуля $|F_1(w)|$ больше либо равны единице. Кроме того,

$$|F_1'(0)|=[L(\zeta)]^{-1}\neq 0.$$

Повторяя доказательство леммы 2.2 [9] по отношению к функции $F_1(w)$, убеждаемся, что для любой области $D\in\mathfrak{D}$ либо $F_1(D)\cap\{\xi:|\xi|<1\}=\varnothing$, либо $F_1(D)=\{\xi:|\xi|<1\}$. Во втором случае существует обратная к $F_1(w)$ функция $w=g_1(\xi)$, однолистно отображающая круг $|\xi|<1$ на область D.

Обозначим через B_m^n множество функций вида

$$P(z)=\sum_{k=-n}^{m}c_kz^k,\quad c_{-n}\neq 0,\quad c_m\neq 0,\quad n,m\in\mathbb{Z},\ -n\leqslant m,\tag{10}$$

не имеющих нулей в области $0<|z|<1$.

На множестве $|z|>1$ рассмотрим аналитическую функцию

$$H(z):=\frac{P(z)}{\overline{P}(1/z)z^{m-n}}.$$

В силу обобщенного принципа максимума (или свойства дробно линейного отображения), $|H(z)|\leqslant 1$, $|z|>1$.

Зафиксируем число ζ, $|\zeta|>1$, для которого $P(\zeta)\neq 0$, либо положим $\zeta=\infty$. Введем в рассмотрение функцию

$$\xi=F_2(w):=wH^{-1}[z(w)],\quad |w|<1,$$

где

$$z(w)=\begin{cases}(w-\zeta)/(\overline{\zeta}w-1), & \text{если}\ \ \zeta\neq\infty,\\ 1/w, & \text{если}\ \ \zeta=\infty\end{cases}$$

переводит единичный круг на его внешность так, что $z(0)=\zeta$.

Все вышесказанное для функции $\xi=F_1(w)$ легко переносится на функцию $\xi=F_2(w)$. Обозначим через $w=g_2(\xi)$, $|\xi|<1$, соответствующую обратную к $F_2(w)$ функцию.

§3. Неравенства для целых функций

Пусть $w = \Phi(z)$ – функция, являющаяся обратной к функции Жуковского

$$z = \Psi(w) := \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \quad |w| > 1.$$

Теорема 1. *Если $f(z) \in A_\sigma^\tau$, то для любых z и ζ, $z \neq \zeta$, из полуплоскости* $\operatorname{Im} z < 0$ *выполняется*

$$|L(z)| \leqslant r(z,\zeta)\Phi\left(|L(\zeta)|(\Psi[r(z,\zeta)] - 1) + 1\right) \leqslant 1. \tag{11}$$

В случае $|L(\zeta)| \neq 0$, $r(z,\zeta) < r_\zeta$ имеем

$$|L(z)| \geqslant r(z,\zeta)\Phi\left(|L(\zeta)|(\Psi[r(z,\zeta)] + 1) - 1\right). \tag{12}$$

Здесь

$$r(z,\zeta) = \left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|;$$

$$r_\zeta = 2|L(\zeta)|^{-1} - 1 - 2\sqrt{|L(\zeta)|^{-1}(|L(\zeta)|^{-1} - 1)}.$$

При $L(\zeta) \neq 0$ равенства в (11), (12) достигаются для функций, удовлетворяющих тождеству $L(z) \equiv \eta$, $|\eta| = 1$, и только для них.

Доказательство. Пусть $\lambda = |L(\zeta)| \neq 0$; $w = g_1(\xi)$ – соответствующая однолистная функция из п. 2. Очевидно, $g_1'(0) = L(\zeta)$. Функция $g^*(\xi) = g_1(\xi)/g_1'(0)$ в круге $|\zeta| < 1$ однолистна, по модулю меньше чем λ^{-1} и представляется степенным рядом

$$g^*(\xi) = \xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \ldots. \tag{13}$$

В классе таких функций известны точные оценки

$$\left(\frac{1 + |\lambda g^*(\xi)|}{1 + |\xi|}\right)^2 \leqslant \left|\frac{g^*(\xi)}{\xi}\right| \leqslant \left(\frac{1 - |\lambda g^*(\xi)|}{1 - |\xi|}\right)^2, \quad 0 < |\xi| < 1, \tag{14}$$

причем равенство слева или справа, хотя бы в одной точке, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{g^*(\xi)}{[1 + e^{i\alpha}\lambda g^*(\xi)]^2} \equiv \frac{\xi}{(1 + e^{i\alpha}\xi)^2}, \tag{15}$$

α вещественно (см. [12, 13]).

Пусть $w \neq 0$, $|w| = r$, – точка множества $g(|\xi| < 1)$. Правое неравенство в (14) дает

$$\frac{(1-|F(w)|)^2}{|F(w)|} \leqslant \lambda \frac{(1-r)^2}{r}.$$

Ввиду строгого убывания функции $y = (x-1)^2/x$ на промежутке $0 < x < 1$, существует единственный корень $\beta_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(1-r)^2 x = r(1-x)^2$, лежащий в интервале $[r, 1)$. По этой же причине имеет место неравенство

$$|F(w)| \geqslant \beta_{\lambda,r}, \tag{16}$$

которое, тем более, выполняется для точек $w \notin g(|\xi| < 1)$. Неравенство (16) эквивалентно (11), в чем легко убедится, сделав замену $w = (\zeta - z)/(z - \overline{\zeta})$.

Пусть w, $|w| = r < r_\zeta$, – точка множества $g(|\xi| < 1)$. Левое неравенство в (14) и строгое убывание функции $y = (1+x)^2/x$ на промежутке $0 < x < 1$ дают

$$\frac{(1+|F(w)|)^2}{|F(w)|} \geqslant \lambda \frac{(1+r)^2}{r} > \lambda \frac{(r_\lambda + 1)^2}{r_\lambda} = 4.$$

Следовательно, существует единственный корень $\alpha_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(1+r)^2 x = r(1+x)^2$, лежащий в интервале $[r, 1)$, и для этого корня имеем

$$|F(w)| \leqslant \alpha_{\lambda,r}. \tag{17}$$

Покажем теперь, что любая точка $w \neq 0$, $|w| < r_\zeta$, принадлежит области $g_1(|\xi| < 1)$. Предположим противное, что имеет место неравенство

$$r_\zeta > r^* = \sup\{r : r < 1,\ |F(w)| < 1,\ \forall\, w,\ |w| = r\}.$$

Очевидно, на окружности $|w| = r^*$ найдется точка w^*, для которой

$$|F_1(w^*)| = 1. \tag{18}$$

С другой стороны, для любой последовательности точек w_k, $|w_k| < r^*$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к w^*, оценка (17) дает

$$|F(w_k)| \leqslant \alpha_{\lambda,r^*}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

что противоречит условию (18). Следовательно, (17) выполняется для любых w, $|w| = r < r_\zeta$, что эквивалентно (12).

Приступим к доказательству утверждения о случаях равенства. Пусть $|L(\zeta)| < 1$ и пусть функция $g_1(\xi)/g_1'(0)$ удовлетворяет тождеству (14). Не составляет труда проверить, что $g_1(\xi)$ отображает круг $|\xi| < 1$ на круг $|w| < 1$ с разрезом вдоль радиального отрезка положительной длины, но это, очевидно, противоречит аналитичности функции $F(w)$ во всем круге $|w| < 1$. Следовательно, при $|L(\zeta)| < 1$ неравенства (16), (17) являются строгими. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $P(z) \in B_m^n$, то для любых z и ζ, $z \neq \zeta$, из области $1 < |z| \leqslant \infty$ выполняется*

$$|H(z)| \leqslant r(z,\zeta)\Phi\left(|H(\zeta)|(\Psi[r(z,\zeta)] - 1) + 1\right) \leqslant 1.$$

В случае $|H(\zeta)| \neq 0$, $r(z,\zeta) < r_\zeta$ имеем

$$|H(z)| \geqslant r(z,\zeta)\Phi\left(|H(\zeta)|(\Psi[r(z,\zeta)] + 1) - 1\right).$$

Здесь

$$r(z,\zeta) = \left|\frac{z-\zeta}{z\bar\zeta - 1}\right|;$$

$$r_\zeta = 2|H(\zeta)|^{-1} - 1 - 2\sqrt{|H(\zeta)|^{-1}(|H(\zeta)|^{-1} - 1)}.$$

При $H(\zeta) \neq 0$ равенство в обоих неравенствах достигается для функций с нулями из множества $\{|z| = 1\} \cup \{0\}$, и только для них.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с заменой функций $F_1(w)$, $g_1(\xi)$ на $F_2(w)$ и $g_2(\xi)$.

Замечание 1. Если функция $f(z) \in A_\sigma^\tau$ имеет период $2\pi/\mu$, то она является тригонометрическим полиномом $P(e^{i\mu z})$, где $P(z) \in B_m^n$, $m = \sigma/\mu$, $n = \tau/\mu$. Пусть $0 < \lambda < 1$. Функция $r\Phi\left(\lambda(\Psi[r] - 1) + 1\right)$ убывает при убывании r на промежутке $(0, 1)$, а функция $r\Phi\left(\lambda(\Psi[r] + 1) - 1\right)$ возрастает при убывании r на промежутке $(0, \Phi^{-1}(2\lambda^{-1} - 1))$. Так как имеет место неравенство

$$\left|\frac{e^{iz} - e^{i\zeta}}{e^{iz}\overline{e^{i\zeta}} - 1}\right| \leqslant \left|\frac{z-\zeta}{z - \bar\zeta}\right|, \quad \operatorname{Im} z < 0,\ \operatorname{Im}\zeta < 0,$$

которое не изменится, если слева заменить z и ζ на μz и $\mu\zeta$, то теорема 2 фактически представляет собой усиление теоремы 1 для функций с положительным периодом.

Теорема 3. *Если $f(z) \in A_\sigma^\tau$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого z, $\operatorname{Im} z < 0$, выполняется*

$$\operatorname{Im} \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant \frac{\sigma - \tau}{2} - \left[1 - \sqrt{|L(z)|}\right] \frac{|\operatorname{Im} z|}{|x - z|^2}. \tag{19}$$

Для функций, удовлетворяющих тождеству $L(z) \equiv \eta$, $|\eta| = 1$, имеет место равенство.

Доказательство. Зафиксируем точку ζ с $\operatorname{Im}\zeta < 0$, $f(\zeta) \neq 0$, и пусть

$$z(w) = \frac{\overline{\zeta} w + \zeta}{w + 1}; \quad w(z) = \frac{\zeta - z}{z - \overline{\zeta}};$$

$w = g_1(\xi)$ – соответствующая однолистная функция из п. 2. Если точка ξ, $|\xi| = 1$, является точкой регулярности функции $g_1(\xi)$, причем $|g_1(\xi)| = 1$, то предельным переходом из правой части (14) получим

$$|g_1'(\xi)| \geqslant |L(\zeta)|^{-1/2}. \tag{20}$$

Если точка w, $|w| = 1$, является точкой регулярности функции $F_1(w)$ и одновременно лежит на границе области $D \in \mathfrak{D}$ такой, что $F_1(D) \cap \{\xi : |\xi| < 1\} = \varnothing$, то необходимо в этой точке

$$\frac{\partial |F_1|}{\partial |w|} \leqslant 0.$$

Если $F_1(D) = \{\xi : |\xi| < 1\}$, то из (20) заключаем, что в такой точке

$$\frac{\partial |F_1|}{\partial |w|} = |g_1'(\xi)|^{-1} \leqslant \sqrt{|L(\zeta)|}.$$

Таким образом, последнее неравенство выполняется во всех точках окружности $|w| = 1$ кроме $w = -1$. Непосредственно находим, что в этих точках

$$\frac{\partial |F_1|}{\partial |w|} = 1 - \frac{\partial |L|}{\partial |w|} = 1 - \frac{\partial \log |L|}{\partial |w|} = 1 - \operatorname{Re} \frac{w L'(x) z'(w)}{L(x)}, \quad x = z(w).$$

$$\frac{w(x) L'(x)}{w'(x) L(x)} = \left(\frac{\sigma - \tau}{2} - \operatorname{Im} \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \frac{|x - \zeta|^2}{|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Замечание 2. Условие (19) эквивалентно неравенству

$$|L'(x)| \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{|L(z)|}} \frac{|\operatorname{Im} z|}{|x-z|} \frac{1-|L(z)|}{|x-z|},$$

следовательно, обращается в равенство при $z = x - i\varepsilon$ и $\varepsilon \to 0$.

Следствие 1. *Если функция $f(z) \in A_\sigma^\tau$ удовлетворяет неравенству* (1), *то для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого ζ, $\operatorname{Im}\zeta < 0$,*

$$\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)}|f(x)| \geqslant$$
$$\geqslant \left[-\frac{\sigma-\tau}{2} + \left(1-\sqrt{|L(x,\, z)|}\right)\frac{|\operatorname{Im}\zeta|}{|x-\zeta|^2}\right](1-|f(x)|) - \tau,$$

где

$$L(x,\, \zeta) = \frac{f(\zeta) - e^{i\varphi}}{e^{i(\sigma-\tau)\zeta}\left[\overline{f}(\zeta) - e^{-i\varphi}\right]}, \quad \varphi = \tau(x-\zeta) + \arg f(x).$$

Доказательство. Пусть

$$F(z) = |f(x)| f(z)/f(x) - \lambda e^{i\tau(x-z)}, \quad \lambda > 1.$$

Легко проверяется, что $F(z) \in A_\sigma^\tau$. Остается применить (19) к $F(z)$ в точке x и перейти к пределу при $\lambda \to 1$.

Следствие 2. *Если функция $f(z) \in A_\sigma^\tau$, $\sigma \geqslant \tau$, удовлетворяет неравенству* (1), *то для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого ζ, $\operatorname{Im}\zeta < 0$, выполняется*

$$|f'(x)| + |\operatorname{Re} f'(x)| \leqslant \sigma + |\tau| - \Lambda(x,\, \zeta)|\operatorname{Im} f(x)|,$$

где

$$\Lambda(x,\, \zeta) = \min\left\{\sigma-\tau,\ \left[1-\sqrt{|L(\zeta)|}\right]\frac{2|\operatorname{Im} z|}{|x-z|^2}\right\}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\left|\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \sigma - \tau - \operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)} - \Lambda^*(x),$$

где $\Lambda^*(x) = \min\{\sigma-\tau,\ \sigma-\tau-2\operatorname{Im}[f'(x)/f(x)]\}$. С другой стороны,

$$\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\operatorname{Re} f'(x) - \operatorname{Re}[f'(x)/f(x)]\operatorname{Re} f(x)}{-\operatorname{Im} f(x)},$$

на основании чего находим

$$\operatorname{Re} f'(x) \leqslant \left[\sigma - \tau - \operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)}\right] |\operatorname{Im} f(x)| +$$
$$\operatorname{Re}\frac{f'(x)}{f(x)} \operatorname{Re} f(x) - \Lambda^*(x)|\operatorname{Im} f(z)| \leqslant$$
$$\leqslant |f'(x) - i(\sigma-\tau)f(x)| - \Lambda^*(x)|\operatorname{Im} f(x)|. \tag{21}$$

В [3, неравенство (8)] показано, что

$$|f'(x)| + |f'(x) - i(\sigma-\tau)f(x)| \leqslant \sigma + |\tau|. \tag{22}$$

Остается прибавить $|f'(x)|$ к левой и правой частям неравенства в (21) и заметить, что, в силу (19), $\Lambda^*(x) \geqslant \Lambda(x, z)$.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Пусть P – класс целых функций $\omega(z)$ конечной степени, удовлетворяющих условиям

$$h_\omega(-\pi/2) - h_\omega(\pi/2) \geqslant 0, \quad \omega(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Пусть P_σ – класс функций $\omega(z) \in P$ степени $\sigma \geqslant 0$.

Функция $\omega(z) \in P$ называется P-мажорантой целой функции $f(z)$, если при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$

$$|f(z)| \leqslant |\omega(z)|, \quad |f((\overline{z})| \leqslant |\omega(z)|.$$

Класс P подробно изучен в книге Б. Я. Левина [11].

Следствие 3. *Пусть $f(z)$ – целая функция конечной степени, удовлетворяющая неравенству* (1),*и пусть*

$$f(z) \neq 0, \quad \operatorname{Im} z > -k, \quad k > 0,$$

$$h_f(\pi/2) = \tau, \quad h_f(-\pi/2) = \sigma, \quad \sigma \geqslant \tau,$$

$$h_{f'}(\pi/2) \leqslant \tau - \lambda, \quad \lambda > 0.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого ζ, $\operatorname{Im}\zeta < -k$, выполняется

$$|f'(x)| + |f'(x)|^2 \frac{e^{2\lambda k} - 1}{2(\sigma + |\tau|)} \leqslant$$
$$\frac{\sigma + |\tau|}{2} - |f(x)|^2 \frac{\sigma - \tau}{\sigma + |\tau|}\left[1 - \sqrt{\left|\frac{f(\zeta)e^{k(\sigma-\tau)}}{\overline{f}(\zeta + 2ik)e^{k(\sigma-\tau)\zeta}}\right|}\,\right] \frac{|\operatorname{Im}\zeta| - k}{|x - \zeta|^2}.$$

Доказательство. Не составляет труда проверить, что для $g(z) \in A_\sigma^\tau$, $\sigma > \tau$, (19) эквивалентно неравенству

$$\left|\frac{g'(x)}{g'(x) - i(\sigma-\tau)g(x)}\right|^2 + \left|\frac{g'(x)}{g(x) - i(\sigma-\tau)g(x)}\right|^2 \times$$

$$\times 2(\sigma-\tau)\frac{|\operatorname{Im}\zeta|}{|x-\zeta|^2}\Big[1 - \sqrt{|L(\zeta)|}\Big] \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}\zeta < 0. \tag{23}$$

Пусть $g(z) \in A_\sigma^\tau$, $\sigma \geqslant \tau$, – функция, ограниченная на вещественной оси, причем $h_{g'}(\pi/2) \leqslant \tau - \lambda$. Вводя обозначения

$$C_\zeta = 2(\sigma-\tau)|\operatorname{Im}\zeta|\Big[1 - \sqrt{|L(\zeta)|}\Big], \quad \widetilde{g}(z) = g'(z) - i(\sigma-\tau)g(z),$$

для $z \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im}\zeta < 0$ из (23) получим

$$\left|\left[\frac{g'(z)e^{-i\lambda z}}{\widetilde{g}(z)}\right]^2 + \left[\frac{g(z)}{\widetilde{g}(z)}\right]^2 \frac{e^{i\alpha}C_\zeta}{(z-\zeta)^2}\right| \leqslant 1 \tag{24}$$

при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\omega(z) = \overline{g}(z)e^{i(\sigma-\tau)z}.$$

Очевидно, $\omega(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и $h_\omega(\pi/2) \leqslant h_\omega(-\pi/2)$. Таким образом, $\omega(z)$ – функция класса P_σ, поэтому [10]

$$\omega'(z) = e^{i(\sigma-\tau)z}\left[\,\overline{g}\,'(z) + i(\sigma-\tau)\overline{g}(z)\right] \in P_\sigma.$$

Следовательно,

$$\widetilde{g}(z) \neq 0, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

кроме того, в силу ограниченности $\omega'(z)$ на $\mathbb{R}$,

$$h_{\widetilde{g}}(\pi/2) = h_{\omega'}(-\pi/2) + \tau - \sigma = \tau.$$

Таким образом, согласно лемме 1, неравенство (24) выполняется для всех $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. В виду произвольности числа α из (24) для $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ получим

$$\left|g'(z)e^{-i\lambda z}\right|^2 + C_\zeta\left|\frac{g(z)}{z-\zeta}\right|^2 \leqslant \left|g'(z) - i(\sigma-\tau)g(z)\right|^2. \tag{25}$$

Ограниченность целой функции конечной степени на какой-либо прямой эквивалентна ограниченности данной функции на любой параллельной прямой, поэтому функция $g(z) = f(z - ik) \in$

A_σ^τ, $\sigma \geqslant \tau$, ограничена на вещественной оси. Для доказательства остается применить к данной функции неравенство (25) в точках $z = x + ik$, $x \in \mathbb{R}$, и заметить, что из (22) вытекает неравенство

$$|f'(x) - i(\sigma - \tau)f(x)| \leqslant \sigma + |\tau| - |f'(x)|.$$

Следствие 4. *Если функция $f(z) \in A_\sigma^\tau$, $\sigma \geqslant \tau$, удовлетворяет неравенству* (1), *то для любого z, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, и любого ζ, $\operatorname{Im}\zeta > 0$, выполняется*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{\sigma|e^{i\sigma z}| + |\tau|\,|e^{-i\tau z}|}{2} -$$

$$-|f(z)|^2 \frac{\sigma - \tau}{\sigma|e^{i\sigma z}| + |\tau|\,|e^{-i\tau z}|}\Big[1 - \sqrt{|\overline{f}(\zeta)e^{i(\sigma-\tau)\zeta}/f(\zeta)|}\,\Big]\frac{\operatorname{Im}\zeta}{|z-\zeta|^2}.$$

Доказательство. Неравенство (23) можно переписать следующим образом:

$$|f'(z)|^2 + C_\zeta\left|\frac{f(z)}{z-\zeta}\right|^2 \leqslant \left|e^{i(\sigma-\tau)z}\Big[\overline{f}\,'(z) + i(\sigma-\tau)\overline{f}(z)\Big]\right|^2, \qquad (26)$$

$$z \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}\zeta < 0, \quad C_\zeta = 2(\sigma - \tau)|\operatorname{Im}\zeta|\Big[1 - \sqrt{|L(\zeta)|}\,\Big].$$

Также, как в доказательстве следствия 3, можно показать, что (26) выполянется для всех $\operatorname{Im} z \leqslant 0$. Остается воспользоваться неравенством

$$\left|e^{i(\sigma-\tau)z}\Big[\overline{f}\,'(z) + i(\sigma-\tau)\overline{f}(z)\Big]\right| \leqslant \sigma|e^{i\sigma z}| + |\tau|\,|e^{-i\tau z}| - |f'(z)|,$$

$\operatorname{Im} z \leqslant 0$, доказанным в работе [3, неравенство (8)].

Способ доказательства следствия 4 незначительно отличается от способа доказательства неравенства (6) в работе [3], в которой аналог неравенства (26) для всей нижней полуплоскости был получен из теоремы Левина [10, 11].

Следствие 5. *Пусть для функции $f(z)$ конечной степени*

$$h_f(\pi/2) = \tau, \;\; h_f(-\pi/2) = \sigma,$$

и, кроме того, $f(z) \neq 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого z, $\operatorname{Im} z < 0$, выполняется

$$\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)} \geqslant \frac{\sigma - \tau}{2}\Big[1 - \sqrt{|\overline{f}(\zeta)e^{i(\sigma-r)\zeta}/f(\zeta)|}\,\Big]\frac{\operatorname{Im}\zeta}{|z-\zeta|^2},$$

где $L^*(z) = \overline{f}(z)e^{i(\sigma-\tau)z}/f(z)$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3 к функции

$$\overline{f}(z)e^{i(\sigma-\tau)z} \in A_\sigma^\tau,$$

или к функции $\overline{f}(z) \in A_\tau^\sigma$.

Теорема 4. *Если* $P(z) \in B_m^n$, *то для любого* z, $|z| = 1$, *и любого* ζ, $1 < |\zeta| \leqslant \infty$, *выполняется*

$$\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \leqslant \frac{m-n}{2} - \left[1 - \sqrt{|H(\zeta)|}\right]\frac{|\zeta|^2-1}{2|z-\zeta|^2}. \tag{27}$$

Для функций с нулями из множества $\{|z| = 1\} \cup \{0\}$ *это неравенство превращается в равенство.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3 с заменой функций $F_1(w)$, $g_1(\xi)$ на $F_2(w)$ и $g_2(\xi)$.

При $\zeta = \infty$ (27) эквивалентно неравенству В. Н. Дубинина [6, с. 58].

Следствие 6. *Если* $P(z) \in B_m^n$, *то для любого* z, $|z| = 1$, *и любого* ζ, $|\zeta| > 1$, *выполняется*

$$\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)}|P(z)| \geqslant \left[-\frac{m-n}{2} + \left(1 - \sqrt{|H(z,\zeta)|}\right)\frac{|\zeta|^2-1}{2|z-\zeta|^2},\right] \times$$

$$\times (M - |P(z)|) - nM, \quad M = \max_{|z|=1}|P(z)|,$$

$$H(z,\zeta) = \frac{P(\zeta) - MF}{\zeta^{m-n}\left[\overline{P}(1/\zeta) - MF^{-1}\right]}, \quad F = P(z)z^n\zeta^{-n}/|P(z)|.$$

Доказательство. Для доказательства неравенства в точке $z = z_0$, $|z_0| = 1$, достаточно применить (27) к функции

$$Q(z) = |P(z_0)|P(z)/P(z_0) - Mz_0^n z^{-n} \in B_m^n$$

в указанной точке.

Следствие 7. *Если* $P(z) \in B_m^n$, $m \geqslant n$, *то для любого* z, $|z| = 1$,

$$|P'(z)| + |\operatorname{Im}\{zP'(z)\}| \leqslant (m+|n|)M - \bigl(1 - \sqrt{|c_m/c_{-n}|}\bigr)|\operatorname{Im} P(z)|,$$

где $M = \max\limits_{|z|=1} |P(z)|$.

Доказательство. Очевидно,

$$\left|\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)}\right| = m - n - \operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} - \Lambda(z),$$

где $\Lambda(z) = \min\{m-n,\, m-n-2\operatorname{Re}[zP'(z)/P(z)]\}$. С другой стороны,

$$\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{\operatorname{Im}\{zP'(z)\} - \operatorname{Im}[zP'(z)/P(z)]\operatorname{Re} P(z)}{\operatorname{Im} P(z)}.$$

Отсюда получим оценку

$$\operatorname{Im}\{zP'(z)\} \leqslant \left[m - n - \operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)}\right]|\operatorname{Im} P(z)| + \operatorname{Im}\frac{zP'(z)}{P(z)}\operatorname{Re} P(z) -$$

$$-\Lambda(z)|\operatorname{Im} P(z)| \leqslant |zP'(z) - (m-n)P(z)| - \Lambda(z)|\operatorname{Im} P(z)|. \tag{28}$$

Неравенство (22) для функции $f(t) = P(e^{it})/M$ дает

$$|P'(z)| + |zP'(z) - (m-n)P(z)| \leqslant (m+|n|)M.$$

Остается прибавить $|P'(z)|$ к левой и правой частям неравенства (28) и заметить, что (27) при $\zeta = \infty$ превращается в неравенство $\Lambda(z) \geqslant 1 - \sqrt{|c_m/c_{-n}|}$.

Следствие 8. *Если полином*

$$P(z) = c_0 + \sum_{k=l}^{n} c_k z^k, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

не обращается в нуль в круге $|z| < k$, $k > 1$, *то для любого* z, $|z| = 1$, *и любого* ζ, $k < |\zeta| \leqslant \infty$, *выполняется*

$$|P'(z)| + |P'(z)|^2 \frac{k^{2l}-1}{2nM} \leqslant$$

$$\leqslant M\frac{n}{2} - \frac{|P(z)|^2}{2M}\left[1 - \sqrt{\left|\frac{P(\zeta)k^n}{\overline{P}(k^2/\zeta)\zeta^n}\right|}\right]\frac{|\zeta|^2 - k^2}{|z-\zeta|^2}, \tag{29}$$

где $M = \max\limits_{|z|=1} |P(z)|$.

Доказательство. Пусть $Q(z) = c_0 + c_l z^l + \dots + c_n z^n$ – полином n-й степени, не имеющий нулей в круге $|z| < 1$. Не составляет труда проверить, что неравенство (27) для $Q(z) \in B_n^0$ эквивалентно неравенству

$$\left|\frac{Q'(z)}{nQ(z) - zQ'(z)}\right|^2 + n\left|\frac{Q(z)}{nQ(z) - zQ'(z)}\right|^2 \frac{|\zeta|^2 - 1}{|z-\zeta|^2}\Big[1 - \sqrt{|H(\zeta)|}\Big] \leqslant 1,$$

$|z| = 1$, $|\zeta| > 1$. Все нули полинома $q(z) = z^n Q(1/z)$ лежат в круге $|z| \leqslant 1$, следовательно, по теореме Гаусса–Лукаса,

$$q'(1/z) = z^{1-n}\big[nQ(z) - zQ'(z)\big] \neq 0, \quad o < |z| < 1.$$

Используя принцип максимума модуля, легко находим, что для всего круга $|z| \leqslant 1$ выполняется

$$|Q'(z)|^2 + n|Q(z)|^2\Big[1 - \sqrt{|H(\zeta)|}\Big]\frac{|\zeta|^2 - 1}{|z-\zeta|^2}\,|z|^{2l-2} \leqslant$$
$$\leqslant |nQ(z) - zQ'(z)|^2 |z|^{2l-2}. \quad (30)$$

Остается применить (30) к полиному $Q(z) = P(kz)$ в точках окружности $|z| = 1/k$ и воспользоваться неравенством

$$|zP'(z) - nP(z)| \leqslant nM - |P'(z)|, \quad |z| = 1, \qquad (31)$$

вытекающим из (22).

Замечание 3. Если $P(z)$ – полином, не имеющий нулей в круге $|z| < 1$, то применяя (30) к полиному

$$Q(z) = P(z) - e^{i\alpha} \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

и выбирая α подходящим образом, можно получить некоторое усиление неравенства (31). Отметим, что (31) выполняется для любых алгебраических полиномов, независимо от расположения их нулей [2].

Следствие 9. *Если* $P(z) \in B_m^n$, $m \geqslant n$, *то для любого* z, $|z| = 1$, *и любого* ζ, $1 < |\zeta| \leqslant \infty$, *выполняется*

$$|P'(z)| \leqslant M\frac{m + |n|}{2} - \frac{|P(z)|^2}{2M}\,\frac{m-n}{m+|n|}\Big[1 - \sqrt{|H(\zeta)|}\Big]\frac{|\zeta|^2 - 1}{|z-\zeta|^2},$$
$$M = \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 8.

Следствие 10. *Пусть $P(z)$ – сумма вида (10) и $P(z) \neq 0$ в области $|z| > 1$. Тогда для любого z, $|z| = 1$, и любого ζ, $1 < |\zeta| \leqslant \infty$, выполняется*

$$\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \geqslant \frac{m-n}{2} + \left[1 - \sqrt{\left|\zeta^{m-n}\overline{P}(1/\zeta)/P(\zeta)\right|}\,\right]\frac{|\zeta|^2}{2|z-\zeta|^2}.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 4 к функции $z^{m-n}\overline{P}(1/\zeta) \in B_m^n$ или к функции $\overline{P}(1/\zeta) \in B_n^m$.

Теорема 5. *Если $f(z) \in A_\sigma^\tau$, то для любого z, $\operatorname{Im} z < 0$, выполняется*

$$|L(z)|\left(1 + |\operatorname{Im} z|\left|\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\overline{f'}(z)}{\overline{f}(z)} - i(\sigma-\tau)\right|\right) \leqslant 1. \tag{32}$$

Равенство достигается лишь для функций, удовлетворяющих тождеству $L(z) \equiv \eta$, $|\eta| = 1$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im}\zeta < 0$ и $f(\zeta) \neq 0$. В некоторой проколотой окрестности точки $w = 0$ рассмотрим функцию

$$\Delta(w) = w\frac{F_1'(w)}{F_1(w)} = 1 - wz'(w)\frac{L'(z(w))}{L(z(w))}, \quad z(w) = \frac{\overline{\zeta}w + \zeta}{w+1}.$$

Непосредственные вычисления дают

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Delta(w)-1}{w} = -2i|\operatorname{Im}\zeta|\left[\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{\overline{f'}(\zeta)}{\overline{f}(\zeta)} - i(\sigma-\tau)\right].$$

С другой стороны, на основании правила Лопиталя,

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Delta(w)-1}{w} = \frac{F''(0)}{2F'(0)}.$$

Учитывая эти равенства, не составляет труда найти, что в разложении (13)

$$\alpha_2 = 2i|\operatorname{Im}\zeta|\left[\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{\overline{f'}(\zeta)}{\overline{f}(\zeta)} - i(\sigma-\tau)\right]L(\zeta).$$

По хорошо известному неравенству для второго коэффициента ограниченной нормированной однолистной в единичном круге функции [13, с. 94],

$$|\alpha_2| \leqslant 2(1 - |L(\zeta)|), \tag{33}$$

что эквивалентно неравенству теоремы.

Для доказательства утверждения о случае равенства отметим, что равенство в (33) [13, с. 94] возможно лишь в случае выполнения тождества (14), что имеет место, как было показано в доказательстве теоремы 1, лишь для указанных функций. Равенство в (32) невозможно также и в точках, в которых $L(z) = 0$. В самом деле, пусть ζ – нуль первой кратности функции $f(z)$ и пусть $f^*(z) = f(z)/(z-\zeta)$. Легко проверить, что (32) в точке ζ превращается в неравенство

$$\left|\frac{f^*(\zeta)}{e^{i(\tau-\sigma)\zeta}\overline{f^*}(\zeta)}\right| \leqslant 2,$$

являющееся, согласно (9), строгим. Теорема доказана.

Теорема 6. *Если $P(z) \in B_m^n$, то для любого z, $1 < |z| \leqslant \infty$, выполняется*

$$|H(z)|\left(1 + \frac{|z|^2-1}{2|z|}\left|\frac{zP'(z)}{P(z)} + \frac{\overline{P'}(1/z)}{z\overline{P}(1/z)} - m + n\right|\right) \leqslant 1.$$

Равенство достигается лишь для функций с нулями из множества $\{|z| = 1\} \cup \{0\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5 с заменой функций $F_1(w)$, $g_1(\xi)$ на $F_2(w)$ и $g_2(\xi)$.

При $z = \infty$ теорема 6 дает

Следствие 11. *Если $P(z) \in B_m^n$, то для коэффициентов представления (10) справедливо неравенство*

$$\left|\frac{c_m}{c_{-n}}\right|\left(1 + \frac{1}{2}\left|\frac{c_{-n+1}}{c_{-n}} - \frac{\overline{c_{m-1}}}{\overline{c_m}}\right|\right) \leqslant 1.$$

Теорема 7. *Если функция $f(z) \in A_\sigma^0$ удовлетворяет неравенству (1), то для любого ζ, $|\zeta| = 1$, и любого $z = x+iy$, $y < 0$, выполняется*

$$|D_\zeta f(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma}{2}\frac{e^{2\sigma|y|}-1}{\sqrt{e^{2\sigma|y|} - 2e^{\sigma|y|}\operatorname{Re}\{D_\zeta f(z)\overline{D_\zeta f}(z)\}/|D_\zeta f(z)\overline{D_\zeta f}(z)| + 1}}, \qquad (34)$$

где

$$D_\zeta f(z) = \sigma f(z) + i(1-\zeta) f'(z),$$
$$\overline{D_\zeta f}(z) = \sigma \overline{f}(z) + i(\zeta^{-1}-1)\overline{f'}(z).$$

Для функций вида

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha} e^{i\sigma z} + e^{i\beta}}{2},$$

где α и β – произвольные вещественные числа, неравенство превращается в равенство.

Доказательство. Пусть

$$f_1(z) = e^{-i\sigma z/2} f(z), \quad \omega(z) = e^{i\sigma z/2}.$$

В силу леммы 1, $\omega(z)$ является P-мажорантой (см. определение перед следствием 3) для $f_1(z)$. Из теоремы Левина [10] находим (см. [14, с. 8])

$$|af_1(x) + b{f_1}'(x)| \leqslant |a\omega(x) + b\omega'(x)|, \quad x \in \mathbb{R},$$

где a, b – произвольные вещественные числа. Полагая в данном неравенстве $a = \sigma \operatorname{Re}\zeta/2$, $b = \operatorname{Im}\zeta$, получим

$$|D_\zeta f(x)| \leqslant \sigma, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда из леммы 1 вытекает, что

$$|D_\zeta f(z)| \leqslant \sigma |e^{i\sigma z}|, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0. \tag{35}$$

$\omega(z)$ является также P-мажорантой для $f_2(z) = e^{i\sigma z/2}\overline{f}(z)$. Следовательно [10],

$$|{f_2}'(z)| \leqslant |\omega'(z)|, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0.$$

Из данного неравенства легко находим, что производная $f'(z)$ ограничена в верхней полуплоскости. Поскольку ограничена и функция $f(z)$, то

$$|\overline{D_\zeta f}(z)| \leqslant \sigma, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0. \tag{36}$$

Рассмотрим вещественную функцию

$$g(z) = \frac{1}{2\sigma}\left[e^{-i\sigma z/2} D_\zeta f(z) + e^{i\sigma z/2}\overline{D_\zeta f}(z)\right].$$

В силу (35) и (36), $|g(z)| \leqslant |\omega(z)|$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$. Следовательно, функции $g(z)$ и $\omega(z)$ удовлетворяют условию теоремы 1 работы [15], согласно которой

$$|g(z)-1| + |g(z)+1| \leqslant |\omega(z)| + |\overline{\omega}(z)|, \quad z \in \mathbb{C},$$

или, что тоже самое,

$$|g(z)| \leqslant \rho\left(\arg g(z),\, |e^{i\sigma z/2}|\right), \quad \operatorname{Im} z < 0, \tag{37}$$

$$\rho(\varphi,\, r) := \frac{r^4 - 1}{2r\sqrt{r^4 - 2r^2\cos 2\varphi + 1}}.$$

Равенство в (37), согласно этой же теореме, достигается только для функций

$$g(z) = \frac{1}{2}\left[e^{i\beta}e^{i\sigma z/2} + e^{-i\beta}e^{-i\sigma z/2}\right],$$

где β – произвольное вещественное число.

Зафиксируем произвольное z_0, $\operatorname{Im} z_0 < 0$, и рассмотрим функцию

$$g^*(z) = \frac{e^{i\alpha}}{2\sigma}\left[e^{-i\sigma z/2}D_\zeta f(z) + e^{-i2\alpha}e^{i\sigma z/2}\overline{D_\zeta f}(z)\right],$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arg\frac{e^{i\sigma z_0}\overline{D_\zeta f}(z_0)}{D_\zeta f(z_0)}.$$

Непосредственно проверяются равенства

$$e^{i2\arg g^*(z_0)} = \frac{D_\zeta f(z_0)\overline{D_\zeta f}(z_0)}{|D_\zeta f(z_0)\overline{D_\zeta f}(z_0)|},$$

$$|g^*(z_0)| = \frac{1}{2\sigma}\left(\left|e^{-i\sigma z_0/2}D_\zeta f(z_0)\right| + \left|e^{i\sigma z_0/2}\overline{D_\zeta f}(z_0)\right|\right)$$

В [4] фактически было доказано, что

$$\left|e^{i\sigma z}\overline{D_\zeta f}(z)\right| \geqslant |D_\zeta f(z)|, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0.$$

Теперь легко видеть, что применение (37) к функции $g^*(z)$ в точке z_0 дает (34).

Из доказательства видно, что выполнение тождеств

$$D_\zeta f(z) \equiv e^{-i2\alpha}e^{i\sigma z}\overline{D_\zeta f}(z),$$

$$g^*(z) = e^{i\alpha} e^{-i\sigma z/2} D_\zeta f(z)/\sigma \equiv \frac{1}{2}\left[e^{i\beta} e^{i\sigma z/2} + e^{-i\beta} e^{-i\sigma z/2}\right]$$

является необходимым и достаточным условием равенства в (34). Поскольку из второго тождества следует первое, заключаем, что это условие сводится к решению дифференциального уравнения

$$D_\zeta f(z) = \frac{\sigma}{2}\left[e^{i\alpha} e^{i\sigma z} + e^{i\beta}\right],$$

где α и β – произвольные вещественные числа. Его решением является множество функций

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha}\zeta^{-1} e^{i\sigma z} + e^{i\beta}}{2} + C e^{i\sigma z/(1-\zeta)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В доказательстве теоремы 7 установлено, что равенство в (34) возможно только в случае тождества

$$D_\zeta f(z) \equiv \frac{\sigma}{2}\left[e^{i\alpha} e^{i\sigma z} + e^{i\beta}\right],$$

α, β – вещественные числа.

Следствие 12. *Если функция $f(z) \in A^0_\sigma$ удовлетворяет неравенству (1), то для любого ζ, $|\zeta| \geqslant 1$, и любого $z = x + iy$, $y \leqslant 0$, выполняется*

$$|D_\zeta f(z)| \leqslant \frac{\sigma}{2}\big(|\zeta| e^{\sigma|y|} + 1\big).$$

Доказательство. Фактически требуется доказать неравенство

$$r|\sigma f(z) + i f'(z)| + |f'(z)| \leqslant \frac{\sigma}{2}\big(e^{\sigma|y|} + r\big), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \ y = \operatorname{Im} z \leqslant 0.$$

При $r = 0$ это неравенство совпадает с неравенством Боаса (4), а при $r = 1$ оно является очевидным следствием теоремы 7. Доказательство того, что из неравенств

$$\begin{cases} a + b \leqslant 1 + c, \\ b \leqslant c, \quad a,\, b,\, c \geqslant 0 \end{cases}$$

следует неравенство $ar + b \leqslant r + c$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, тривиально.

Литература

1. R. Boas, *Inequalities for asymmetric entire functions,* Illinois J. Math. **1** (1957), 94–97.
2. N. K. Govil, Q. I. Rahman, *Functions of exponential type not vanishing in a half-plane and related polynomials,* Trans Amer. Math. Soc **137** (1969), 501–517.
3. Т. Г. Генчев, *Неравенства для асиметрических целых функций экспоненциального типа,* Докл. АН СССР **241**, No. 6 (1978), 1261–1264.
4. R. B. Gardner, N. K. Govil, *Some inequalities for entire functions of exponential type,* Proc. Amer. Math. Soc. **123**, No. 9 (1995), 2757–2761.
5. P. D. Lax, *Proof of a conjecture of P. Erdős on the derivative of a polynomial,* Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 509–513.
6. P. Turan, *Über die Ableitung von Polynomen,* Compositio Math. **7** (1939), 89–95.
7. T. N. Chan, M. A. Malik, *On Erdős–Lax theorem,* Proc. Indian Acad. Sci **92**, No. 3 (1983), 191–193.
8. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности,* Мат. сб. **191**, No. 12 (2000), 51–60.
9. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов,* Алгебра и анализ **13**, вып. 5 (2001), 16–43.
10. Б. Я. Левин, *О некоторых экстремальных свойствах целых функций конечной степени,* Докл. АН СССР **65**, No. 5 (1949), 605–608.
11. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций,* М., 1975.
12. Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки для функций регулярных и однолистных в круге,* Вестн. ЛГУ, No. 11, сер. мат., физ., хим., вып. 4 (1955), 3–21.
13. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций,* М., 1975.
14. Н. Н. Мейман, *Дифференциальные неравенства и некоторые вопросы распределения нулей целых и однозначных аналитических функций,* Успехи мат. наук **7**, вып. 3 (1952), 3–62.
15. А. В. Олесов, *Неравенства для мажорантных аналитических функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 155–173.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

E-mail: olesov@iam-mail.febras.ru

Поступило 19 апреля 2004 г.