Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Н. В. Проскурин

О НЕКОТОРОЙ КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ, СВЯЗАННОЙ С КУБИЧЕСКОЙ ТЕТА ФУНКЦИЕЙ

0. Введение

Мы намерены собщить здесь об одном наблюдении над кубической тета функцией Куботы–Паттерсона. Обозначим через $\Gamma(3)$ главную конгруенцподгруппу $\mod 3$ в $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}[\omega])$, где $\omega = \exp(2\pi i/3)$, и через $\widetilde{\Gamma}(3)$ подгруппу в $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}[\omega])$, порождённую группами $\Gamma(3)$ и $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$. Напомним, что кубическая тета функция, обозначаемая $\Theta_{\mathrm{K-P}}\colon \mathbf{H}\to\mathbf{C}$, определена на трехмерном гиперболическом пространстве $\mathbf{H}\simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})/\mathrm{SU}(2)$. Для неё имеется формула преобразования –

$$\Theta_{\mathrm{K-P}}(\gamma w) = \kappa(\gamma)\Theta_{\mathrm{K-P}}(w) \text{ для всех } \gamma\in\widetilde{\Gamma}(3), \quad w\in\mathbf{H},$$

где $\kappa\colon \widetilde{\Gamma}(3)\to\mathbf{C}^*$ – кубический гомоморфизм Куботы; мы объясним это более детально в §§ 3 и 4.

Можно заметить, что $\widetilde{\Gamma}(3)$ и $\Gamma(3)$ – подгруппы индексов 27 и 648 в $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}[\omega])$, и что числа 27 и 648 возникают также в связи с конфигурацией прямых на кубической поверхности в трехмерном проективном пространстве. Гладкая кубическая поверхность, скажем $\mathcal{X}$, в трехмерном проективном пространстве над алгебраически замкнутым полем содержит 27 прямых $l_1, l_2, \dots, l_{27}$. В действительности, не только число прямых не зависит от выбора поверхности, но также и конфигурация прямых. Под этим мы понимаем тот факт, что группа $\mathcal{P}$, сохраняющих отношения инцидентности перестановок прямых $l_1, l_2, \dots, l_{27}$, не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора поверхности $\mathcal{X}$. Эта группа $\mathcal{P}$ имеет порядок $51840 = 2^7\cdot 3^4\cdot 5$ и изоморфна группе Вейля $W(E_6)$ системы корней E_6. Мы можем сослаться на [11, 9, 17, 8, 14] и на многие другие источники. Это было замечено

Работа выполнена при поддержке Программы 2004 г. фундаментальных исследований Президиума РАН "Исследования в фундаментальных областях современной математики".

Кэли полтора столетия назад, что некоторое конечное семейство прямых должно лежать на поверхности. Позднее Салмон показал, что число прямых – 27. Мы ограничимся этим замечанием, а дальнейшую историю см. в [9].

Мы намерены определить некоторую группу порядка $648 = 2^3 \cdot 3^4$, связанную с кубической тета функцией $\Theta_{\mathrm{K-P}}$, и показать, что эта группа изоморфна подгруппе в $\mathcal{P}$. Группа, которую мы определим, имеет геометрическую интерпретацию. В действительности, несколько различных реализаций известны как для группы $\mathcal{P}$, так и для её коммутанта $\mathcal{P}'$, который является простой группой порядка $25920 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. В частности, группа $\mathcal{P}'$ изоморфна проективной симплектической группе ранга 2 над конечным полем $\mathbf{F}_3$. Отметим также, что эти группы встречаются в классической теории тета функций рода два с характеристиками. Сопоставление кубической тета функции конечной группы осуществляется посредством известного общего принципа, объяснённого в §1. Затем, в §2, мы формулируем наши результаты. Основные свойства κ и $\Theta_{\mathrm{K-P}}$ сформулированы в §§3 и 4. В §5 собраны необходимые определения и объяснение относительно группы $W(E_6)$ и симплектических групп. Затем, в §§6–10 мы доказываем все утверждения, сформулированные в §2.

Автор выражает признательность Институту математики Макса Планка в Бонне и SFB-478 в Мюнстере за гостеприимство и поддержку.

1. Основная конструкция

Пусть Δ' – подгруппа конечного индекса, скажем n, в группе Δ. Предположим, что Δ действует на некотором пространстве, скажем $\mathcal{S}$, и что $\lambda\colon \Delta' \to \mathbf{C}^*$ – гомоморфизм групп. По данной функции $f\colon \mathcal{S} \to \mathbf{C}$, удовлетворяющей условию

$$f(\gamma w) = \lambda(\gamma) f(w) \text{ для всех } \gamma \in \Delta' \text{ и } w \in \mathcal{S},$$

можно определить функцию $F\colon \mathcal{S} \to \mathbf{C}^n$ и гомоморфизм групп

$$\psi:\ \Delta\ \to\ \left\{\begin{matrix}\text{мономиальные}\\ \text{матрицы } n\times n\end{matrix}\right\} \hookrightarrow\ \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$$

таким образом, что

$$F(\gamma w) = \psi(\gamma) F(w) \text{ для всех } \gamma \in \Delta \text{ и } w \in \mathcal{S}.$$

Это делается следующим образом. Выберем $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Delta$ так, что

$$\Delta = \bigcup_{j=1,2,\dots,n} \Delta' \sigma_j \tag{1.1}$$

есть дизъюнктное объединение, и положим

$$F(w) = \begin{pmatrix} f(\sigma_1 w) \\ f(\sigma_2 w) \\ . \\ . \\ f(\sigma_n w) \end{pmatrix} \quad \text{для всех} \quad w \in \mathcal{S}.$$

Для $\gamma \in \Delta$ и $j = 1, 2, \dots, n$, имеем $\sigma_j \gamma \in \Delta$ и, ввиду (1.1), $\sigma_j \gamma \in \Delta' \sigma_k$ с некоторым k, однозначно определённым по γ и j. С этим k имеем $f(\sigma_j \gamma w) = f(\sigma_j \gamma \sigma_k^{-1} \sigma_k w) = \lambda(\sigma_j \gamma \sigma_k^{-1}) f(\sigma_k w)$. Определим теперь $\psi(\gamma)$ как мономиальную $n \times n$ матрицу[1] с jk-ой компонентой $\lambda(\sigma_j \gamma \sigma_k^{-1})$. Очевидно, ψ есть гомоморфизм групп с искомыми свойствами.

Теперь мы можем сопоставить нашим данным Δ', Δ, λ, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ и функции f группу

$$\mathcal{E} = \bigl\{ \psi(\gamma) \bigm| \gamma \in \Delta \bigr\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}).$$

Нас будут интересовать также подгруппа $\mathcal{Z}$ всех диагональных матриц в $\mathcal{E}$, подгруппа $\mathcal{C}$ всех скалярных матриц в $\mathcal{E}$, и особенно факторгруппа $\mathcal{E}/\mathcal{Z}$. (Заметим, что $\mathcal{Z}$ есть нормальная подгруппа в $\mathcal{E}$ просто потому, что $\mathcal{E}$ состоит только из мономиальных матриц.)

С точностью до изоморфизма, и даже с точностью до сопряжений в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, группы $\mathcal{C}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}/\mathcal{Z}$ не зависят от произвола в выборе представителей σ_j в (1.1). Более точно, если группы, скажем $\widehat{\mathcal{C}}$, $\widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{E}}$, построены как выше по Δ', Δ, λ, f и по некоторым $\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \dots, \widehat{\sigma}_n$ вместо $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, то найдется мономиальная матрица $h \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ такая, что $\widehat{\mathcal{C}} = h^{-1} \mathcal{C} h$, $\widehat{\mathcal{Z}} = h^{-1} \mathcal{Z} h$, $\widehat{\mathcal{E}} = h^{-1} \mathcal{E} h$.

2. Основная теорема

Применим конструкцию из §1 со следующими данными:

[1] Под мономиальной матрицей мы понимаем матрицу с единственным ненулевым элементом в каждой строке и в каждом столбце.

$\Delta = \mathrm{B}(\mathcal{O})$ – подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, порождённая $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ и ς;

$\Delta' = \mathrm{B}(3)$ – подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, порождённая $\widetilde{\Gamma}(3)$ и ς;

$\mathcal{S} = \mathbf{H}$ – трехмерное гиперболическое пространство; (2.1)

$f = \Theta_{\mathrm{K-P}}$, – кубическая тета функция Куботы–Паттерсона;

$\lambda = \kappa$, – расширенный гомоморфизм Куботы $\mathrm{B}(3) \to \mathbf{C}^*$.

Здесь и далее мы используем следующие обозначения.

$\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$ – кольцо целых рациональных, поле рациональных и поле комплексных чисел;

$\mathbf{C}^*$ – мультипликативная группа $\mathbf{C}$;

$\mathcal{O} = \mathbf{Z}[\omega]$ – кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$;

$\omega = \exp(2\pi i/3) = (-1 + \sqrt{-3}\,)/2$;

$$\varsigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}; \tag{2.2}$$

$\mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – $n \times n$ диагональная матрица с c_l на пересечении l-ой строки с l-ым столбцом;

I_n – единичная матрица $n \times n$.

Также, если q идеал кольца $\mathcal{O}$ или ненулевой элемент из $\mathcal{O}$, то

$\Gamma(q)$ – главная конгруенцподгруппа $\mathrm{mod} q$ в $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$;

$\pm\Gamma(q)$ – подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$, порождённая $\Gamma(q)$ и $-I_2$;

$\widetilde{\Gamma}(q)$ – подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$, порождённая $\Gamma(q)$ и $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$;

$\mathrm{B}(q)$ – подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, порождённая $\widetilde{\Gamma}(q)$ и ς.

В частности, группа $\mathrm{B}(\mathcal{O})$, т.е. подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, порождённая $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ и ς, известна как расширение Бианки группы $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$. Эта группа является максимальной дискретной подгруппой в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, тогда как $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ – её подгруппа индекса 2; см. Эльстродт, Грюневальд, Меннике [7, 7.4], и имеющиеся там ссылки.

Теорема. *Пусть $\psi\colon \mathrm{B}(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ – гомоморфизм, сопоставленный данным* (2.1) *в соответствии с процедурой, описанной в* § 1. *Пусть $\mathcal{E}$ – образ ψ, и пусть $\mathcal{Z}$ – подгруппа всех диагональных матриц в $\mathcal{E}$. Тогда $n = 27$, $\mathcal{Z}$ есть нормальная подгруппа в $\mathcal{E}$, и факторгруппа $\mathcal{E}/\mathcal{Z}$ изоморфна некоторой подгруппе порядка* 648 *в группе Вейля $W(E_6)$ системы корней E_6.*

Некоторая дополнительная информация о рассматриваемых группах и о гомоморфизме ψ собрана ниже в трёх предложениях.

Предложение 1. *С введёнными выше обозначениями имеем:*

$$\text{(a)}\qquad \begin{matrix} [\,\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}):\Gamma(3)] = 648 \\ \left[\widetilde{\Gamma}(3):\Gamma(3)\right] = 24 \end{matrix} \qquad \textit{и} \quad \left[\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}):\widetilde{\Gamma}(3)\right] = 27;$$

$$\text{(b)}\qquad \left[\mathrm{B}(\mathcal{O}):\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})\right] = \left[\mathrm{B}(3):\widetilde{\Gamma}(3)\right] = 2;$$

$$\text{(c)}\qquad \begin{matrix} \left[\mathrm{B}(\mathcal{O}):\pm\Gamma(3)\right] = 648 \\ \left[\mathrm{B}(3):\pm\Gamma(3)\right] = 24 \end{matrix} \qquad \textit{и} \quad \left[\mathrm{B}(\mathcal{O}):\mathrm{B}(3)\right] = 27.$$

Предложение 2. *Пусть* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{27}$ *представляют классы* $\widetilde{\Gamma}(3)\backslash\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$, *так что*

$$\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) = \bigcup_{j=1,2,\dots,27} \widetilde{\Gamma}(3)\,\sigma_j \tag{1.1}$$

есть дизъюнктное объединение. Тогда те же матрицы $\sigma_1, \sigma_2, \dots,$ σ_{27} *предствляют классы* $\mathrm{B}(3)\backslash\mathrm{B}(\mathcal{O})$, *так что*

$$\mathrm{B}(\mathcal{O}) = \bigcup_{j=1,2,\dots,27} \mathrm{B}(3)\,\sigma_j \tag{1.2}$$

тоже есть дизъюнктное объединение.

Предложение 3. *В условиях теоремы, для гомоморфизма* $\psi\colon \mathrm{B}(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}(27,\mathbf{C})$ *имеем*

(a) $\psi(\gamma)$ *есть единичная матрица для* $\gamma = \pm I_2$;

(b) $\psi(\gamma)$ *есть скалярная матрица для* $\gamma \in \pm\Gamma(9)$;

(c) $\psi(\gamma)$ *есть диагональная матрица для* $\gamma \in \pm\Gamma(3)$;

(d) $\psi(\gamma)$ *не диагональная матрица для* $\gamma \notin \pm\Gamma(3)$.

3. Гомоморфизм Куботы

Пусть $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ – символ кубического вычета в $\mathcal{O}$. Для

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(3) \quad \text{пусть} \quad \kappa(\gamma) = \begin{cases} \left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1} & \text{для} \quad c \neq 0, \\ 1 & \text{для} \quad c = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Как показано Куботой [12], так определённое отображение $\kappa\colon \Gamma(3) \to \mathbf{C}^*$ есть гомоморфизм групп. Известно, см. [15, 16], что κ можно расширить до гомоморфизма $\widetilde{\Gamma}(3) \to \mathbf{C}^*$, положив $\kappa(\gamma) = 1$ для $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$. Напомним, что группа $\widetilde{\Gamma}(3)$ порождена $\Gamma(3)$ и $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, и что $\widetilde{\Gamma}(3)$ и ς порождают группу $\mathrm{B}(3)$. Мы хотели бы заметить здесь, что

гомоморфизм Куботы κ можно расширить
до гомоморфизма $\mathrm{B}(3) \to \mathbf{C}^*$
(*за которым мы сохраним обозначение* κ), *положив* $\kappa(\varsigma) = 1$.

Это утверждение можно доказать элементарными вычислениями, используя (6.1) и (6.3) из §6. Ниже в §4 мы дадим другое доказательство.

Следующее утверждение, за ним мы отсылаем к [1], нам будет необходимо в дальнейшем:

$$\kappa(\delta^{-1}\gamma\delta) = \kappa(\gamma) \text{ для всех } \gamma \in \Gamma(9), \quad \delta \in \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}). \tag{3.2}$$

4. Кубические метаплектические формы

Пусть $\mathbf{H}$ – трехмерное гиперболическое пространство реализованное как множество пар (z, v) с $z \in \mathbf{C}$, $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$. Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ действует на $\mathbf{H}$ таким образом, что образ γw точки $w = (z, v) \in \mathbf{H}$ относительно

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$$

есть

$$\gamma w = \Big(\frac{(az+b)\,\overline{(cz+d)} + a\bar{c}v^2}{|cz+d|^2 + |c|^2v^2}, \frac{v}{|cz+d|^2 + |c|^2v^2}\Big).$$

Центр группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, состоящий только из матриц $\pm I_2$, действует тривиально на $\mathbf{H}$, так что имеется индуцированное действие группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$. Согласно Пуанкаре, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ есть группа всех сохраняющих ориентацию изометрий пространства $\mathbf{H}$. Имеется дифференциальный оператор второго порядка, действие которого на гладкие функциии $\mathbf{H} \to \mathbf{C}$ перестановочно с действием $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ на $\mathbf{H}$, это оператор Лапласа–Бельтрами

$$\mathrm{D}_{\text{L-B}} = -v^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big) + v\frac{\partial}{\partial v}, \quad x = \Re(z), \quad y = \Im(z).$$

Пусть Γ – коконечная дискретная подгруппа $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ такая, что на ней определён гомоморфизм Куботы. Мы скажем, что $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ есть кубическая метаплектическая форма на $\mathbf{H}$ относительно Γ, если f есть собственная функция умеренного роста оператора $\mathrm{D}_{\text{L-B}}$, удовлетворяющая условию

$$f(\gamma w) = \kappa(\gamma) f(w) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma, \quad w \in \mathbf{H}.$$

Условие умеренности роста нам в данный момент не важно. Тем не менее, точная формулировка такова: существует полином P с вещественными коэффициентами такой, что $|f(z, v)| < P(|z|, v, v^{-1})$ для всех $(z, v) \in \mathbf{H}$.

Мы будем иметь дело с кубической тета функцией Куботы–Паттерсона $\Theta_{\mathrm{K-P}}$, которая известна как кубическая метаплектическая форма относительно группы $\widetilde{\Gamma}(3)$. Она была определена и изучена Куботой [13]. Имеется разложение Фурье

$$\Theta_{\mathrm{K-P}}(z, v) = v^{2/3} + (6\pi v)^{2/3} \sum_{\nu \in (\sqrt{-3})^{-3}\mathcal{O} \setminus \{0\}} \widetilde{\tau}(\nu)\, Ai\big((6\pi |\nu|\, v)^{2/3} \big)\, e(\nu z)$$

с коэффициентами $\widetilde{\tau}(\nu)$, данными Паттерсоном [15]; здесь Ai есть функция Эйри и $e(t) = \exp\big(2\pi i\, (t + \bar{t}\,)\big)$. См. также изложение автора [16]. Мы намерены показать, что

кубическая тета функция Куботы–Паттерсона $\Theta_{\mathrm{K-P}}$
есть кубическая метаплектическая форма
относительно группы Бианки $\mathrm{B}(3)$.

Известно, что $\widetilde{\tau}(-\nu) = \widetilde{\tau}(\nu)$ для всех ν. Отсюда и из разложения Фурье для $\Theta_{\mathrm{K-P}}(z, v)$ следует $\Theta_{\mathrm{K-P}}\big((-z, v)\big) = \Theta_{\mathrm{K-P}}\big((z, v)\big)$ для всех $(z, v) \in \mathbf{H}$. С другой стороны, $(-z, v) = \varsigma\,(z, v)$. Следовательно, не только $\Theta_{\mathrm{K-P}}(\gamma w) = \kappa(\gamma)\, \Theta_{\mathrm{K-P}}(w)$ для всех $\gamma \in \widetilde{\Gamma}(3)$, но также $\Theta_{\mathrm{K-P}}(\gamma w) = \Theta_{\mathrm{K-P}}(w)$ для $\gamma = \varsigma$. Это наблюдение доставляет расширение гомоморфизма Куботы κ, описанное в §3, и доказывает сформулированное выше утверждение.

5. Симплектические группы и $W(E_6)$

Напомним, что $W(E_6)$ – группа Вейля системы корней E_6. Известно, что $W(E_6)$ есть группа порядка $51840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$, изоморфная группе сохраняющих инцидентности перестановок 27 прямых на гладкой кубической поверхности в трехмерном проективном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Имеется точная последовательность

$$1 \to W(E_6)^+ \to W(E_6) \to \{1, R\} \to 1, \tag{5.1}$$

в которой $W(E_6)^+$ – коммутант группы $W(E_6)$, есть простая группа порядка $25920 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Под R мы понимаем некоторый элемент из $W(E_6) \setminus W(E_6)^+$ порядка 2, так что R порождает циклическую подгруппу $\{1, R\}$ в $W(E_6)$; например, можно взять в качестве R одно из отражений порождающих $W(E_6)$. Другими словами, группа $W(E_6)$ есть полупрямое произведение подгрупп $W(E_6)^+$ и $\{1, R\}$, так что расширение групп (5.1) расщеплённое. Следует заметить также, что отображение, которое переводит $g \in W(E_6)^+$ в $R^{-1}gR \in W(E_6)^+$, есть внешний инволютивный автоморфизм группы $W(E_6)^+$. По поводу группы $W(E_6)$ см. Бурбаки [2], Манин [14], Кокстер [3].

Мы имеем два изоморфизма групп –

$$W(E_6)^+ \simeq \mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3) = \left\{ \begin{matrix} \text{проективная симплектическая} \\ \text{группа ранга } 2 \text{ над } \mathbf{F}_3 \end{matrix} \right\}, \tag{5.2}$$

$$W(E_6) \simeq \mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3) = \left\{ \begin{matrix} \text{расширенная проективная} \\ \text{симплектическая группа} \\ \text{ранга } 2 \text{ над } \mathbf{F}_3 \end{matrix} \right\}, \tag{5.3}$$

точную последовательность

$$1 \to \mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3) \to \mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3) \to \mathrm{C}_2 \to 1 \tag{5.4}$$

и разложение

$$\mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3) = \mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3) \cup \varrho\, \mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3), \tag{5.5}$$

где $\mathbf{F}_3$ – поле из трёх элементов, а C_2 – циклическая подгруппа порядка 2 в $\mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3)$, порождённая $\varrho = \pm\,\mathrm{diag}(-1, 1, 1, -1)$.

Это требует пояснения. Сначала определим группы. Условимся записывать 4×4 матрицы как

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A, B, C, D \text{ — } 2 \times 2 \quad \text{матрицы}, \tag{5.6}$$

и положим $\Omega = \left(\begin{smallmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{smallmatrix}\right)$, где 0_2 и I_2 – нулевая и единичная матрицы 2×2. Симплектическая группа ранга 2 над $\mathbf{F}_3$ есть

$$\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3) = \bigl\{ \gamma \in \mathrm{GL}(4, \mathbf{F}_3) \bigm| \gamma\, \Omega\, {}^t\gamma = \Omega \bigr\},$$

где ${}^t\gamma$ обозначает матрицу, транспонированную к γ. Если γ записано как в (5.6), условие $\gamma\Omega^t\gamma = \Omega$ эквивалентно

$$A\,{}^tB = B\,{}^tA, \quad C\,{}^tD = D\,{}^tC, \quad A\,{}^tD - B\,{}^tC = I_2. \tag{5.7}$$

Под расширенной симплектической группой мы понимаем

$$\mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3) = \bigl\{\gamma \in \mathrm{GL}(4, \mathbf{F}_3) \bigm| \gamma\,\Omega\,{}^t\gamma = \pm\Omega\bigr\}.$$

Симплектическая группа $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)$ есть нормальная подгруппа индекса 2 в $\mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3)$. Мы имеем дизъюнктное разложение и точную последовательность

$$\begin{gathered} \mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3) = \mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3) \cup \varrho'\,\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3) \\ \text{с} \quad \varrho' = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, -1), \\ 1 \to \mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3) \to \mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3) \to \mathrm{C}_2' \to 1, \end{gathered} \tag{5.8}$$

где C_2' есть циклическая подгруппа порядка 2 в $\mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3)$, порожденная ϱ'. Таким образом, $\mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3)$ оказывается полупрямым произведением нормальной подгруппы $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)$ и циклической подгруппы C_2'. Центр каждой из групп $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)$ и $\mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3)$ состоит из матриц $\pm I_4$. По определению,

$$\mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3) = \mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)/\{\pm I_4\}, \quad \mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3) = \mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3)/\{\pm I_4\},$$

и факторизуя (5.8), мы получаем разложение (5.5) и точную последовательность (5.4) для проективных групп.

Изоморфизм (5.2) дан Дьедонне [6, гл. 4], со ссылками на Жордана [11] и Диксона [4]. Кажется весьма вероятным, что изоморфизм (5.3) также известен. Но мы не можем дать ссылку, поэтому дадим пояснение к (5.3). Согласно [5], каждый автоморфизм проективной группы $\mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3)$ индуцирован (факторизацией) автоморфизмом группы $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)$. Хуа-Ло-Кен [10] и Дьедонне [5] показали также, что каждый автоморфизм группы $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)$ есть сопряжение элементом из группы $\mathrm{GSp}(4, \mathbf{F}_3)$. Следовательно, каждый автоморфизм группы $\mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3)$ есть сопряжение элементом из группы $\mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3)$. Далее, легко найти, что (с точностью до изоморфизма) $\mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3)$ есть единственное расщепимое расширение группы $\mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3)$ циклической группой порядка 2, связанное с внешним инволютивным автоморфизмом группы $\mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3)$. С этим наблюдением, мы получаем изоморфизм (5.3) простым сравнением (5.4) с (5.1).

6. Доказательство предложения 1

Начнём с (а). Главная конгруенцподгруппа $\Gamma(q)$, будучи ядром гомоморфизма $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) \to \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}/q)$, индуцированного гомоморфизмом $\mathcal{O} \to \mathcal{O}/q$, есть нормальная подгруппа $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$. Имеется точная последовательность

$$1 \to \Gamma(q) \to \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) \to \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}/q) \to 1,$$

которая доставляет нам изоморфизм

$$\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\Gamma(3) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}/3\mathcal{O}).$$

Отсюда видно, что индекс $\bigl[\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) : \Gamma(3)\bigr]$ равен порядку группы $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}/3\mathcal{O})$. Легко заметить, что отображение $1 \mapsto 1$, $\sqrt{-3} \mapsto x$ индуцирует изоморфизм колец $\mathcal{O}/3\mathcal{O} \to \mathbf{F}_3[\,x\,]/(x^2)$ и, далее, изоморфизм групп

$$\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}/3\mathcal{O}) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3[\,x\,]/(x^2)).$$

Мы имеем также эпиморфизм колец $\mathbf{F}_3[\,x\,]/(x^2) \to \mathbf{F}_3$, который переводит $a+bx(\operatorname{mod} x^2)$ в $a \in \mathbf{F}_3$, и который, следовательно, индуцирует точную последовательность

$$1 \to \Gamma(x) \to \mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3[\,x\,]/(x^2)) \to \mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3) \to 1,$$

где $\Gamma(x)$ – главная конгруенцподгруппа $\mod x$ в $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3[\,x\,]/(x^2))$, состоящая из матриц

$$\begin{pmatrix} 1+ax & bx \\ cx & 1-ax \end{pmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbf{F}_3.$$

Известно, что порядок группы $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)$ равен 24. Порядок группы $\Gamma(x)$ равен 27. Следовательно, порядок группы $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3[\,x\,]/(x^2))$ равен $27 \cdot 24 = 648$, и таковы же порядок группы $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}/3\mathcal{O})$ и индекс $\bigl[\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) : \Gamma(3)\bigr]$, что и требовалось.

Далее, пусть $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$. Легко видеть, что $\gamma \in \widetilde{\Gamma}(q)$ в том и только в том случае, если $\gamma \equiv \delta(\operatorname{mod} q)$ с некоторым $\delta \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, и, значит, в том и только в том случае, если $\gamma = \delta\gamma'$ с некоторыми $\delta \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, $\gamma' \in \Gamma(q)$. Для $q=3$ из этого замечания следует

$$\widetilde{\Gamma}(3)/\Gamma(3) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})/\bigl(\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \cap \Gamma(3)\bigr) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3),$$

последняя группа имеет порядок 24, и таким же оказывается индекс $\bigl[\widetilde{\Gamma}(3) : \Gamma(3)\bigr]$. Для доказательства (а) остаётся заметить, что имеют место включения $\Gamma(3) \subset \widetilde{\Gamma}(3) \subset \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$ и, следовательно, $\left[\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) : \widetilde{\Gamma}(3)\right] = 648/24 = 27$.

Далее, для доказательства (b) заметим, что, в соответствии с определением (2.2),

$$\varsigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \text{ так что } \varsigma^2 = -I_2, \text{ и}$$
$$\varsigma^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\varsigma = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad \text{для всех} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C}). \tag{6.1}$$

Отсюда немедленно следует, что $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$ – нормальная подгруппа $\mathrm{B}(\mathcal{O})$, $\widetilde{\Gamma}(3)$ – нормальная подгруппа $\mathrm{B}(3)$, и что имеют место разложения

$$\mathrm{B}(\mathcal{O}) = \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) \cup \varsigma\, \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}), \tag{6.2}$$

$$\mathrm{B}(3) = \widetilde{\Gamma}(3) \cup \varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3), \tag{6.3}$$

из которых следует (b). Наконец, опуская детали, заметим, что (c) легко следует из (a) и (b).

7. Доказательство предложения 2

Предположим, что мы имеем разложение (1.1). Подставив (1.1) в (6.2) и воспользовавшись затем (6.3), мы находим

$$\mathrm{B}(\mathcal{O}) = \Big\{ \bigcup_{j=1,\dots,27} \widetilde{\Gamma}(3)\, \sigma_j \Big\} \cup \Big\{ \bigcup_{j=1,\dots,27} \varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3)\, \sigma_j \Big\} =$$
$$= \bigcup_{j=1,\dots,27} \big\{ \widetilde{\Gamma}(3) \cup \varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3) \big\}\, \sigma_j = \bigcup_{j=1,\dots,27} \mathrm{B}(3)\, \sigma_j . \tag{7.1}$$

Это и есть искомое разложение (1.2), и остаётся только доказать его дизъюнктность. С этой целью предположим, что $\mathrm{B}(3)\sigma_j = \mathrm{B}(3)\sigma_k$ с некоторыми $k \neq j$. Тогда $\sigma_j\sigma_k^{-1} \in \mathrm{B}(3)$. Ввиду (6.3), это означает, что $\sigma_j\sigma_k^{-1} \in \widetilde{\Gamma}(3)$ или $\sigma_j\sigma_k^{-1} \in \varsigma\widetilde{\Gamma}(3)$. Первый случай невозможен, поскольку разложение (1.1) дизъюнктно. Во втором случае мы находим $\sigma_j\sigma_k^{-1}\delta = \varsigma$ с некоторым $\delta \in \widetilde{\Gamma}(3) \subset \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$. С этим δ имеем $\sigma_j\sigma_k^{-1}\delta \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$, тогда как $\varsigma \notin \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$. Следовательно, классы в (7.1) различны и, значит, (7.1) – дизъюнктное разложение.

8. Доказательство предложения 3

Пункт (a) очевиден, так как I_2 и $-I_2$ действуют тривиально на $\mathbf{H}$. Для доказательства (b) и (c) заметим сначала, что $\Gamma(3)$ и $\Gamma(9)$ – нормальные подгруппы в $\mathrm{B}(\mathcal{O})$. Далее, для каждой матрицы $\gamma \in \Gamma(3)$ и каждого $j = 1, 2, \ldots, 27$, имеем $\sigma_j\gamma\sigma_j^{-1} \in \Gamma(3) \subset \mathrm{B}(3)$, и значит

$$f(\sigma_j\gamma w) = f(\sigma_j\gamma\sigma_j^{-1}\sigma_j w) = \kappa(\sigma_j\gamma\sigma_j^{-1})f(\sigma_j w).$$

Следовательно, $\psi(\gamma) = \mathrm{diag}(\kappa(\sigma_1\gamma\sigma_1^{-1}), \kappa(\sigma_2\gamma\sigma_2^{-1}), \ldots, \kappa(\sigma_{27}\gamma\sigma_{27}^{-1}))$ есть диагональная матрица, что и утверждалось в пункте (c). Для доказательства (b) остаётся заметить, что $\kappa(\delta\gamma\delta^{-1}) = \kappa(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma(9)$ и $\delta \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$ (см. (3.2)), так же как и для $\delta = \varsigma$, и, значит, для всех $\delta \in \mathrm{B}(\mathcal{O})$. Следовательно, $\kappa(\sigma_j\gamma\sigma_j^{-1}) = \kappa(\gamma)$ и $\psi(\gamma)$ скалярная матрица для $\gamma \in \Gamma(9)$.

Несколько сложнее доказать (d). Утверждение не зависит от произвола в выборе σ_j в (1.1), (2.3), (2.4). Возьмём σ_j из списка, данного в [15]. Этот список включает

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нам нет необходимости перечислять все σ_j из [15]. Заметим только, что $\sigma_j \notin \mathrm{B}(3)$ для $j = 2, 3, \ldots, 27$, и что $\sigma_j \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$ для $j = 1, 2, \ldots, 27$.

Обозначим через E множесто всех таких матриц $\gamma \in \mathrm{B}(\mathcal{O})$, что

$$w \mapsto \frac{\Theta_{\mathrm{K-P}}(\gamma w)}{\Theta_{\mathrm{K-P}}(w)} \quad \text{— постоянная функция} \quad \mathbf{H} \to \mathbf{C} \tag{8.1}$$

(зависящая только от γ). Очевидно, E – подгруппа $\mathrm{B}(\mathcal{O})$ и $\mathrm{B}(3) \subset E$. Докажем, что $E = \mathrm{B}(3)$. Предположим, что $\gamma \in E$, $\gamma \notin \mathrm{B}(3)$. Мы имеем разложение (2.4), предложение 2, из которого следует, что матрица γ может быть представлена как произведение $\gamma = \gamma'\sigma_k$ с некоторым $k = 1, 2, \ldots, 27$ и с $\gamma' \in \mathrm{B}(3) \subset E$. И при этом $\sigma_k \in E$, $\sigma_k \notin \mathrm{B}(3)$. Таким образом, если (8.1) имеет место для некотрой матрицы $\gamma \notin \mathrm{B}(3)$, то (8.1) имеет место для хотя бы одной матрицы $\gamma = \sigma_k$, $k = 2, 3, \ldots, 27$. Автор использовал Maple V для написания процедуры вычисления $\Theta_{\mathrm{K-P}}(w)$. Эта процедура, применённая к функциям (8.1) с $\gamma = \sigma_k$, $k = 2, 3, \dots, 27$, показывает, что ни одна из них не постоянна. Таким образом, $E = \mathrm{B}(3)$.

Далее, для $\gamma \in \mathrm{B}(\mathcal{O})$, матрица $\psi(\gamma)$ диагональна в том и только в том случае, если

$$w \mapsto \frac{\Theta_{\mathrm{K-P}}(\sigma_k \gamma w)}{\Theta_{\mathrm{K-P}}(\sigma_k w)} \text{ — постоянная функция } \quad \mathbf{H} \to \mathbf{C}$$

для всех $k = 1, 2, \dots, 27$ (зависящая только от k и γ). Это условие эквивалентно следующему: $\sigma_k \gamma \sigma_k^{-1} \in E$ для всех $k = 1, 2, \dots, 27$. Поскольку $E = \mathrm{B}(3)$, мы заключаем, что матрица $\psi(\gamma)$ диагональна в том и только в том случае, если

$$\gamma \in P \text{ с } \quad P = \bigcap_{k=1,\dots,27} \sigma_k^{-1} \mathrm{B}(3)\, \sigma_k. \tag{8.2}$$

Для доказательства утверждения (d) нам достаточно показать, что $P = \pm\Gamma(3)$. Мы имеем $\sigma_1 = I_2$, следовательно, $P \subset \sigma_1^{-1}\mathrm{B}(3)\, \sigma_1 = \mathrm{B}(3)$. Мы знаем, что $\pm\Gamma(3)$ – нормальная подгруппа $\mathrm{B}(\mathcal{O})$, поэтому $\pm\Gamma(3) = \pm\sigma_k^{-1}\Gamma(3)\, \sigma_k \subset \sigma_k^{-1}\mathrm{B}(3)\, \sigma_k$ для всех k, и, следовательно, $\pm\Gamma(3) \subset P$. С другой стороны, имеем

$$P \subset \mathrm{B}(3) \cap \sigma_2^{-1}\mathrm{B}(3)\sigma_2 \cap \sigma_3^{-1}\mathrm{B}(3)\sigma_3 \subset \pm\Gamma(3), \tag{8.3}$$

что влечёт за собой $P = \pm\Gamma(3)$. Первое включение в (8.3) очевидно. Для доказательства второго включения воспользуемся (6.3). Пусть $\gamma \in \mathrm{B}(3)$. Из (6.3) следует, что либо элементы этой матрицы $\in \mathcal{O}$ и тогда $\gamma \in \widetilde{\Gamma}(3)$, либо элементы этой матрицы $\notin \mathcal{O}$ и тогда $\gamma \in \varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3)$. Таже альтернатива имеет место для $\gamma \in \sigma_k^{-1}\mathrm{B}(3)\, \sigma_k$, поскольку $\sigma_k \in \mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ для всех k. Следовательно, для $\gamma \in P$ мы имеем или

$$\gamma \in \widetilde{\Gamma}(3) \cap \sigma_2^{-1}\widetilde{\Gamma}(3)\sigma_2 \cap \sigma_3^{-1}\widetilde{\Gamma}(3)\sigma_3 \quad \text{или} \tag{8.4}$$

$$\gamma \in \varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3) \cap \sigma_2^{-1}\varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3)\sigma_2 \cap \sigma_3^{-1}\varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3)\sigma_3 \tag{8.5}$$

$$= \varsigma\big\{\widetilde{\Gamma}(3) \cap \varsigma^{-1}\sigma_2^{-1}\varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3)\sigma_2 \cap \varsigma^{-1}\sigma_3^{-1}\varsigma\, \widetilde{\Gamma}(3)\sigma_3\big\}.$$

Заметим, что $\varsigma^{-1}\sigma_k^{-1}\varsigma \in \mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ для $k = 2$ и для $k = 3$, и что $\widetilde{\Gamma}(3)$ состоит из матриц из $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ с элементами $\equiv 0, \pm 1 (\mod 3)$. Теперь элементарное вычисление, которое мы опускаем для краткости, показывает, что множество в правой части (8.4) равно $\pm\Gamma(3)$, тогда как множество в правой части (8.5) пусто. Это завершает доказательство.

9. Мономорфизм $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3[x]/(x^2)) \to \mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)$

Из условий (5.7) с $C = 0$ следует $A = {}^tD^{-1}$ и $B = {}^tD^{-1}S$ с некоторой симметричной матрицей S. В частности, $\det D \neq 0$. Пусть

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_2 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3) \;\Big|\; \det D = 1 \right\},$$

это подгруппа индекса 2 зигелевой максимальной параболической подгруппы в $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_3)$. Для каждой матрицы $D \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)$ и симметричной 2×2 матрицы S с элементами из $\mathbf{F}_3$ имеем

$$\begin{pmatrix} {}^tD^{-1} & 0_2 \\ 0_2 & D \end{pmatrix} \in \mathbf{G} \text{ и } \begin{pmatrix} I_2 & S \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{G}. \tag{9.1}$$

Более того, каждая матрица $\gamma \in \mathbf{G}$ может быть представлена единственным образом как произведение

$$\gamma = \begin{pmatrix} {}^tD^{-1} & 0_2 \\ 0_2 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & S \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

с D и S как в (9.1). Имеется $3^3 = 27$ симметричных 2×2 матриц с элементами из $\mathbf{F}_3$, а порядок группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)$ равен 24. Следовательно, $\mathbf{G}$ есть группа порядка $27 \cdot 24 = 648$. Докажем, что $\mathbf{G}$ изоморфна группе $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3[x]/(x^2))$, рассмотренной ранее в §6. Из наших рассмотрений в §6 ясно, что каждая матрица $\delta \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3[x]/(x^2))$ может быть единственным образом разложена в группе $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3[x]/(x^2))$ в произведение

$$\delta = D \begin{pmatrix} 1 + ax & bx \\ cx & 1 - ax \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad D \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3), \quad a, b, c \in \mathbf{F}_3. \tag{9.3}$$

Определим отображение $h\colon \mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3[x]/(x^2)) \to \mathbf{G}$, взяв в качестве $h(\delta)$ для δ из (9.3) матрицу γ из (9.2) с

$$S = \begin{pmatrix} -c & a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Очевидно, h есть биекция. Заметим, что h обладает следующим свойством: если $D \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)$, $a, b, c \in \mathbf{F}_3$ и $a', b', c' \in \mathbf{F}_3$, то

$${}^tD \begin{pmatrix} -c & a \\ a & b \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -c' & a' \\ a' & b' \end{pmatrix} \text{ в том и только в том случае, если}$$

$$D^{-1} \begin{pmatrix} 1+ax & bx \\ cx & 1-ax \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1+a'x & b'x \\ c'x & 1-a'x \end{pmatrix}.$$

Ради краткости, опустим детали. С этим наблюдением, простое вычисление показывает, что биекция h является гомоморфизмом. Следовательно, h есть изоморфизм.

10. Доказательство теоремы

Согласно предложению 1 (c), $n = \bigl[\mathrm{B}(\mathcal{O}) : \mathrm{B}(3)\bigr] = 27$. Далее, $\pm\Gamma(3)$ есть нормальная подгруппа в $\mathrm{B}(\mathcal{O})$ и, согласно предложению 3 (c), (d), $\mathcal{Z}$ есть образ $\pm\Gamma(3)$ относительно гомоморфизма ψ. В свою очередь, $\mathcal{E}$ есть образ группы $\mathrm{B}(\mathcal{O})$ относительно ψ. Следовательно, $\mathcal{Z}$ есть нормальная подгруппа в $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}/\mathcal{Z} \simeq \mathrm{B}(\mathcal{O})/\pm\Gamma(3),$$

и последняя группа имеет порядок 648, согласно предложению 1 (c). С другой стороны, мы знаем, что

$$W(E_6) \simeq \mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3).$$

Таким образом, для доказательства утверждения теоремы относительно группы $\mathcal{E}/\mathcal{Z}$ нам достаточно построить мономорфизм

$$\mathrm{B}(\mathcal{O})/\pm\Gamma(3) \xrightarrow{\tilde{Q}} \mathrm{GPSp}(4, \mathbf{F}_3). \tag{10.1}$$

С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{c} \mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3) \hookleftarrow \left\{ \pm \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_3) \,\middle|\, \det D = 1 \right\} \\ \uparrow \\ \mathrm{SL}(2, \mathcal{O})/\pm\Gamma(3) \to \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}/3\mathcal{O}) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbf{F}_3[\,x\,]/(x^2)) \end{array} \tag{10.2}$$

Здесь $\hookleftarrow$ – включение подгруппы, $\uparrow$ есть изоморфизм, получаемый факторизацией из мономорфизма, построенного в §9, $\to$ есть изоморфизмы, получаемые факторизацией из изоморфизмов, построенных в §6. Композиция

$$\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\pm\Gamma(3) \xrightarrow{Q} \mathrm{PSp}(4,\mathbf{F}_3)$$

всех гомоморфизмов в (10.2) есть мономорфизм, и мы можем использовать Q, чтобы определить $\widetilde{Q}$ в (10.1).

В [7, 7.4] мы находим, что три матрицы

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$\big(\omega = (-1+\sqrt{-3}\,)/2\big)$$

порождают $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$; эти матрицы и ς из (2.2) порождают $\mathrm{B}(\mathcal{O})$. Канонический эпиморфизм $\mathrm{B}(\mathcal{O}) \to \mathrm{B}(\mathcal{O})/\pm\Gamma(3)$ переводит p_1, p_2, p_3, ς в некоторые элементы, скажем p_1', p_2', p_3', ς', порождающие группу $\mathrm{B}(\mathcal{O})/\pm\Gamma(3)$. Очевидно, p_1', p_2', p_3' порождают $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\pm\Gamma(3)$ и мы имеем дизъюнктное разложение

$$\mathrm{B}(\mathcal{O})/\pm\Gamma(3) = \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\pm\Gamma(3) \cup \varsigma'\,\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\pm\Gamma(3)$$

(ср. с (6.2)). Заметим, что определённый выше мономорфизм Q обладает свойством

$$Q(\varsigma'^{-1}\gamma\,\varsigma'\,) = \varrho^{-1}Q(\gamma)\,\varrho \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\pm\Gamma(3). \qquad (10.3)$$

Проверить (10.3) достаточно для образующих группы $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\pm\Gamma(3)$, скажем для $\gamma = p_1'$, p_2', p_3', и это легко сделать, рассмотрев последовательно гомоморфизмы в (10.2). Теперь определим $\widetilde{Q}$, полагая

$$\widetilde{Q}(\gamma) = Q(\gamma), \quad \widetilde{Q}(\varsigma'\gamma) = \varrho Q(\gamma) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})/\pm\Gamma(3).$$

Напомним, что $\varsigma'^2 = 1$ и $\varrho^2 = 1$. Из (10.3) легко следует, что $\widetilde{Q}$ есть мономорфизм, и это завершает доказательство теоремы.

Литература

1. H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for* SL_n $(n \geqslant 3)$ *and* Sp_{2n} $(n \geqslant 2)$, Inst. des Hautes Études Scient., Publ. Math. No. 22 (1964), 5–60.
2. N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*, Paris.
3. H. S. M. Coxeter, *Regular complex polytopes*, Second edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

4. L. E. Dickson, *Linear groups.* (Ed. B. G. Teubner), Leipzig, 1901.
5. J. Dieudonné, *On the automorphisms of the classical groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **2** (1951).
6. J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Ergebn. Math. und ihrer Grenzgeb., Springer-Verlag **5** (1955).
7. J. Elstrodt, F. Grunewald, J. Mennicke, *Groups acting on hyperbolic space*, Springer-Verlag, 1998.
8. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.
9. A. Henderson, *The twenty-seven lines upon the cubic surface*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911.
10. L. K. Hua, *On the automorphisms of the symplectic group over any field*, Ann. of Math. **49** (1948), 739–759.
11. C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870.
12. T. Kubota, *Ein arithmetischer Satz über eine Matrizengruppe*, J. reine und angew. Math. **222** (1965), 55–57.
13. T. Kubota, *On automorphic functions and reciprocity law in a number theory*, Lect. in Math. Kyoto Univ. **2** (1969).
14. Ю. И. Манин, *Кубические формы*, М., 1972.
15. S. J. Patterson, *A cubic analogue of the theta series* I, II, J. reine und angew. Math. **296** (1977), 125–161, 217–220.
16. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions*, Lect. Notes in Math. **1677**, Springer-Verlag, 1998.
17. B. Segre, *The non-singular cubic surfaces*, Clarendon, Oxford, 1942.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 5 октября 2004 г.