Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

А. В. Тютюев, В. А. Шлык

НЕПРЕРЫВНО УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть D – область в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$, и E – компакт, расположенный в D. В работе получены условия на компакт E, при которых любое гомеоморфное отображение $f : D\backslash E \to R^n$ из класса $L^1_n(D\backslash E)$ (см. [1]–[2]) или квазиконформное отображение $f : D\backslash E \to R^n$ продолжается до непрерывного отображения $f : D \to \overline{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$. Этими условиями определяется класс NCS-компактов, который при $n = 2$ совпадает с классом топологически устранимых компактов для конформных и квазиконформных отображений (см. [3]–[4]).

Отметим, что задача непрерывного продолжения, рассмотренная в статье, восходит к Гретшу. Ряд результатов по этой задаче для пространственных квазиконформных отображений был получен Мартио и Някки [5] и одним из авторов [6].

Кроме того, показано, что NCS-компакты конечной площади являются NED-множествами, которые, как известно [7], являются устранимыми множествами для квазиконформных отображений.

1. NCS-компакты

В дальнейшем под кривой γ будем понимать непрерывный образ интервала (0;1). Через $\overline{A}$ обозначаем замыкание множества $A \subset R^n$ в топологии R^n. Пусть F – компакт в R^n и $x_0 \in F$. Пусть γ_0, γ_1 — непрерывные образы полузамкнутого интервала [0;1) в области D такие, что $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$, $\overline{\gamma}_0 \cup \overline{\gamma}_1 \subset D$ и $x_0 \in \overline{\gamma}_0 \cap \overline{\gamma}_1$. Тогда γ_0 и γ_1 назовем кривыми, сходящимися в точке $x_0 \in F$ по области D.

Через $\Gamma(\gamma_0, \gamma_1, D\backslash F)$ обозначим семейство всех кривых, которые расположены в $D\backslash F$ и соединяют кривые γ_0 и γ_1, сходящиеся в точке x_0 по области D, через $m_n(\gamma_0, \gamma_1, D\backslash F)$ обозначим

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028).

n-модуль семейства $\Gamma(\gamma_0,\gamma_1,D\backslash F)$ [7]. В случае $\Gamma(\gamma_0,\gamma_1,D\backslash F)=\emptyset$ полагаем, по определению, $m_n(\gamma_0,\gamma_1,D\backslash F)$ равным нулю. Через $m_n(E_0,E_1,D)$ обозначим n-модуль семейства кривых, расположенных в области D и соединяющих компакты $E_0,E_1\subset\overline{D}$, через $C_n(E_0,E_1,D)$ обозначим n-емкость конденсатора (E_0,E_1,D) [7].

Положим $B(x_0,r)=\{y\in R^n:|x_0-y|<r\}$, где $x_0\in R^n$ и $r>0$.

Компакт F назовем NCS-компактом, если для каждой точки $x_0\in F$ можно указать число $r_0=r(x_0)>0$ такое, что $m_n(\gamma_0,\gamma_1,B(x_0,r)\backslash F)=\infty$ для всех $r\in(0;r_0)$ и для любой пары кривых γ_0, γ_1, сходящихся в точке $x_0\in F$ по области $B(x_0,r)$.

Пусть $d(A,B)$ – евклидово расстояние между множествами $A,B\subset R^n$, $d(A)$ — диаметр множества $A\subset R^n$; $[a;b]$ — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $a,b\in R^n$.

Теорема 1. *Если E – NCS-компакт, то E не содержит внутренних точек.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $B(x_0,r)\subset E$ для некоторых $r, 0<r<r_0$, и $x_0\in E$. Пусть l — невырожденный отрезок с центром в точке x_0, $l\subset B(x_0,r)$. Тогда $l\backslash\{x_0\}=\gamma_0\cup\gamma_1$, где γ_0 и γ_1 — кривые, сходящиеся в точке x_0 по шару $B(x_0,r)$. Ясно, что $m_n(\gamma_0,\gamma_1,B(x_0,r)\backslash E)=0$, поскольку $\Gamma(\gamma_0,\gamma_1,B(x_0,r)\backslash E)=\emptyset$. Последнее противоречит определению компакта E.

Теорема 2. *Если E – NCS-компакт, то E локально не разбивает евклидово пространство R^n.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть B – открытый шар в R^n, который разбивается компактом F, и D – одна из открытых компонент множества $B\backslash F$. Пусть точка x_0 принадлежит множеству $B\backslash\overline{D}$. Обозначим через l отрезок, соединяющий точку x_0 с выбранной точкой $y_0\in D$. Найдем на отрезке l ближайшую к точке x_0 точку $z_0\in\partial D$.

Обозначим через γ_0 непрерывный образ полуоткрытого отрезка $[0;1)$, расположенный в области D и соединяющий точку y_0 с точкой z_0 (иначе говоря, $z_0\in\overline{\gamma}_0$). Через γ_1 обозначим полуоткрытый отрезок $(z_0;x_0]$.

Тогда $\Gamma(\gamma_0,\gamma_1,B\backslash E)=\emptyset$, значит, $m_n(\gamma_0,\gamma_1,B\backslash E)=0$, что противоречит определению компакта E.

Следствие. *Если E – NCS-компакт и $n=2$, то E — нульмерный компакт.*

Теорема 3. *Пусть $f : D\backslash E \to R^n$ – гомеоморфизм из класса $L_n^1(D\backslash E)$, где E – NCS-компакт, расположенный в области D. Тогда f продолжается до непрерывного отображения области D в $\overline{R}^n$.*

Доказательство. Можно считать, что отображение f равномерно ограничено в области $D\backslash E$. Действительно, этого можно добиться посредством удаления из области $D\backslash E$ замкнутого шара U и подходящего мебиусова преобразования над $f(D\backslash E)\backslash f(U)$.

Предположим, что множество $X_0 = Cl(f, x_0)$ всех предельных значений функции f в точке $x_0 \in E$ является невырожденным континуумом. Пусть $b_1, b_2 \in X_0$ – точки, для которых $d(b_1, b_2) = d(X_0)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $b_1 = (0, \ldots, 0)$, $b_2 = (1, 0, \ldots, 0)$. Обозначим через $l(x_0)$ компоненту связности компакта E, содержащую точку x_0, через $\tau(x_0) = f(l(x_0))$ – соответствующую компоненту связности границы $\partial f(D\backslash U)$ области $f(D\backslash U)$. Построим две последовательности $\{a_k^1\}$, $\{a_k^2\}$ точек в $D\backslash E$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^1 = x_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^2 = x_0$; $b_k^1 = f(a_k^1) \to b_1$ и $b_k^2 = f(a_k^2) \to b_2$ при $k \to \infty$. Проведем гиперплоскости

$$H_1 = \left\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n : y_1 = \frac{1}{3}\right\},$$
$$H_2 = \left\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n : y_1 = \frac{2}{3}\right\}$$

и положим

$$H_1^+ = \left\{y : y_1 < \frac{1}{3}\right\}, H_2^+ = \left\{y : y_1 > \frac{2}{3}\right\}.$$

Можно считать, что $b_k^1 \in H_1^+$ и $b_k^2 \in H_2^+$ при $k \geqslant 1$. Построим теперь гладкую поверхность σ_1, расположенную в области $f(D\backslash E)$, отделяющую множество $\tau(x_0)$ от ∞ и такую, что $d(\sigma_1, \tau(x_0)) < 1$, σ_1 является общей границей для своей внутренности и внешности, $b_k^1, b_k^2 \notin \sigma_1, k \geqslant 1$. Затем строим гладкую поверхность σ_2 внутри поверхности σ_1 такую, что $d(\sigma_2, \tau(x_0)) < \frac{1}{2}$, $b_k^1, b_k^2 \notin \sigma_2, k \geqslant 1$.

Обозначим двусвязную область, ограниченную поверхностями σ_1, σ_2, через $G_1(\sigma_1, \sigma_2)$. Покроем $\partial f(D\backslash E) \cap G_1(\sigma_1, \sigma_2)$ конечным числом замкнутых областей $G_i^1, i = 1, 2, \ldots, m$, с гладкими поверхностями так, что множество

$$G_1 = G_1(\sigma_1, \sigma_2) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} G_i^1$$

является областью и $\sigma_1 \cup \sigma_2 \subset \partial G_1$.

Аналогичным образом выбираем гладкую поверхность σ_3, $d(\sigma_3, \tau(x_0)) < \frac{1}{3}$, и строим область G_2, $\sigma_2 \cup \sigma_3 \subset \partial G_2$, затем выбираем поверхность σ_4, $d(\sigma_4, \tau(x_0)) < \frac{1}{4}$, и строим область G_3, $\sigma_3 \cup \sigma_4 \subset \partial G_3$, и так далее.

Выберем точки z_1^1 на $H_1 \cap \sigma_1$ и z_2^1 на $H_1 \cap \sigma_2$ и соединим их непрерывной кривой $\lambda_1^1 \subset \overline{G_1 \cap H_1^+}$ с точками последовательности $\{b_k^1\}$, расположенными в области G_1. Аналогично выбираем точку z_3^1 на $H_1 \cap \sigma_3$ и соединим точки z_2^1 и z_3^1 непрерывной кривой $\lambda_2^1 \subset \overline{G_2 \cap H_1^+}$ с точками последовательности $\{b_k^1\}$, расположенными в G_2. Продолжая этот процесс неограниченно, получим непрерывную кривую $\lambda_1 = \lambda_1^1 \cup \lambda_2^1 \cup \lambda_3^1 \cup \dots \subset f(D \setminus E)$ такую, что $\overline{\lambda}_1 \subset \overline{H}_1^+$ и $b_1 \in \overline{\lambda}_1$. Таким же образом построим непрерывную кривую $\lambda_2 \subset f(D \setminus E)$, $\overline{\lambda}_2 \subset \overline{H}_2^+$, $b_2 \in \overline{\lambda}_2$. Ясно, что $\gamma_1 = f^{-1}(\lambda_1)$ и $\gamma_2 = f^{-1}(\lambda_2)$ – кривые, сходящиеся в точке x_0 по области D. Пусть $r \in (0, d(E, \partial D))$. Согласно результату Фюгледе [8], функция f абсолютно непрерывна на каждой кривой $\gamma \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, B(x_0, r) \setminus E)$, исключая семейство Γ_0 n-модуля нуль.

Если f_j, $j = \overrightarrow{1, n}$, – координатные функции отображения $f : D \setminus E \to R^n$ и $|\operatorname{grad} f| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{grad} f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, то, в силу выбора кривых γ_1 и γ_2, оценка

$$\int_{\gamma} |\operatorname{grad} f| ds \geqslant \frac{1}{3}$$

справедлива для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$. Другими словами, $3|\operatorname{grad} f|$ – обобщенно-допустимая метрика для семейства Γ. Поскольку $f \in L_n^1(D \setminus E)$, то $m_n(\gamma_1, \gamma_2, B(x_0, r) \setminus E) < +\infty$. Это противоречит выбору компакта E. Следовательно, множество $Cl(f, x_0)$ состоит из единственной точки y_0. Положим $f(x_0) = y_0$. Учитывая, что компакт E локально не разбивает пространство R^n, стандартными рассуждениями [9] убедимся в справедливости условия $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ при стремлении точки x произвольным образом по области D к точке x_0. Теорема доказана.

Принимая во внимания соображения, высказанные в начале доказательства теоремы 3, и определение квазиконформного отображения, получим следующее утверждение.

Следствие. *Пусть $f : D\backslash E \to R^n$ – квазиконформное отображение, где E — NCS-компакт, расположенный в области D. Тогда f продолжается до непрерывного отображения области D в $\overline{R}^n$.*

Теорема 4. *Пусть E – компакт, расположенный в области $D \subset R^2$. Для того, чтобы любое квазиконформное отображение $f : D\backslash E \to R^2$ продолжалось до гомеоморфизма $f : D \to \overline{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы множество E было NCS-компактом.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2 и следствия теоремы 3 достаточно установить необходимость условия теоремы. Как известно [4], если E – топологически устранимое множество для квазиконформных отображений, то E – нульмерный компакт.

Кроме того, для каждого r из интервала $(0, +\infty)$ модуль семейства $T = T(\{x_0\}, \partial B(x_0, r), B(x_0, r)\backslash E)$ всех непрерывных кривых, расположенных в области $B(x_0, r)\backslash E$ и отделяющих точку x_0 от $\partial B(x_0, r)$, равен ∞ независимо от выбора точки $x_0 \in E$. Возьмем теперь произвольную пару кривых γ_0 и γ_1, сходящихся в точке x_0 по области $B(x_0, r)$. Если $\partial B(x_0, r) \cap \gamma_0 \neq \emptyset$, $\partial B(x_0, r) \cap \gamma_1 \neq \emptyset$, то каждая кривая $\lambda \in T$ содержит кривую $\gamma \in \Gamma = \Gamma(\gamma_0, \gamma_1, B(x_0, r)\backslash E)$. Следовательно, семейство Γ “короче” семейства T, значит,

$$m_n(\gamma_0, \gamma_1, B(x_0, r)\backslash E) \geqslant m_n(T) = \infty.$$

Тем самым E – NCS-компакт. Теорема доказана.

2. NED-множества и NCS-компакты конечной площади

Следуя Ю. Вяйсяля, компакт $E \subset R^n$, $n \geqslant 2$, назовем NED-множеством (нуль-множеством для экстремальных длин), если для любых двух непересекающихся континуумов $F_0, F_1 \subset R^n\backslash E$ имеет место равенство

$$m_n(F_0, F_1, R^n\backslash E) = m_n(F_0, F_1, R^n). \tag{1}$$

В. Асеев и А. Сычев показали [7], что равенство (1) равносильно соотношению

$$C_n(F_0, F_1, D\backslash E) = C_n(F_0, F_1, D) \tag{2}$$

для любой области $D \subset R^n$ и любых компактов $F_0, F_1 \subset \overline{D}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть E – NED-компакт и $E \subset D$. Тогда E – NCS-компакт в области D.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$ и γ_0, γ_2 – две кривые, сходящиеся в точке $x_0 \in E$ по области D. Возьмем $r_1 > 0$ такое, что

$$\partial B(x_0, r_1) \cap \gamma_j \neq \emptyset, \qquad j = 0, 1.$$

Если $0 < r < r_1$, то

$$\Gamma = \Gamma(\gamma_0, \gamma_1, (B(x_0, r_1) \backslash \overline{B(x_0, r)}) \backslash E) \subset$$
$$\Gamma_1 = \Gamma(\gamma_0, \gamma_1, B(x_0, r_1) \backslash \overline{B(x_0, r)}),$$

значит, $m_n(\Gamma) \leqslant m_n(\Gamma_1)$. Это неравенство справедливо всегда, даже если E не является NED-компактом.

С другой стороны, известно (см. [10]), что модуль $m_n(\Gamma)$ семейства Γ равен n-емкости $C_n(\gamma_0, \gamma_1, (B(x_0, r_1) \backslash \overline{B(x_0, r)}) \backslash E)$ конденсатора $(\gamma_0, \gamma_1, (B(x_0, r_1) \backslash \overline{B(x_0, r)}) \backslash E)$. Вместе с (2), это дает равенства

$$m_n(\Gamma) = C_n(\gamma_0, \gamma_1, (B(x_0, r_1) \backslash \overline{B(x_0, r)}) \backslash E)$$
$$= C_n(\gamma_0, \gamma_1, B(x_0, r_1) \backslash \overline{B(x_0, r)}) = m_n(\Gamma_1).$$

Поскольку $m_n(\Gamma_1) \geqslant C_n \log(r_1/r)$ (см. [7]), то при $r \to 0$ имеем

$$m_n(\Gamma) = m_n(\Gamma_1) \to m_n(\Gamma(\gamma_0, \gamma_1, B(x_0, r_1) \backslash E)) = \infty$$

для каждого $x_0 \in E$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Если E – NCS-компакт конечной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, то E – NED-множество.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \{x \in R^n : a_j < x_j < b_j, j = \overrightarrow{1, n}\}$ – невырожденный координатный прямоугольник такой, что $E \subset \Pi$, а σ_{0j}, σ_{1j} — грани этого прямоугольника, параллельные гиперплоскости $x_j = 0$.

Пусть отображение $f(t) : (0; 1) \to R^n$ задает непрерывную кривую γ, $f(+0) \in \sigma_{0j}$, $f(1-0) \in \sigma_{1j}$ и $\gamma \backslash (\sigma_{0j} \cup \sigma_{1j}) \subset \Pi \backslash E$.

Семейство всех таких кривых обозначим через Γ_j. Положим

$$T_n = \{l(x') : x' \in \Pi'\}, T'_n = \{l(x') : x' \in \Pi'$$
$$\text{и} \quad \operatorname{card}(l(x') \cap E) < \operatorname{card} N\},$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\Pi' = \{x' \in R^{n-1} : a_j < x_j < b_j, j = \overrightarrow{1, n-1}\}$, $l(x') = \{(x', x_n) \in \Pi : a_n < x_n < b_n\}$.

Ввиду условия теоремы, $m_n(T_n) = m_n(T'_n)$.

Пусть ρ – допустимая метрика для семейства Γ_n. Возьмем некоторую кривую γ семейства T'_n. Не ограничивая общности, можно считать, что множество $\gamma \cap E$ состоит из одной точки x_0. Будем предполагать, что точка x_0 разбивает интервал γ на два интервала γ_0 и γ_1, сходящихся в точке x_0 по области Π, так как это условие достигается достаточно малым отступлением от поверхностей σ_{0n} внутрь прямоугольника Π вдоль кривой γ. Поскольку $m_n(\gamma_0, \gamma_1, B(x_0, r)\backslash E) = \infty$ для достаточно малых $r > 0$, то по заданному $\varepsilon > 0$ в $B(x_0, r)\backslash E$ можно указать кривую $\lambda \in \Gamma(\gamma_0, \gamma_1, B(x_0, r)\backslash E)$ такую, что

$$\int\limits_{\lambda} \rho ds < \varepsilon.$$

Тогда существуют точки $a \in \gamma_0$ и $b \in \gamma_1$, которые соединяются кривой λ. Заменим отрезок $[a;\ b]$ на кривую $\overline{\lambda}$. Тем самым из кривой γ образуем кривую $\gamma_1 \in \Gamma_n$. Ясно, что

$$\int\limits_{\gamma_1} \rho ds \geqslant 1.$$

В силу произвольности шара $B(x_0, r)$ и числа $\varepsilon > 0$ имеем неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \geqslant 1.$$

Это неравенство влечет допустимость метрики ρ для семейства T'_n. Значит (см. [10]),

$$m_n(T'_n) = m_n(T_n) = m_n(\Gamma_n) = C_n(\sigma_{0n}, \sigma_{1n}, \Pi\backslash E) = C_n(\sigma_{0n}, \sigma_{1n}, \Pi).$$

Аналогично покажем, что $C_n(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi\backslash E) = C_n(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi)$, $j = \overrightarrow{1, n-1}$.

Согласно [10], E – NED-множество. Теорема доказана.

Теорему 6 нетрудно распространить на случай компактов σ-конечной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа. При $n = 2$ результат теоремы 6 был установлен Штребелем [11].

Литература

1. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, М., 1983.
2. H. Renggli, *Quasiconformal mappings and extremal lengths*, Amer. J. Math. **86** (1964), 63–69.
3. И. Н. Песин, *Метрические свойства квазиконформных отображений*, Мат. сб. **40**, No. 3 (1956), 281–294.
4. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function theoretic null sets*, Acta Math. **83**, No. 1/2 (1950), 101–129.
5. О. Мартио, Р. Някки, *Продолжение квазиконформных отображений*, Сиб. мат. ж. **28**, No. 4 (1987), 162–170.
6. В. А. Шлык, *Топологически устранимые компакты для пространственных квазиконформных отображений*, Дальневост. мат. ж. No. 1 (1995), 80–84.
7. А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Новосибирск, 1983.
8. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **90** (1957), 171–219.
9. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-ое изд., М., 1966.
10. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств*, Зап. науч. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
11. K. Strebel, *On the maximal dilation of quasiconformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 903–909.

Дальневосточный государственный университет

E-mail: tyutyuev@math.dvgu.ru

Поступило 16 июня 2004 г.