Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

О. М. Фоменко

АВТОМОРФНЫЕ L-ФУНКЦИИ В АСПЕКТЕ ПО ВЕСУ

§0. Введение

Рассмотрим пространство $S_k(\Gamma)$ голоморфных Γ-параболических форм

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}, z \in H = \{z = x + iy : y > 0\}$$

четного веса $k \geqslant 12$ для $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$; $S_k(\Gamma)^+$ – множество собственных форм Гекке из этого пространства с $a_f(1) = 1$. Известно, что

$$\# S_k(\Gamma)^+ = \frac{k}{12} + O(1), \quad k \to \infty, \quad S_k(\Gamma) = \varnothing, \quad \text{если} \quad 2 \leqslant k \leqslant 10.$$

Положим

$$\lambda_f(n) = a_f(n)/n^{\frac{k-1}{2}};$$

для простого p имеем (Гекке, Делинь)

$$a_f(p) = \alpha_f(p) + \overline{\alpha_f(p)}, \quad \alpha_f(p)\overline{\alpha_f(p)} = 1.$$

Для $f \in S_k(\Gamma)^+$ рассмотрим L-функцию Гекке

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \alpha_f(p) p^{-s})^{-1} (1 - \overline{\alpha_f(p)} p^{-s})^{-1}$$
$$= \prod_p (1 - \lambda_f(p) p^{-s} + p^{-2s})^{-1}.$$

$L(s, f)$ является целой функцией и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00087) и Программы 2004 г. фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследования в фундаментальных областях современной математики”.

Пусть $f \in S_k(\Gamma)^+$, $g \in S_l(\Gamma)^+$, где k, l – четные числа $\geqslant 12$. Рассмотрим L-функцию Ранкина–Сельберга

$$L(s, f \otimes g) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)\,\lambda_g(n)}{n^s}.$$

$L(s, f \otimes g)$ всюду голоморфна (исключая простой полюс в точке $s = 1$, если $f = g$) и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа. Для $f \in S_k(\Gamma)^+$ рассмотрим также симметрический квадрат $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ L-функции Гекке $L(s, f)$:

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) = \prod_p (1 - \alpha_f^2(p) p^{-s})^{-1} (1 - p^{-s})^{-1} (1 - \overline{\alpha_f^2(p)} p^{-s})^{-1};$$

$L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ является целой функцией и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа. Легко видеть, что

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n^2) n^{-s}, \quad \zeta(s) L(s, \operatorname{sym}^2 f) = L(s, f \otimes f).$$

Введем обозначение

$$S(k \leqslant K) := \bigcup_{\substack{12 \leqslant k \leqslant K \\ k \text{ четное}}} S_k(\Gamma)^+.$$

Сарнак [1] доказал, что для больших K и M с условием $K^{151/165} \leqslant M \leqslant K^{1-\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$\sum_{K-M \leqslant k \leqslant K+M} \ \sum_{f \in S_k(\Gamma)^+} |L(\tfrac{1}{2}, f \otimes g)|^2 \underset{\varepsilon, g}{\ll} (MK)^{1+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Используя соображения из [1], мы в §1 доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Для большого K справедливо неравенство*

$$\sum_{f \in S(k \leqslant K)} L\Big(\frac{1}{2}, f\Big)^4 \underset{\varepsilon}{\ll} K^{2+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что в [2, 3] доказана асимптотическая формула $(k \to \infty)$

$$\sum_{f \in S_k(\Gamma)^+} \omega_f L\left(\frac{1}{2}, f\right)^2 = 4 \log k + c + O\left(k^{-\frac{1}{2}} \log k\right), \qquad (1)$$

где c – абсолютная константа, значение ω_f дается ниже в (6). Из (1) следует оценка

$$\sum_{f \in S_k(\Gamma)^+} L\left(\frac{1}{2}, f\right)^2 \ll k(\log k)^4.$$

В §2 мы доказываем следующую теорему о распределении значений $L(1, \operatorname{sym}^2 f)$, где $f \in S_k(\Gamma)^+$.

Теорема 2. *При целом $m \geqslant 1$ и растущем весе k*

$$\sum_{f \in S_k(\Gamma)^+} L^m(1, \operatorname{sym}^2 f) = \frac{1}{2\pi^2} \zeta^{m+1}(2) B_{m+1} k + O(k^{1-\alpha}),$$

где

$$B_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_m(k)}{k},$$

$$b_m(k) = \sum_{n_1 \ldots n_m = k} \sum_{d_1 | (n_1^2, n_2^2)} \cdots \sum_{\substack{d_{m-1} \left| \left(\left(\frac{n_1 \cdots n_{m-1}}{d_1 \cdots d_{m-2}} \right)^2, n_m^2 \right) \right. \\ d_1 \ldots d_{m-1} = k}} 1,$$

$\alpha = \alpha(m) > 0$ – некоторая константа, $O(\ldots) = O_m(\ldots)$.

Следствием этой теоремы и классической теоремы моментов [4] является

Теорема 3. *При $k \to \infty$ величина*

$$\frac{\#\{f | f \in S_k(\Gamma)^+, L(1, \operatorname{sym}^2 f) \leqslant x\}}{\#\{f | f \in S_k(\Gamma)^+\}}$$

сходится к функции распределения $G(x)$ в каждой точке непрерывности последней, причем соответствующая характеристическая функция имеет вид

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m(2)B_{m+1}}{m!}(it)^m.$$

Теоремы 2, 3 являются аналогами хорошо известных результатов М. Б. Барбана [4, 5] для $L_D(1)$, где $L_D(s)$ – L-функция Дирихле, ассоциированная с вещественным характером Дирихле χ_D по модулю D. Теоремы, аналогичные теоремам 2,3, ранее были доказаны в случае $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$:

1) для параболических собственных форм Гекке–Маасса f на группе Γ (см. [6]);

2) для голоморфных параболических собственных форм Гекке $f \in S_k(\Gamma_0(p))$, где четный вес $k \geqslant 2$ постоянен, а уровень p (простое число) растет (см. [7]).

§1. Доказательство теоремы 1

1.1. Приблизим $L\bigl(\frac{1}{2}, f\bigr)^2$ отрезком ряда Дирихле. Пусть $f(z) \in S_k(\Gamma)^+$, тогда имеем

$$L(s,f)^2 = \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)d(n)}{n^s},$$

где $d(n)$ – классическая функция делителей. Пусть

$$\Lambda(s,f) := (2\pi)^{-2s}\,\Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right)^2 L(s,f)^2.$$

$\Lambda(s,f)$ – целая функция и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Lambda(1-s,f) = \Lambda(s,f). \tag{2}$$

Можно представить $L(s,f)^2$ в виде

$$L(s,f)^2 = \sum_{v=1}^{\infty} b_{f\otimes d}(v)v^{-s}$$

с

$$b_{f\otimes d}(v) = \sum_{n^2 m = v} \lambda_f(m)d(m).$$

Уравнение (2) может быть представлено в виде

$$L(s,f)^2 = \gamma(s)L(1-s,f)^2,$$

где

$$\gamma(s) = (2\pi)^{4s-2}\frac{\Gamma(-s+\frac{k+1}{2})^2}{\Gamma(s+\frac{k-1}{2})^2}.$$

Рассмотрим ситуацию $k\to\infty$. По формуле Стирлинга,

$$\gamma(s) = \Big(\frac{16\pi^2}{k^2-1}\Big)^{2s-1}(1+\eta_k(s)),$$

где

$$\eta_k(s) \ll (|s|+1)^4/k.$$

Фиксируем $G(s)$, аналитическую функцию в полосе – $B \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant B$ с большой константой B, удовлетворяющую условиям $G(0) = 1$, $G(-s) = G(s)$, $G(s) \ll (1+|s|)^{-A}$, A – большая константа. Для $X \geqslant 1$ рассмотрим ($s = \sigma + it$)

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma=2} X^s L\Big(\frac{1}{2}+s,f\Big)^2 G(s)\frac{ds}{s}\\
&= L\Big(\frac{1}{2},f\Big)^2 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma=-1} X^s L\Big(\frac{1}{2}+s,f\Big)^2 G(s)\frac{ds}{s}\\
&= L\Big(\frac{1}{2},f\Big)^2 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma=-1} X^s \Big(\frac{16\pi^2}{k^2-1}\Big)^{2s}\Big[1+\eta_k\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\Big]\\
&\qquad\times L\Big(\frac{1}{2}-s,f\Big)^2 G(s)\frac{ds}{s}\\
&= L\Big(\frac{1}{2},f\Big)^2 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma=2} \Big[X\Big(\frac{16\pi^2}{k^2-1}\Big)^2\Big]^{-s}\\
&\qquad\times\Big[1+\eta_n\Big(\frac{1}{2}-s\Big)\Big]L\Big(\frac{1}{2}+s,f\Big)^2 G(s)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Полагая $X = (k^2-1)/(16\pi^2)$ (надо взять кратное этой величины, если необходимо), мы выражаем $L\big(\frac{1}{2},f\big)^2$ в виде ряда, по существу, длины X:

$$L\left(\frac{1}{2},f\right)^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{f\otimes d}(n)}{\sqrt{n}}V\left(\frac{n}{X}\right)$$
$$+O\Big(\int\limits_{\sigma=\frac{1}{2}+\varepsilon}|X^s\eta_k\left(\frac{1}{2}-s\right)L\left(\frac{1}{2}+s,f\right)^2G(s)\frac{ds}{s}|\Big), \qquad (3)$$

где

$$V(y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma=1}G(s)y^{-s}\frac{ds}{s}.$$

Заметим, что $V(0)=1$; степень гладкости V в нашем распоряжении; V быстро убывает при $y\to\infty$:

$$V(y) \ll (1+|y|)^{-B}.$$

Легко видеть, что O-член в (3) равен

$$O_\varepsilon(k^\varepsilon) \quad \text{для} \quad \varepsilon>0.$$

Следовательно,

$$L\left(\frac{1}{2},f\right)^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{f\otimes d}(n)}{n^s}V\left(\frac{n}{X}\right)+O_\varepsilon(k^\varepsilon),$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{f\otimes d}(n)}{\sqrt{n}}V\left(\frac{n}{X}\right) = \sum_b\frac{1}{b}\sum_a\frac{\lambda_f(a)d(a)}{\sqrt{a}}V\left(\frac{ab^2}{X}\right).$$

Диадическое деление интервала суммирования позволяет свести задачу к оценке сумм вида

$$S_Y(f) = \sum_n\lambda_f(n)d(n)H\left(\frac{n}{Y}\right).$$

Здесь H, по существу, является фиксированной гладкой функцией с компактным носителем в $(0,\infty)$ и $Y\leqslant K^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Ниже считаем, что H имеет компактный носитель в $(1,2)$. Ключевым промежутком для Y является

$$K^{2-\delta}\leqslant Y\leqslant K^{2+\varepsilon},$$

где $0 < \delta$ – достаточно малое число, которое фиксируем. Теорема 1 будет следовать из оценок вида

$$\sum_{K-L\leqslant k\leqslant K+L}\ \sum_{f\in S_k(\Gamma)^+}|S_Y(f)|^2 \ll LYK^{1+\varepsilon} \tag{4}$$

для $K^{1-\delta}\leqslant L\leqslant K$.

Следующие три подпараграфа посвящены доказательству (4).

1.2. В настоящем подпараграфе мы воспользуемся следующей формулой Петерсона

$$\sum_{f\in S_k(\Gamma)^+} w_f\,\lambda_f(n)\,\lambda_f(m) = \delta_{n,m} + 2\pi i^k\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(n,m;c)}{c}J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\Big), \tag{5}$$

где

$$w_f = \frac{2\pi^2}{(k-1)L(1,sym^2 f)}, \tag{6}$$

$\delta_{n,m}$ – символ Кронекера, $S(n,m;c)$ – сумма Клостермана

$$S(n,m;c) = \sum_{\substack{a \pmod c\\ (a,c)=1}} e\Big(\frac{an+\bar{a}m}{c}\Big),$$

$a\bar{a}\equiv 1 \pmod c$, $J_{k-1}(z)$ – функция Бесселя порядка $k-1$.

Пусть K, L – большие параметры с

$$K^{1/2}\leqslant L\leqslant \frac{K}{4}.$$

В конце доказательства L будет выбрано близким к K.

Фиксируем $g_0\in C^\infty(-1,1)$, неотрицательную гладкую функцию с $g_0(0)=1$. Образуем следующее усреднение величины $|S_Y(f)|^2|$:

$$\sum_{K,L} := \sum_k g_0\Big(\frac{k-K}{L}\Big)\sum_{f\in S_k(\Gamma)^+} w_f|S_Y(f)|^2. \tag{7}$$

Напомним, что из работы [8] известно, что для каждого $\varepsilon>0$

$$k^{-\varepsilon}\ll L(1,\mathrm{sym}^2 f)\ll k^{\varepsilon}.$$

Ожидается, что

$$\sum_{K,L}\ll_{\varepsilon}(LY)^{1+\varepsilon}. \tag{8}$$

Неравенство (8) эквивалентно (4), ниже мы будем оценивать $\sum_{K,L}$.

Разлагая правую часть (7), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{K,L} = \sum_k g_0\Big(\frac{k-K}{L}\Big) \sum_{f\in S_k(\Gamma)^+} w_f \sum_{n,m} \lambda_f(n)d(n)\,\lambda_f(m)d(m)\\ \times H\Big(\frac{n}{Y}\Big)H\Big(\frac{m}{Y}\Big)\\ = \sum_k g_0\Big(\frac{k-K}{L}\Big)\sum_{n,m} d(n)d(m)H\Big(\frac{n}{Y}\Big)H\Big(\frac{m}{Y}\Big)\\ \times \sum_{f\in S_k(\Gamma)^+} w_f\,\lambda_f(n)\,\lambda_f(m).\end{aligned}$$

Применяя формулу Петерсона (5), получаем

$$\begin{aligned}\sum_{K,L} = \sum_k g_0\Big(\frac{k-K}{L}\Big)\sum_{n,m} d(n)d(m)H\Big(\frac{n}{Y}\Big)H\Big(\frac{m}{Y}\Big)\\ \times\Big(\delta_{n,m} + 2\pi i^k \sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(n,m;c)}{c}J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\Big)\Big).\end{aligned} \tag{9}$$

Запишем правую часть (9) в виде

$$D_{K,L}(Y) + T_{K,L}(Y),$$

где

$$D_{K,L}(Y) := \sum_k g_0\Big(\frac{k-K}{L}\Big)\sum_n d(n)^2 H\Big(\frac{n}{Y}\Big)^2$$

и

$$\begin{aligned}T_{K,L}(Y) := \sum_{n,m} d(n)d(m)H\Big(\frac{n}{Y}\Big)H\Big(\frac{m}{Y}\Big)\\ \times\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(n,m;c)}{c}\sum_k 2\pi i^k g_0\Big(\frac{k-K}{L}\Big)J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\Big).\end{aligned}$$

Имеем

$$\sum_{n\leqslant R} d(n)^2 \ll R(\log R)^3.$$

Следовательно,

$$D_{K,L}(Y) \ll LY^{1+\varepsilon}.$$

Сумма $T_{K,L}(Y)$ оценивается ниже.

1.3. Рассмотрим сумму по бесселевым функциям $V = V_{K,L}(x)$, где

$$V_{K,L}(x) = \sum_{l\equiv 1(2)} (-1)^{(l-1)/2} g(l) J_l(x), \quad g(x) = g_0\Bigl(\frac{x-K}{L}\Bigr). \tag{10}$$

Исследуем асимптотическое поведение суммы $V_{K,L}(x)$ при условии K, $L \to \infty$, $L \leqslant K^{1-\delta}$ для некоторого $\delta > 0$. Применяя определение $J_l(x)$ и формулу Пуассона, получаем

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(t) \sin(x \cos 2\pi t)dt,$$

где $\widehat{g}(t)$ – преобразование Фурье функции $g(t)$ и $\widehat{g}(t) = Le(-Kt) \times \widehat{g_0}(Lt)$ (подробности см. в книге [9, с. 86]).

Следовательно,

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g_0}(t) e\Bigl(\frac{-Kt}{L}\Bigr) \sin\Bigl(x \cos \frac{2\pi t}{L}\Bigr) dt.$$

Определим

$$W(x) = W_{K,L}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g_0}(t) e\Bigl(\frac{-Kt}{L}\Bigr) e^{ix[1-\cos(2\pi t/L)]} dt,$$

так что

$$V(x) = \frac{-e^{-ix} W(x) + e^{ix} W(-x)}{2i}. \tag{11}$$

Как показал Сарнак [1],

$$W(x) = \widetilde{W}(x) + O(|x|/L^4),$$

где

$$\widetilde{W}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g_0}(t) e\Bigl(\frac{-Kt}{L} + \frac{\pi x t^2}{L^2}\Bigr) dt.$$

Сарнак также показал, что при $|x| \leqslant K^{1-\varepsilon} L$ величиной $\widetilde{W}(x) \ll K^{-N_0}$, N_0 любое, можно пренебречь. Предположим, что $|x| \geqslant K^{1-\varepsilon} L$ и, в частности, что

$$\frac{\sqrt{x}}{L} \geqslant \frac{K^{1/2-\varepsilon}}{L^{1/2}} \geqslant \Bigl(\frac{K}{L}\Bigr)^{1/2} K^{-\varepsilon}.$$

При этом, $\sqrt{x}/L$ должно быть, по крайней мере, малой степенью K, что выполняется при $\delta > \varepsilon$. Справедливо

Предложение 1.

(i) *Для* $\varepsilon > 0$ *и* $x \leqslant K^{1-\varepsilon}L$ *величиной* $\widetilde{W}(x)$ *можно пренебречь;*

$$W(x) \ll \frac{|x|}{L^4} + \widetilde{W}(x) \ll \frac{K}{L^3}.$$

(ii) *Для* $x \geqslant K^{1-\varepsilon}L$ *и* $N \geqslant 1$ *(натуральное фиксированное число)*

$$\widetilde{W}_{K,L}(x) = \frac{L}{\sqrt{x}} e\Big(\frac{K^2}{4\pi x}\Big) \sum_{m=0}^{N} \frac{(2i)^{-m}}{m!} \Big(\frac{L^2}{x}\Big)^m \widehat{g}_0^{(m)}\Big(\frac{KL}{2\pi x}\Big) + O\Big(\Big(\frac{L}{\sqrt{x}}\Big)^{2N+3}\Big).$$

Доказательство использует метод стационарной фазы; см. [1].

1.4. Рассмотрим теперь сумму

$$T_{K,L}(Y) = \sum_{n,m} d(n)d(m)H\Big(\frac{n}{Y}\Big)H\Big(\frac{m}{Y}\Big) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n,m;c)}{c} V_{K,L}\Big(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\Big), \tag{12}$$

где выражение для V дается в (10). Необходимо установить оценку

$$T_{K,L}(Y) \underset{\varepsilon}{\ll} (LY)^{1+\varepsilon}.$$

Из (11) и предложения 1(i) имеем для

$$\frac{\sqrt{nm}}{c} \leqslant K^{1-\varepsilon}L \tag{13}$$

неравенство

$$T_{K,L}(Y) \ll \sum_{n,m} d(n)d(m)H\Big(\frac{n}{Y}\Big)H\Big(\frac{m}{Y}\Big) \sum_{c} \frac{c^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{c} \frac{\sqrt{nm}}{cL^4},$$

причем мы использовали оценку Вейля

$$S(n,m;c) \ll (n,m,c)^{\frac{1}{2}}\, c^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Таким образом, для m, n, c в области (13) имеем оценку

$$T_{K,L}(Y) \ll Y^{3+\varepsilon}/L^4 \ll (LY)^{1+\varepsilon},$$

если $L \geqslant Y^{2/5}$.

Поэтому мы можем предположить, что

$$\frac{\sqrt{nm}}{c} \geqslant K^{1-\varepsilon}L.$$

В частности, имеем

$$c \leqslant Y/K^{1-\varepsilon}L,$$

причем можно брать Y из интервала

$$K^{1-\varepsilon} \leqslant Y \leqslant K^{2+\varepsilon}.$$

Заменим в (12) V на W и вставим в (12) выражение, определяющее сумму Клостермана. В результате, приходим к суммам

$$T^{\pm}_{K,L}(Y) = \sum_{c\leqslant Y/K^{1-\varepsilon}L} \frac{1}{c} \sum_{n,m} d(n)d(m)H\big(\frac{n}{Y}\big)H\big(\frac{m}{Y}\big)$$
$$\times \sum_{x \bmod c}^{*} e\big(\frac{nx+m\bar{x}}{c}\big)e\big(\pm\frac{2\sqrt{nm}}{c}\big)W\big(\mp\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\big),$$

где $\sum\limits_{x \bmod c}^{*}$ означает суммирование по приведенной системе вычетов.

Заменяя W на $\widetilde{W}$, вводим в рассмотрение допустимый для наших целей остаток, который

$$\ll \sum_{c\leqslant Y/K^{1-\varepsilon}L} \frac{1}{c}Y^2c\frac{Y}{c}\frac{1}{L^4} \ll \frac{Y^{3+\varepsilon}}{L^4}.$$

Следовательно, остается оценить суммы

$$\widetilde{T}^{\pm}_{K,L}(Y) = \sum_{C\leqslant Y/K^{1-\varepsilon}L} \frac{1}{c} \sum_{n,m} d(n)d(m)H\big(\frac{n}{Y}\big)H\big(\frac{m}{Y}\big)$$
$$\times \sum_{x \bmod c} e\big(\frac{nx+m\bar{x}}{c}\big)e\big(\pm\frac{2\sqrt{nm}}{c}\big)\widetilde{W}\big(\mp\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\big).$$

Введем обозначение

$$G(m) = H\big(\frac{m}{Y}\big)e\big(\pm\frac{2\sqrt{nm}}{c}\big)\widetilde{W}\big(\mp\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\big).$$

Рассмотрим лишь сумму $\widetilde{T}^{+}_{K,L}(Y)$, сумма $\widetilde{T}^{-}_{K,L}(Y)$ изучается аналогично. Используем следующую формулу Вороного [10].

Предложение 2. *Пусть $g(x)$ – гладкая функция на $\mathbb{R}^+$ с компактным носителем, $(c,d)=1$. Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} d(m)e\Big(\frac{dm}{c}\Big)g(m) = \frac{1}{c}\int_0^{\infty}(\log x + 2\,\gamma - 2\log c)g(x)dx$$

$$-\frac{2\pi}{c}\sum_{m=1}^{\infty} d(m)e\Big(\frac{-\bar{d}m}{c}\Big)\int_0^{\infty} Y_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{mx}}{c}\Big)g(x)dx$$

$$+\frac{4}{c}\sum_{m=1}^{\infty} d(m)e\Big(\frac{\bar{d}m}{c}\Big)\int_0^{\infty} K_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{mx}}{c}\Big)g(x)dx,$$

где γ – константа Эйлера; $Y_0(z)$, $K_0(z)$ – бесселевы функции.

Имеем $((c,x)=1)$

$$\sum_{m\geqslant 1} d(m)H\Big(\frac{m}{Y}\Big)e\Big(\frac{mx}{c}\Big)e\Big(\frac{2\sqrt{nm}}{c}\Big)\widetilde{W}\Big(\frac{-4\pi\sqrt{nm}}{c}\Big)$$

$$= \sum_{m\geqslant 1} d(m)e\Big(\frac{mx}{c}\Big)G(m) = \check{F}_1 - \sum_{r\geqslant 1} d(r)e\Big(\frac{-\bar{x}r}{c}\Big)\check{F}_2(r)$$

$$+\sum_{r\geqslant 1} d(r)e\Big(\frac{\bar{x}r}{c}\Big)\check{F}_3(r) = A_1 - A_2 + A_3, \tag{14}$$

где

$$\check{F}_1 = \frac{1}{c}\int_0^{\infty}(\log t + 2\,\gamma - 2\log c)G(t)dt,$$

$$\check{F}_2(r) = \frac{2\pi}{c}\int_0^{\infty} G(t)Y_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{tr}}{c}\Big)dt = \frac{2\pi Y}{c}\int_0^{\infty} G(tY)Y_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{tYr}}{c}\Big)dt,$$

$$\check{F}_3(r) = \frac{4}{c}\int_0^{\infty} G(t)K_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{tr}}{c}\Big)dt = \frac{4Y}{c}\int_0^{\infty} G(tY)K_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{tYr}}{c}\Big)dt.$$

Обратимся к сумме A_2. В нашем случае $r\geqslant 1$ и t принадлежит фиксированному компактному множеству, так что

$$\frac{\sqrt{tYr}}{c} \gg \frac{\sqrt{Y}}{c}.$$

Величина $\sqrt{tYr/c}$ будет равномерно большой, поэтому мы разложим $Y_0(4\pi\sqrt{tYr/c})$ в асимптотический ряд с точностью до фиксированного порядка (который должен быть достаточно большим таким, чтобы остатком можно было пренебречь). Все члены асимптотического разложения трактуются единым образом. С точностью до первого члена асимпттического ряда,

$$Y_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots .$$

Сходно, вычисляется $\widetilde{W}$ в точке $x \geqslant K^{1-\varepsilon}L$; при этом можно использовать асимптотическое разложение из предложения 1. Разложение с точностью до порядка N с условием, что

$$\left(\frac{L}{\sqrt{x}}\right)^{2N+3} \leqslant \left(\frac{L}{K}\right)^{(2N+3-\varepsilon)/2},$$

содержит остаточный член, которым можно пренебречь (здесь мы используем неравенство $L/K \leqslant K^{-\delta}$ с некоторым фиксированным $\delta > 0$).

Возьмем первые члены асимптотических разложений функций Y_0 и $\widetilde{W}$ (оставшиеся члены дают сходную картину). Таким образом,

$$\begin{aligned}
\check{F}_2(r) = \frac{2\pi Y}{c} \int\limits_0^\infty H(t) e\left(\frac{2\sqrt{Ynt}}{c}\right) \frac{L\sqrt{c}}{(Ynt)^{1/4}\sqrt{4\pi}} \\
\times e\left(\frac{-K^2 c}{4\pi \cdot 4\pi\sqrt{4nt}}\right) \widehat{g}_0\left(\frac{-KLc}{8\pi^2\sqrt{Ynt}}\right) \\
\times \sqrt{\frac{2c}{4\pi^2\sqrt{tYr}}} \sin\left(\frac{4\pi\sqrt{tYr}}{c} - \frac{\pi}{4}\right) \\
+ \dots \\
= \frac{L\sqrt{Y}}{(nr)^{1/4}\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{H(t)}{\sqrt{t}} \widehat{g}_0\left(\frac{-KLc}{8\pi^2\sqrt{Ynt}}\right) \\
\times e\left(\frac{2\sqrt{Ynt}}{c} - \frac{K^2 c}{16\pi^2\sqrt{Ynt}}\right) \sin\left(\frac{4\pi\sqrt{tYr}}{c} - \frac{\pi}{4}\right) dt \\
+ \dots
\end{aligned}$$

Главный член есть сумма двух членов вида

$$\check{F}_2^{\pm}(r) = \frac{L\sqrt{Y}}{(nr)^{1/4}} \int\limits_0^\infty \frac{H(t)}{\sqrt{t}} \widehat{g}_0\left(\frac{-KLc}{8\pi^2\sqrt{Ynt}}\right)$$
$$\times e\left(\frac{2\sqrt{Yt}(\sqrt{n} \pm \sqrt{r})}{c} - \frac{K^2 c}{16\pi^2\sqrt{Ynt}}\right) dt.$$

Для η_1, η_2, $\eta_3 = \pm 1$ определим

$$B_{\eta,Y,c}(n,r) = \int\limits_0^\infty \frac{H(t)}{\sqrt{t}} e\left(\frac{2\sqrt{Yt}(\eta_1\sqrt{n} + \eta_2\sqrt{r})}{c}\right.$$
$$\left. + \frac{\eta_3 K^2 c}{16\pi^2\sqrt{Ynt}}\right) \widehat{g}_0\left(\frac{-KLc}{8\pi^2\sqrt{Ynt}}\right) dt.$$

В соответствии с (14), разложим

$$\widetilde{T}^{+}_{K,L}(Y) = T_1 - T_2 + T_3.$$

Нам необходимо получить оценку

$$\widetilde{T}^{+}_{K,L}(Y) \ll LYK^{\varepsilon}.$$

Рассмотрим сначала сумму T_2. В соответствии со сказанным выше, главный член для T_2 есть некоторая сумма рядов вида (см. ниже (15))

$$P(c,Y) = L\sqrt{Y} \sum_{n,r} \frac{d(n)d(r)}{(nr)^{1/4}} H\left(\frac{n}{Y}\right)$$
$$\times \sum_{x \bmod c}^{*} e\left(\frac{\bar{x}(n-r)}{c}\right) B_{\eta,Y,c}(n,r).$$

Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Для $\varepsilon > 0$ (произвольно малая, но фиксированная величина) и $L \leqslant K^{1-\delta}$, $\delta > 0$, справедливы следующие утверждения:*

1. *Для $N_0 > 0$ и фиксированного $r \geqslant K^{2+\varepsilon}$*

$$B_{\eta,Y,c}(n,r) \underset{N_0}{\ll} \left(\frac{c^2}{Yr}\right)^{N_0}.$$

2. *Для* $r \leqslant K^{2+\varepsilon}$ *и* $|n-r| \geqslant K^{\varepsilon}\left(\frac{K}{L}\right)^{3/2}\sqrt{c}$

$$B_{\eta,Y,c}(n,r) \underset{N_0}{\ll} K^{-N_0}.$$

3. *Для фиксированного* $\nu \geqslant 0$ *и* $n-r=h\neq 0$ *и* $|h|<\sqrt{K}$ *имеем*

$$\frac{d^{\nu}}{dn^{\nu}}(B_{\eta,Y,c}(n,n+h)) \underset{\nu}{\ll} \left[\frac{K^{\varepsilon}|h|}{cY}+\frac{K^2c}{Y^2}\right]^{\nu}.$$

4. $B_{(1,-1,1),Y,c}(n,n) \underset{N_0}{\ll} K^{-N_0}$.

Доказательство см. в [1].

Главный член для T_2 есть сумма

$$\sum_{c\leqslant Y/LK^{1-\varepsilon}} \frac{1}{c}P(c,Y). \tag{15}$$

Разобьем $P(c,Y)$ на суммы, зависящие от разности $n-r$. Ввиду пунктов 1), 2), 4) леммы 1, единственные суммы, которые нужно рассматривать, это суммы, для которых $0\neq|n-r|\leqslant K^{\varepsilon}\left(\frac{K}{L}\right)^{3/2}\sqrt{c}$. Вклад этих сумм в (15) не превосходит

$$L\sqrt{Y}\sum_{c\leqslant Y/LK^{1-\varepsilon}}\ \sum_{0<|h|\leqslant(K/L)^{3/2}K^{\varepsilon}\sqrt{c}} \times\left|\sum_n H\left(\frac{n}{Y}\right)\frac{d(n)d(n-h)}{(n(n-h))^{1/4}}B_{\eta,Y,c}(n,n-h)\right|. \tag{16}$$

Возьмем L близким к K; точнее, пусть $L=K^{1-\delta}$, где $\delta>0$ мало; тогда Y будет близким к K^2. По лемме 1, $B_{\eta,Y,c}(n,n-h)\ll 1$. Имеем

$$(16) \ll L\sqrt{Y}\sum_{c\leqslant Y/LK^{1-\varepsilon}}\ \sum_{0<|h|<(K/L)^{3/2}K^{\varepsilon}\sqrt{c}} Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$
$$\ll LY^{1+\varepsilon}\left(\frac{K}{L}\right)^{3/2}K^{\varepsilon}\left(\frac{Y}{LK^{1-\varepsilon}}\right)^{3/2} \leqslant LYK^{7\varepsilon+3\delta} =: \Delta.$$

Тем самым,

$$T_2 \ll \Delta.$$

Аналогичным образом оценивается T_3; при этом используется асимптотика

$$K_0(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}e^{-x}(1+O(x^{-1})).$$

Имеем

$$T_3 \ll \Delta.$$

Переходим к сумме

$$T_1 = \sum_{c \leqslant Y/K^{1-\varepsilon}L} \frac{1}{c} \sum_n d(n) H\left(\frac{n}{Y}\right) \sum_{x \bmod c}^{*} e\left(\frac{n\bar{x}}{c}\right) \check{F}_1.$$

Имеем

$$\check{F}_1 = \frac{Y}{c} \int_0^\infty G(tY)(\log(Yt) + 2\gamma - 2\log c)dt$$

$$= \frac{Y}{c} \int_0^\infty H(t) e\left(\frac{2\sqrt{Ynt}}{c}\right) \frac{L\sqrt{c}}{(Ynt)^{1/4}\sqrt{4\pi}} e\left(\frac{-K^2 c}{4\pi \cdot 4\pi\sqrt{Ynt}}\right)$$

$$\times \widehat{g_0}\left(\frac{-KLc}{8\pi^2\sqrt{Ynt}}\right)\Bigl(\log(Yt) + 2\gamma - 2\log c)dt + \ldots$$

$$= \frac{LY^{3/4}}{\sqrt{c}n^{1/4}\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \frac{H(t)}{t^{1/4}} \widehat{g_0}\left(\frac{-KLc}{8\pi^2\sqrt{Ynt}}\right) e\left(\frac{2\pi\sqrt{Ynt}}{c} - \frac{K^2 c}{16\pi^2\sqrt{Ynt}}\right)$$

$$\times(\log(Yt) + 2\gamma - 2\log c)dt + \ldots$$

Небольшое изменение пункта 2) леммы 1 дает следующую оценку, справедливую при $n \geqslant K^\varepsilon \left(\frac{K}{L}\right)^{3/2}\sqrt{c}$,

$$\check{F}_1 \ll_{N_0} K^{-N_0}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$T_1 \ll \Delta.$$

В силу нашего выбора $\varepsilon < \delta$, доказана следующая

Теорема 1′. *Фиксируем $\delta > 0$. Тогда для больших K*

$$\sum_{K-K^{1-\delta} \leqslant k \leqslant K+K^{1-\delta}} \sum_{f \in S_k(\Gamma)^+} L\left(\frac{1}{2}, f\right) \ll_\delta K^{2+C\delta},$$

где $C > 1$ – некоторая абсолютная константа.

Теорема 1 следует из теоремы 1′, поскольку $\delta > 0$ можно взять любым.

§2. Доказательство теоремы 2

2.1. Доказательство теоремы 2 сходно с доказательствами аналогичных результатов работ [6,7] и опирается на идеи М. Б. Барбана [5]. Поэтому здесь мы его не приводим; остановимся лишь на некоторых моментах, характерных для аспекта по весу. В работе [7] для случая $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$, где f – голоморфная $\Gamma_0(p)$-параболическая собственная форма Гекке веса 2, важную роль играет асимптотика (p – растущий параметр)

$$\sum_f \omega_f\,\lambda_f(n) = \delta_{n,1} + O(p^{-3/2}n^{1/2}),$$

вытекающая из формулы Петерсона. В ситуации растущего веса k имеет место аналогичный факт. Мы сохраняем все обозначения §0 и §1.

Лемма 2. *Пусть* $f \in S_k(\Gamma)^+$, *тогда*

$$\sum_{f\in S_k(\Gamma)^+} \omega_f\,\lambda_f(n) = \delta_{n,1} + O_\varepsilon\left(k^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Доказательство. По формуле Петерсона (5),

$$\sum_{f\in S_k(\Gamma)^+} \omega_f\,\lambda_f(n) = \delta_{n,1} + 2\pi i^k \sum_{c\geqslant 0} \frac{1}{c} S(n,1;c) \times J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right).$$

Введем обозначения:

$$l = k-1, \quad x = \frac{4\pi\sqrt{n}}{c}.$$

По результату А. Вейля,

$$|S(n,1;c)| \leqslant c^{\frac{1}{2}} d(c).$$

Известно следующее неравенство

$$|J_l(y)| \leqslant \min\left(1, \frac{(y/2)^l}{(l-1)!}\right), \tag{17}$$

l – целое положительное число. Имеем

$$\sum_{c\geqslant 1}\frac{1}{c}S(n,1;c)J_l(x)=\sum_{x\geqslant 1}\cdots+\sum_{x<1}\cdots=:\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2.$$

Используя оценку Вейля и неравенство (17), легко получаем

$$\sum\nolimits_2 \ll \frac{1}{\Gamma(l)}n^{\frac{1}{4}}\log n. \tag{18}$$

Сумму $\sum_1$ разобьем на три суммы:

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 &= \sum_{1\leqslant x<0,99l}+\sum_{0,99l\leqslant x\leqslant 1,01l}+\sum_{x>1,01l}\cdots=\dots\\ &=:\sum\nolimits_{11}+\sum\nolimits_{12}+\sum\nolimits_{13}.\end{aligned}$$

Рассмотрим $\sum_{11}$. Имеем

$$\sum\nolimits_{11}\ll\sum_{1\leqslant x<0,99l}\frac{\sqrt{c}d(c)}{c}J_l(x).$$

По формуле Лангера [11, с. 103],

$$\begin{gathered}J_l(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{arctgw}{w}}K_{1/3}(z)+O\bigl(l^{-\frac{4}{3}}\bigr),\\ w=\sqrt{1-x^2/l^2},\quad z=l(Arthw-w).\end{gathered} \tag{19}$$

В силу наших предположений,

$$1>w>\frac{1}{10}.$$

Поскольку

$$Arthw-w=\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}+\frac{w^7}{7}+\dots\quad(|w|<1)$$

и

$$K_{1/3}(z)\ll\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\quad(z\to\infty)$$

(см. [12, с. 199]), при нашем выборе z (см. (19)) справедлива оценка

$$K_{1/3}(z)\ll\frac{e^{-l}}{\sqrt{l}}.$$

Следовательно, при $1 \leqslant x < 0,99l$

$$J_l(x) \ll l^{-4/3},$$

поэтому

$$\sum\nolimits_{11} \ll l^{-4/3} n^{\frac{1}{4}} \log n. \tag{20}$$

Рассмотрим сумму $\sum_{13}$. Имеем

$$\sum\nolimits_{13} \ll \sum_{x>1,01l} \frac{\sqrt{c}d(c)}{c} J_l(x).$$

По формуле Лангера [11, с. 103], имеем

$$J_l(x) = \sqrt{1 - \frac{arctgw}{w}}\Big[J_{1/3}(z)\cos\frac{\pi}{6}$$

$$-Y_{1/3}(z)\sin\frac{\pi}{6}\Big] + O(l^{-4/3}),$$

$$w = \sqrt{\frac{x_2}{l^2} - 1}, \quad z = l(w - arctgw).$$

В силу наших предположений,

$$\infty > w > 1/10.$$

Известны неравенства [12, с. 185]

$$J_{1/3}(z) \ll \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad Y_{1/3}(z) \ll \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (z \to \infty).$$

Следовательно, при $x > 1,01l$

$$J_l(x) \ll \frac{1}{\sqrt{l}},$$

откуда

$$\sum\nolimits_{13} \ll l^{-1/2} n^{1/4} \log n. \tag{21}$$

Рассмотрим, наконец, сумму $\sum_{12}$. Воспользуемся тривиальной оценкой

$$|J_l(x)| \leqslant 1.$$

Справедливо неравенство

$$\sum\nolimits_{12} \ll \sum_{0,99l \leqslant x \leqslant 1,01l} \frac{d(c)}{\sqrt{c}}.$$

Условие $0,99l \leqslant x \leqslant 1,01l$ эквивалентно

$$\frac{\sqrt{n}}{l} \cdot \frac{4\pi}{1,01} \leqslant c \leqslant \frac{\sqrt{n}}{l} \cdot \frac{4\pi}{0,99}; \tag{22}$$

Интервал (22) обозначим через I. Имеем

$$\sum\nolimits_{12} \ll \sum_{c \in I} \frac{d(c)}{\sqrt{c}} \ll l^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}. \tag{23}$$

Собирая полученные оценки (18), (20), (21), (23), доказываем лемму 2.

2.2. Сформулируем еще две леммы, играющие важную роль в доказательстве теоремы 2. Вводим величину $N(\sigma, H, \operatorname{sym}^2 f)$, причем предполагаем, что $\sigma = \operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$:

$$N(\sigma, H, \operatorname{sym}^2 f) = \#\{\rho = \beta + i\gamma \mid \\ L(\rho, \operatorname{sym}^2 f) = 0, \beta \geqslant \sigma, |\gamma| \leqslant H\}.$$

Лемма 3. *Для $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$, $K \geqslant 12$ и некоторой положительной константы b имеем*

$$\sum_{f \in S(k \leqslant K)} N(\sigma, \log^3 K, \operatorname{sym}^2 f) \underset{\varepsilon}{\ll} K^{b(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Лемма 4. *Пусть $0 < \eta < \frac{1}{2}$. Если $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ $(f \in S(k \leqslant K))$ не имеет нулей в области*

$$1 > \sigma \geqslant 1 - \eta, \quad |t| \leqslant \log^3 K,$$

то в области

$$1 > \sigma \geqslant 1 - \eta/2, \quad |t| \leqslant \log^2 K$$

для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) \underset{\varepsilon}{\ll} K^{\varepsilon}.$$

Доказательство последней леммы основано на использовании теоремы Бореля–Каратеодори и теоремы Адамара о трех кругах и является стандартным.

Образцом для леммы 3 служит аналогичный факт в классической теории большого решета (см. книгу Монтгомери [13]). Луо [6] адаптировал классическое доказательство к случаю $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$, где f – параболическая собственная форма Гекке–Маасса. При доказательстве леммы 3 неравенство большого решета для $\{\lambda_f(n^2)\}_{f \in S(k \leqslant K)}$ (см. предложение 3 ниже) играет ключевую роль. Кроме того, при доказательстве леммы 3 необходима оценка

$$\sum_{f \in S(k \leqslant K)} \int\limits_{|t| \leqslant 2z} |L(\frac{1}{2} + it, \mathrm{sym}^2 f)|^2 dt \ll K^{4+\varepsilon},$$

$$z = \log^3 K, \quad \varepsilon > 0.$$

Эта оценка легко доказывается с помощью принципа выпуклости Фрагмена–Линделефа.

2.3. Прежде, чем сформулировать предложение 3, изучим аналитические свойства функции

$$L_{f_1 f_2}(s) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_{f_1}(n^2)\, \lambda_{f_2}(n^2) n^{-s},$$

где

$$f_1 \in S_{k_1}(\Gamma)^+, \quad f_2 \in S_{k_2}(\Gamma)^+.$$

Пусть F_i – подъем Гельбарта–Жаке формы f_i $(i = 1, 2)$ [14]. Известно, что F_i – автоморфная каспидальная форма на $GL(3, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, где $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ – кольцо аделей поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Наша задача – показать, что

$$L_{f_1 f_2}(s) = L(s, F_1 \otimes F_2) \cdot G(s),$$

где $L(s, F_1 \otimes F_2)$ – L-функция свертки Ранкина–Сельберга форм F_1 и F_2, $G(s)$ – ряд Дирихле, равномерно сходящийся в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$. Напомним, что

$$\lambda_{f_1}(p) = \alpha_{f_1}(p) + \overline{\alpha_{f_1}(p)}, \lambda_{f_2}(p) = \alpha_{f_2}(p) + \overline{\alpha_{f_2}(p)}.$$

Известно соотношение

$$\lambda_f(p^v) = \frac{\alpha_f(p)^{v+1} - \overline{\alpha_f(p)}^{\,v+1}}{\alpha_f(p) - \overline{\alpha_f(p)}}. \tag{24}$$

Вводим функцию [15]

$$L_{[f_1,f_2]}(s)=\prod_p[(1-\alpha_{f_1}^2(p)\,\alpha_{f_2}^2(p)p^{-s})$$
$$\times(1-\alpha_{f_1}^2(p)\overline{\alpha_{f_1}^2(p)}p^{-s})(1-\overline{\alpha_{f_1}^2(p)}\,\alpha_{f_2}^2(p)p^{-s})$$
$$\times(1-\overline{\alpha_{f_1}^2(p)}\;\overline{\alpha_{f_2}^2(p)}p^{-s}]^{-1}.$$

Используя (24), имеем

$$L_{f_1f_2}(s)=\prod_p\left(\sum_{v=0}^{\infty}\lambda_{f_1}(p^{2v})\,\lambda_{f_2}(p^{2v})p^{-vs}\right)$$
$$=L_{[f_1,f_2]}(s)\cdot\prod_p X_p^{(3)}(p^{-s}),$$

где

$$X_p^{(3)}(t)=1+(\lambda_{f_1}(p)^2+\lambda_{f_2}(p)^2-3)t-(\lambda_{f_1}(p)^2+\lambda_{f_2}(p)^2-3)t^2-t^3.$$

Очевидно,

$$L_{f_1f_2}(s)=\zeta^{-1}(s)L(s,\mathrm{sym}^2 f_1)L(s,\mathrm{sym}^2 f_2)L_{[f_1,f_2]}(s)$$
$$\times\zeta(s)\frac{1}{L(s,\mathrm{sym}^2 f_1)}\frac{1}{L(s,\mathrm{sym}^2 f_2)}\prod_p X_p^{(3)}(p^{-s}).$$

Имеем (см. [8])

$$\zeta^{-1}(s)L(s,\mathrm{sym}^2 f_1)L(s,\mathrm{sym}^2 f_2)L_{[f_1,f_2]}(s)$$
$$=L(s,F_1\otimes F_2).$$

Непосредственный подсчет дает:

$$\zeta(s)\frac{1}{L(s,\mathrm{sym}^2 f_1)}\frac{1}{L(s,\mathrm{sym}^2 f_2)}\prod_p X_p^{(3)}(p^{-s})=\prod_p X_p^{(8)}(p^{-s})=G(s),$$

где

$$X_p^{(8)}(t)=1-\gamma_2(p)t^2+\cdots+t^8.$$

Следовательно,

$$L_{f_1f_2}=L(s,F_1\otimes F_2)\cdot G(s).$$

Пусть $f_1 \neq f_2$, откуда $F_1 \neq F_2$. Тогда имеем [8]: $L(s, F_1 \otimes F_2)$ – целая функция, причем $L(1, F_1 \otimes F_2) \neq 0$, которая обладает функциональным уравнением риманова типа.

Рассмотрим теперь случай $f_1 = f_2 = f$, откуда $F_1 = F_2 = F$. Как показано в [8],

$$L(s, F \otimes F) = L(s, F) \cdot L(s, \mathrm{sym}^2 F). \tag{25}$$

Отметим, что $L(s, F) = L(s, \mathrm{sym}^2 f)$. Известно [8], что

$$L(s, \mathrm{sym}^2 F) = \zeta(s) L(s, \mathrm{sym}^4 f). \tag{26}$$

Поскольку f не является подъемом из $GL(1)$, функция $L(s, \mathrm{sym}^2 F)$ имеет простой полюс в точке $s = 1$ и аналитична в остальных точках. Известно, что $L(1, F) \neq 0$. В [15] с использованием (25) и (26) было доказано, что

$$\mathrm{Res}_{s=1} L(s, F \otimes F) \ll (\log k)^c,$$

где $c > 0$ – константа. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Res}_{s=1} L_{ff}(s) \ll (\log k)^c. \tag{27}$$

Отметим, что ряд Дирихле $G(s)$ равномерно сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ любое, и представляет там аналитичесвкую функцию. $G(s)$ не имеет нулей в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$.

Замечание 1. Как показано выше,

$$L_{f_1 f_2}(s) = L_{[f_1, f_2]}(s) \cdot \prod_p X_p^{(3)}(p^{-s}),$$

где

$$X_p^{(3)}(p^{-s}) = (1 - p^{-s}) \left(1 + \frac{\lambda_{f_1}(p)^2 + \lambda_{f_2}(p)^2 - 2}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right).$$

Учитывая результаты Курокавы [16], можно предположить, что функции

$$\prod_p \left(1 + \frac{\lambda_{f_1}(p)^2 + \lambda_{f_2}(p)^2 - 2}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right) \quad \text{и} \quad L_{f_1 f_2}(s)$$

мероморфно продолжаются в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s > 0$ с естественной границей $\mathrm{Re}\, s = 0$.

2.4. Переходим к неравенству большого решета для последовательности

$$\{\lambda_f(n^2)\}_{f\in S(k\leqslant K)}.$$

Предложение 3. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{f\in S(k\leqslant K)}\left|\sum_{n\leqslant N} c_n\,\lambda_f(n^2)\right|^2 \ll_\varepsilon \left(N(\log K)^c + K^5 N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\sum_{n\leqslant N}|c_n|^2, \quad (28)$$

где $\{c_n\}_{n\leqslant N}$ *– произвольная последовательность комплексных чисел.*

Доказательство. По принципу двойственности (см. [17]), (28) эквивалентно

$$\sum_{n\leqslant N}\left|\sum_{f\in S(k\leqslant N)} d_f\,\lambda_f(n^2)\right|^2 \ll \left(N(\log K)^c + K^5 N^{1/2+\varepsilon}\right)\sum_{f\in S(k\leqslant K)}|d_f|^2, \quad (29)$$

где $\{d_f\}_{f\in S(k\leqslant K)}$ – произвольная последовательность комплексных чисел.

Рассмотрим функцию $L_{f_1f_2}(s)$, где $f_1,\ f_2\in S(k\leqslant K)$. По доказанному,

$$L_{f_1f_2}(s) = L(s, F_1\otimes F_2)\cdot G(s).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant N}\left|\sum_{f\in S(k\leqslant K)} d_f\,\lambda_f(n^2)\right|^2 \\
&\ll \sum_{n\geqslant 1}\left|\sum_{f\in S(k\leqslant K)} d_f\,\lambda_f(n^2)\right|^2 \exp(-n/N) \\
&= \sum_{f_1,f_2\in S(k\leqslant K)} d_{f_1}\bar d_{f_2}\sum_{n\geqslant 1}\lambda_{f_1}(n^2)\,\lambda_{f_2}(n^2)\exp(-n/N) \\
&= \sum_{f_1,f_2\in S(k\leqslant K)} d_{f_1}\bar d_{f_2}\cdot I. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma=2} L_{f_1 f_2}(s)\Gamma(s) N^s \, ds \\
&= N \mathrm{Res}_{\,s=1} L_{f_1 f_2}(s) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma=\frac{1}{2}+\varepsilon} L(s, F_1 \otimes F_2) G(s) \Gamma(s) N^s \, ds \\
&= N \mathrm{Res}_{\,s=1} L_{f_1 f_2}(s) + O((k_1+k_2)^3 N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \\
&\ll N \delta_{f_1, f_2} (\log k_1)^c + O((k_1+k_2)^3 N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),
\end{aligned}
$$

где $c > 0$ – константа. Здесь мы использовали некоторые свойства $L_{f_1 f_2}(s)$, в частности оценку (27).

Следовательно, сумма (30)

$$
\begin{aligned}
&\ll N(\log K)^c \sum_{f \in S(k \leqslant K)} |d_f|^2 + K^3 N^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{f_1, f_2 \in S(k \leqslant K)} |d_{f_1} d_{f_2}| \\
&\ll (N(\log K)^c + K^5 N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \sum_{f \in S(k \leqslant K)} |d_f|^2.
\end{aligned}
$$

Это доказывает (29) и, тем самым, (28).

Литература

1. P. Sarnak, *Estimates for Rankin–Selberg L-functions and quantum unique ergodicity*, J. Funct. Analysis **184** (2001), 419–453.
2. Н. В. Кузнецов, *Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна–Мааса*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **129** (1983), 43–84.
3. Р. Ф. Файзиев, *Оценка в среднем в аддитивной проблеме делителей*. В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Теория чисел и ее приложения” (17-19 сентября 1985 г., г. Тбилиси), Тбилиси (1985), 273–276.
4. М. Б. Барбан, *Метод “большого решета” и его применения в теории чисел*, Успехи мат. наук **21**, No. 1 (1966), 51–102.
5. М. Б. Барбан, *“Большое решето” Ю. В. Линника и предельная теорема для числа классов идеалов мнимого квадратичного поля*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **26**, No. 4 (1962), 573–580.
6. W. Luo, *Values of symmetric square L-functions at 1*, J. reine angew. Math. **506** (1999), 215–235.
7. О. М. Фоменко, *Поведение автоморфных L-функций в точках $s=1$ и $s=\frac{1}{2}$*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 149–167.
8. J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero (with an appendix by D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, An effective zero free region)*, Ann. of Math. **140** (1994), 161–181.

9. H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms. Graduate Studies in Mathematics, 17.* Providence, R.I., 1997.
10. M. Jutila, *A method in the theory of exponential sums.* Bombay, 1987.
11. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2, М., 1974.
12. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям.* М., 1979.
13. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел.* М., 1974.
14. S.Gelbart, H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $SL(3)$*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **4**(11) (1978), 471–552.
15. О. М. Фоменко, *Коэффициенты Фурье параболических форм и автоморфные L-функции*, Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 194–226.
16. N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products*, Proc. Japan Acad. **A54**, No. 6 (1978), 163–166.
17. W. Duke, E. Kowalski, *A problem of Linnik for elliptic curves and mean-value estimates for automorphic representations*, Invent. Math. **139** (2000), 1–39.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 6 сентября 2004 г.