Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

О. М. Фоменко

ТОЖДЕСТВА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ АВТОМОРФНЫХ L–ФУНКЦИЙ

1. Введение

Рассмотрим пространство $S_k(\Gamma)$ голоморфных параболических форм

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}, \quad z \in H = \{z = x + iy : y > 0\},$$

четного веса $k \geqslant 12$ для $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$; $S_k(\Gamma)^+$ – множество собственных форм Гекке из этого пространства с $a_f(1) = 1$. Положим

$$\lambda_f(n) = a_f(n)/n^{\frac{k-1}{2}};$$

для простого p имеем (Гекке, Делинь) $a_f(p) = \alpha_f(p) + \overline{\alpha_f(p)}$, $\alpha_f(p)\overline{\alpha_f(p)} = 1$. Для $f \in S_k(\Gamma)^+$ рассмотрим L-функцию Гекке $(\mathrm{Re}\, s > 1)$

$$L(s, f) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \alpha_f(p) p^{-s})^{-1} (1 - \overline{\alpha_f(p)} p^{-s})^{-1},$$

$L(s, f)$ является целой функцией и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа. Для $f \in S_k(\Gamma)^+$ рассмотрим симметрический квадрат $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ L-функции Гекке $L(s, f)$: для $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) := \prod_p (1 - \alpha_f^2(p) p^{-s})^{-1} (1 - p^{-s})^{-1} (1 - \overline{\alpha_f^2(p)} p^{-s})^{-1}.$$

Имеем

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n^2) n^{-s} =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Известно, что $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ является целой функцией и удовлетворяет следующему функциональному уравнению: если

$$\Lambda(s, \mathrm{sym}^2 f) := \pi^{-3s/2} \Gamma\Big(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\Big) \Gamma\Big(\frac{s}{2} + \frac{k-1}{2}\Big) \Gamma\Big(\frac{s}{2} + \frac{k}{2}\Big) L(s, \mathrm{sym}^2 f),$$

то
$$\Lambda(1-s, \operatorname{sym}^2 f) = \Lambda(s, \operatorname{sym}^2 f).$$

В работе [1] исследовалась функция
$$L_{ff}(s) = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_f(n^2)^2 n^{-s}.$$

Из свойств этой функции следует, что
$$\sum_{n\leqslant x} \lambda_f(n^2)^2 \sim Cx, \tag{1}$$
где $C > 0$ – константа.

Никакой нетривиальной оценки тригонометрической суммы
$$B(x,\alpha) := \sum_{n\leqslant x} \lambda_f(n^2) e(n\alpha)$$
для общего α не известно. По равенству Парсеваля и в силу (1),
$$\int_0^1 |B(x,\alpha)|^2 d\alpha \sim Cx.$$

Можно предположить, что
$$B(x,\alpha) \ll x^{1/2}$$
равномерно по α.

Пользуясь теоремой Ландау, свойствами $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ и результатом Делиня, выводим неравенство
$$\sum_{n\leqslant x} c_n \ll x^{1/2} \log^2 x. \tag{2}$$

Из (2) следует, что
$$B(x,0) \ll x^{1/2} \log^3 x.$$

Введем теперь L-функцию Ранкина–Сельберга: если $f \in S_k(\Gamma)^+$, то
$$L(s, f\otimes f) := \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n)^2 n^{-s} =: \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}.$$

$L(s, f\otimes f)$ всюду голоморфна, кроме точки $s=1$, в которой имеется простой полюс с вычетом R, и удовлетворяет функциональному уравнению: если

$$\Lambda(s, f\otimes f) := (2\pi)^{-2s}\Gamma(s+k-1)\Gamma(s)L(s, f\otimes f),$$

то

$$\Lambda(1-s, f\otimes f) = \Lambda(s, f\otimes f).$$

Известно, что

$$\sum_{n\leqslant x} d_n = Rx + D(x),$$

где

$$D(x) \ll x^{3/5}. \tag{3}$$

Это классический результат Ранкина–Сельберга.

Приведенные ниже аналоги формулы Вороного позволяют рассмотреть тригонометрические суммы, связанные с коэффициентами рядов Дирихле автоморфных L-функций. В настоящее время нетривиально оценить эти суммы не представляется возможным. Интересно применить к ним эвристические аргументы, предложенные в работе [2]. Нами эти аргументы прилагаются к тригонометрическим суммам, связанным с аналогами формулы Вороного для $\sum\limits_{n\leqslant x} c_n$ (соответствующий аналог формулы Вороного выведен в настоящей работе) и для $\sum\limits_{n\leqslant x} d_n$ (соответствующий аналог формулы Вороного выведен в [3]). В случае суммы $\sum\limits_{n\leqslant x} c_n$ эвристический подход не дает никакого улучшения оценки (2), однако в случае суммы $\sum\limits_{n\leqslant x} d_n$ этот подход дает улучшение оценки (3):

$$D(x) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Это, вероятно, означает, что первая задача труднее второй.

В конце работы мы показываем, что

$$\sum_{n\leqslant x} c_n = \Omega_{\pm}(x^{1/3}).$$

2. Аналоги формулы Вороного

В статье Хафнера [4] изучаются аналоги формулы Вороного для весьма общего класса рядов Дирихле. На примере

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$$

введем некоторые необходимые определения. Определим среднее Рисса соотношением

$$D_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} {\sum_{n \leqslant x}}' (x-n)^\rho c_n,$$

где $\rho \geqslant 0$ – фиксированное число. В соответствии с [4], разложим среднее Рисса на "вычетную функцию" и "остаточный член":

$$D_\rho(s; \mathrm{sym}^2 f) = \frac{L(0, \mathrm{sym}^2 f)}{\Gamma(\rho+1)} x^\rho + \Delta_\rho(x; \mathrm{sym}^2 f).$$

При $\rho = 0$

$${\sum_{n \leqslant x}}' c_n = L(0, \mathrm{sym}^2 f) + \Delta_0(x; \mathrm{sym}^2 f),$$

поэтому исследование $\Delta_0(x; \mathrm{sym}^2 f)$ равносильно исследованию $C(x) = \sum_{n \leqslant x} c_n$.

К функции $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ можно применить теорему A, теорему B и лемму 2.1 работы [4] с (в обозначениях Хафнера)

$$a(n) = b(n) = c_n, \quad \lambda_n = \mu_n = \pi^{3/2} n,$$
$$\phi(s) = \psi(s) = \pi^{-\frac{3}{2}s} L(s, \mathrm{sym}^2 f),$$
$$\Delta(s) = \Gamma\Big(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2} + \frac{k-1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2} + \frac{k}{2}\Big),$$
$$\sigma_a = \sigma_a^* = 1, \quad N = 3, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 3/2,$$
$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{k-1}{2} \quad \beta_3 = \frac{k}{2}, \quad r = 1, \quad S = \varnothing,$$
$$D = \mathbf{C}, \quad a = -\frac{1}{3}, \quad t_0 = k,$$
$$\mu = k-1, \quad h = 6, \quad \theta_\rho = \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}, \quad \beta_\rho = -k - \frac{1}{2}\rho$$

(отметим, что у Хафнера β_ρ и β_v имеют разный смысл). Явные значения μ и h можно найти в [3]. Корректным значением $e_0(\rho)$ в лемме 2.1 [4] является

$e_0(\rho) = (2\alpha/h)^\rho (2/h\pi)^{1/2}$ (см. [3]).

Пусть $C_{a,b}$ – ориентированная ломаная с вершинами $a - i\infty$, $a - iT$, $b - iT$, $b + iT$, $a + iT$ и $a + i\infty$ (в таком порядке), где $a = -\frac{1}{3}$, b и T – вещественные числа, $b > k$, $T > k$ и b нецелое.

Определим интеграл

$$f_\rho(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{a,b}} \frac{\Gamma(1-s)\Delta(s)}{\Gamma(2+\rho-s)\Delta(1-s)} y^{1+\rho-s}\, ds$$

для $y > 0$.

Из общих результатов Хафнера [4] можно вывести следующий аналог формулы Вороного

$$\Delta_\rho(x; \operatorname{sym}^2 f) = (\pi^{3/2})^{-(2\rho+1)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\rho-1} f_\rho(\pi^3 n x),$$

$x > 0$, где бесконечный ряд справа сходится для $\rho > 0$ равномерно на любом конечном замкнутом x-интервале.

Кроме того, мы имеем

$$\frac{d}{dx} f_{\rho+1}(x) = f_\rho(x)$$

и

$$f_\rho(y) = 2^\rho (3\pi)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}\rho+\frac{1}{3}} \cos(6y^{1/3} - \frac{\pi}{2}\rho) + O(y^{\frac{2}{3}\rho}) + O(x^{1+\rho-b})$$

для $\rho \geqslant 0$, где $b > k$ и нецелое.

Нам необходимо доказать аналог для $\Delta_\rho(x; \operatorname{sym}^2 f)$ усеченной формулы Вороного.

Теорема 1. *Пусть $x > 1$, $1 \ll N \ll x$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Тогда имеем*

$$\begin{aligned} \Delta_\rho(x; \operatorname{sym}^2 f) &= 2^\rho \pi^{-\rho-1} 3^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{3}\rho+\frac{1}{3}} \\ \times \sum_{n \leqslant N} & c_n n^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{2}{3}} \cos\left(6\pi(nx)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\rho\right) \\ &+ O\left(x^{\frac{2}{3}\rho+\frac{2}{3}+\varepsilon} N^{-\frac{1}{3}\rho-\frac{1}{3}}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Формула (4) доказывается уже известным путем (см. [3] или главу 12 книги [5]) с привлечением приведенных выше результатов.

Сформулируем теперь необходимые факты из работы [3], касающиеся аналога для $L(s, f\otimes f) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$ усеченной формулы Вороного.

Разложим среднее Рисса ($\rho \geqslant 0$)

$$D_\rho(x; f\otimes f) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} {\sum_{n\leqslant x}}' (x-n)^\rho d_n$$

на "вычетную функцию" и "остаточный член":

$$D_\rho(x; f\otimes f) = \frac{R}{\Gamma(\rho+2)} x^{\rho+1} + \frac{L(0, f\otimes f)}{\Gamma(\rho+1)} x^\rho + \Delta_\rho(x; f\otimes f).$$

Очевидно, исследование $\Delta_0(x; f\otimes f)$ равносильно исследованию $D(x)$.

Как доказано в [3], имеет место следующая формула: пусть $1 \ll N \ll x$, $x > 1$, $\rho = 0$; тогда

$$\Delta_0(x; f\otimes f) = (2\pi)^{-1} x^{3/8} \sum_{n\leqslant N} d_n n^{-5/8}$$
$$\times \sin\left(8\pi(nx)^{1/4} + \frac{3}{4}\pi\right) + O(x^{3/4+\varepsilon} N^{-1/4}). \qquad (5)$$

3. Эвристические аргументы

Начнем с величины $\Delta_0(x; f\otimes f)$. Для уточнения оценки Ранкина–Сельберга (см. (3)) необходимо нетривиально оценить тригонометрические суммы вида

$$\sum\nolimits_{\pm,x}^{(2)}(M) := \sum_{M<m\leqslant M'\leqslant 2M} d_m \exp(\pm 8\pi i (xm)^{1/4}), \quad 1 \ll M \ll x.$$

Рассмотрим модельный вариант

$$S_q^{(2)}(X) = \sum_n d_n e\left(-4\sqrt[4]{nq}\right) \cdot \phi\left(\frac{n}{X}\right), \qquad (6)$$

где $\phi(x)$ – фиксированная гладкая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}^+$, q, X – положительные параметры. Применим к сумме (6) эвристический подход, использованный в [2].

В силу результата Делиня, $d_n \ll n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Подразумевается, что X и qX – большие числа, в противном случае экспоненциальный множитель $e(-4\sqrt[4]{nq})$ не играет существенной роли.

L-функция

$$A(s) = L(s, f \otimes f) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$$

имеет голоморфное продолжение на всю плоскость, исключая полюс первого порядка в точке $s = 1$. Предположим, что

$$A(s) \ll |s|^\varepsilon,$$

если $\mathrm{Re}\, s = \sigma$ для любого $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ и любого $\varepsilon > 0$, причем $\ll$-константа зависит от σ и ε.

Имеем

$$S_q^{(2)}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\sigma)} A(s)B(s)ds + \operatorname*{Res}_{s=1} A(s)B(s),$$

где $B(s)$ задается интегралом Меллина

$$B(s) = \int\limits_0^\infty \phi\big(\frac{x}{X}\big) e\big(-4\sqrt[4]{xq}\big) x^{s-1} dx.$$

Последний интеграл асимптотически вычисляется методом стационарной фазы. Если $s = \sigma + it$, то существенным является вклад в интеграл $\int\limits_{(\sigma)} A(s)B(s)ds$ лишь t с условием $t \asymp \sqrt[4]{qX}$, причем в этом случае

$$|B(s)| \asymp \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{t^4}{16\pi^4 qX}\right)\left(\frac{t^4}{16\pi^4 q}\right)^\sigma.$$

Теперь имеем

$$\int\limits_{(\sigma)} |B(s)ds| \ll (qX)^{\frac{1}{8}} X^\sigma,$$

откуда, беря σ близким к $\frac{1}{2}$, получаем

$$S_q^{(2)}(X) \ll q^{\frac{1}{8}} X^{\frac{5}{8}+\varepsilon}.$$

(Полюс в точке $s = 1$ дает несущественный вклад в $S_q^{(2)}$.)

Если применить оценку

$$\sum\nolimits^{(2)}_{\pm,x}(N) \ll x^{1/8} N^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$$

к формуле (5), то получим

$$\Delta_0(x; f \otimes f) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Это точнее результата Ранкина–Сельберга (3).

Обратимся к вопросу об улучшении неравенства (2). Необходимо нетривиально оценить тригонометрические суммы вида

$$\sum\nolimits^{(1)}_{\pm,x}(M) := \sum_{M<m\leqslant M'\leqslant 2M} c_m \exp(\pm 6\pi i (xm)^{1/3}), \quad 1 \ll M \ll x.$$

Рассмотрим модельный вариант

$$S^{(1)}_q(X) = \sum_n c_n e\big(-3\sqrt[3]{nq}\big)\cdot \phi\big(\frac{n}{X}\big).$$

Эвристический подход дает неравенство

$$S^{(1)}_q(X) \ll q^{1/6} X^{\frac{2}{3}+\varepsilon}.$$

Оценка

$$\sum\nolimits^{(1)}_{\pm,x}(N) \ll x^{1/6} N^{\frac{2}{3}+\varepsilon},$$

примененная к выражению $\Delta_0(x; \mathrm{sym}^2 f)$ из теоремы 1, приводит лишь к неравенству

$$\Delta_0(x; \mathrm{sym}^2 f) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

и результат (2) не уточняется.

Сделаем напоследок одно замечание. Приведенные эвристические аргументы, не давая никаких новых оценок в строгом смысле, позволяют, на наш взгляд, сравнить рассматриваемые здесь задачи по трудности.

4. Омега результаты

В работах [6] и [7] были получены омега результаты для суммы коэффициентов рядов Дирихле весьма общего вида. В работе

[7] эти результаты применялись к L-функции $L(s, f\otimes f)$. В настоящей работе мы используем результаты работы [7] для изучения суммы коэффициентов ряда

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Все требования работы [7] в применении к $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$ выполняются, кроме условия (i), которое еще нужно проверить.

Условие (i): $c_n \ll_\varepsilon n^{K+\varepsilon}$ для некоторого $K \geqslant 0$ и $c_n \gg n^K$ для бесконечного множества n.

Оценка сверху в условии (i) гарантируется (при $K = 0$) результатом Делиня. Проверим справедливость оценки снизу. Очевидно,

$$L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \prod_p \{(1-p^{-2s})^{-1} \sum_{v\geqslant 0} \lambda_f(p^{2v}) p^{-vs}\} = \prod_p L_p,$$

где

$$L_p = 1 + \lambda_f(p^2)p^{-s} + \big(1+\lambda_f(p^4)\big)p^{-2s} + \big(\lambda_f(p^2)+\lambda_f(p^6)\big)p^{-3s} + \ldots$$

Следовательно,

$$c_p = \lambda_f(p^2) = \lambda_f(p)^2 - 1.$$

В работе [8] была изучена функция

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n)^4 n^{-s},$$

из свойств которой с использованием теоремы Винера–Икехары можно вывести, что

$$\sum_{p\leqslant x} \lambda_f(p)^4 \log p \sim 2x.$$

Отсюда следует, что $c_p \geqslant \frac{1}{5}$ для бесконечного множества простых p.

В результате, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Для суммы* $C(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} c_n$ *найдутся положительные константы* A *и* B *такие, что для любого* $T > T_0$ *каждый интервал*

$[T, T+AT^{2/3}]$ содержит две точки t_1, t_2, для которых $C(t_1) > Bt_1^{1/3}$, $C(t_2) < -Bt_2^{1/3}$.

Замечание 1. 1) Можно предположить, что

$$C(x) = O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}).$$

2) В работе [7] Ивич доказал, что

$$D(x) = \Omega_{\pm}(x^{3/8}).$$

Несколько раньше А. Б. Воронецкий [9] доказал соотношение

$$D(x) = \Omega_{+}(x^{3/8}).$$

Литература

1. О. М. Фоменко, *Автоморфные L-функции в аспекте по весу*, Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 221–246.
2. H. Iwaniec, W. Luo and P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Publ. I.H.E.S. **91** (2000), 55–131.
3. A. Ivić, K. Matsumoto and Y. Tanigawa, *On Riesz means of the coefficients of the Rankin–Selberg series*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **127** (1999), 117–131.
4. J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions*, Lect. Notes Math. **899** (1981), 148–165.
5. E. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function.* Second edition, Oxford, 1986.
6. J. L. Hafner, *On the average order of a class of arithmetical functions*, J. Number Theory **15**, No. 1 (1982), 36–76.
7. A. Ivić, *Large values of certain number-theoretic error terms*, Acta Arithm. **56**, No. 2 (1990), 135–159.
8. C. J. Moreno and F. Shahidi, *The fourth moment of Ramanujan τ-function*, Math. Ann. **266**, No. 2 (1983), 233–239.
9. А. Б. Воронецкий, *Аналог теоремы Харди для коэффициентов Фурье параболических форм*, В сб.: Автоморфные функции и теория чисел, Ижевск, 1987, 56–64.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 6 сентября 2004 г.