Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

А. В. Хаустов, Н. А. Широков

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

1. Введение. Формулировки результатов

Это исследование посвящено вопросам приближения функций на эллиптических кривых над полем комплексных чисел с помощью полиномов. Как показано в [1], эта задача может быть переформулирована как задача приближения с помощью двоякопериодических функций в областях определенного класса на комплексной плоскости. В работе [1] доказана прямая теорема приближения функций, заданных на эллиптической кривой. Веса приближения в этой теореме ([1], п. 6) были выбраны таким образом, чтобы иметь возможность получить соответствующую обратную теорему приближения и, тем самым, дать конструктивную характеристику функций класса Гельдера на указанных областях. Доказательство обратной теоремы приводится в этой работе.

По определению, величины A и B соизмеримы тогда и только тогда, когда для некоторых постоянных c_1, c_2 справедливы неравенства $c_1 A \le B \le c_2 A$. Постоянные c_1, c_2 называются постоянными соизмеримости. Как обычно, условие соизмеримости величин A и B обозначаем записью $A \asymp B$.

Как и в [1], мы рассматриваем односвязные области следующего вида. Пусть D – ограниченная односвязная область, для которой любая дуга границы этой области соизмерима с ее хордой. Области, обладающие этим свойством, будем называть областями Лаврентьева.

Приведем здесь определение весов приближения, используемых как в прямой, так и в обратной теоремах. Пусть Φ – конформное отображение множества $\mathbb{C}\setminus D$ на $\mathbb{C}\setminus\{|z|<1\}$, $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, и пусть $\Psi=\Phi^{-1}$. Обозначим $L_{1+t}=\Psi(\{|z|=1+t\})$, где $t>0$, и пусть

$$\delta_n(z) = \operatorname{dist}(z, L_{1+1/n}), \ \ z\in\partial D. \qquad (1)$$

Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Im}\{\omega_2/\omega_1\} > 0$. Пусть $\mathfrak{P}(z)$ – функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$ (см., например, [2]). Как известно, функция $\zeta = \mathfrak{P}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3.$$

Пусть $Q = \{z \in \mathbb{C} : z = 2\omega_1 a_1 + 2\omega_2 a_2,\ a_1, a_2 \in [0,1)\}$ – параллелограмм периодов функции $\mathfrak{P}(z)$. Пусть, далее, $E = \{(\zeta, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3\}$ – эллиптическая кривая и

$$T(z) = (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) \tag{2}$$

– взаимно однозначное отображение Q на E. Будем использовать обозначение

$$\delta_n(\zeta, w) = \delta_n(T^{-1}(\zeta, w)),$$

где $\delta_n(z)$ определено в (1). Везде ниже предполагается, что $0 < \alpha < 1$. Мы установим справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть D – односвязная область, $\overline{D} \subset \mathrm{Int}\, Q \subset \mathbb{C}$, и пусть $G = T(\overline{D})$, $G \subset E \subset \mathbb{C}^2$, где преобразование $T(z)$ определено в (2). Пусть, кроме того, дуги границы множества G соизмеримы с хордами. Тогда произвольная функция $F : G \to \mathbb{C}$, которая может быть приближена последовательностью полиномов $P_n(\zeta, w), \deg P_n \le n$, двух переменных так, что для некоторой постоянной $C(F, G)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства*

$$|F(\zeta, w) - P_n(\zeta, w)| \le C(F, G)\delta_n^\alpha(\zeta, w) \text{ при } (\zeta, w) \in \partial G,$$

необходимо принадлежит классу $H^\alpha(G)$.

Замечание 1 Параметры и величины, от которых, в контексте некоторого утверждения зависит постоянная, обозначаются в скобках. Например, в контексте теоремы 1 фигурирующая в нем постоянная $C(F, G)$ зависит от функции F и множества G, но не от точки (ζ, w) и параметра n.

Пользуясь леммами 2 и 4 работы [1] мы можем переформулировать теорему 1 для функций, заданных на комплексной плоскости.

Теорема 2 (основная теорема). *Пусть D – область Лаврентьева, $\overline{D} \subset \operatorname{Int} Q$, $\Gamma = \partial D$. Пусть $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$. Если найдется такая последовательность полиномов двух переменных $P_n(\zeta, w)$, $\deg P_n \le n$, что для некоторой постоянной $C(F, D)$, не зависящей от n, выполняются неравенства*

$$|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \le C(F, D)\delta_n^{\alpha}(z) \text{ при } z \in \Gamma,$$

то функция f принадлежит классу $H^{\alpha}(\overline{D})$.

Доказательство основной теоремы во многом повторяет стандартную схему доказательств обратных теорем в теории аппроксимации и существенно опирается на так называемое неравенство типа неравенства Бернштейна для рассматриваемых приближений, которое мы формулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть D – область Лаврентьева, $\overline{D} \subset \operatorname{Int} Q$, $\Gamma = \partial D$. Для произвольного полинома двух переменных $q_n(\zeta, w)$, $\deg q_n \le n$, для которого выполнено неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \le \delta_n^{\alpha}(z) \text{ при } z \in \Gamma, \tag{3}$$

справедливо также неравенство

$$|q_n'(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \le C(D)\delta_n^{\alpha-1}(z) \text{ при } z \in \Gamma.$$

Везде ниже будем предполагать, что D – область, удовлетворяющая условиям теоремы 2.

Пункты 2 и 3 данной работы посвящены доказательству некоторых предварительных результатов. В пункте 4 приводится доказательство теоремы 3 в несколько более общей формулировке, а в пункте 5 доказывается основная теорема.

2. Предварительные результаты

Пусть

$$\omega^0 = 2\omega_1 k_1^0/m + 2\omega_2 k_2^0/m,$$

где $m, k_1^0, k_2^0 \in \mathbb{Z}$, – внутренняя точка области D. Рассмотрим сигма-функцию Вейерштрасса $\sigma(u)$, определяемую выражением

$$\ln\frac{\sigma(z)}{z} = -\int_0^z \left(\int_0^v \left(\mathfrak{P}(\eta) - \frac{1}{\eta^2} \right) \, d\eta \right) dv$$

Как известно ([2], гл.1), $\sigma(z)$ – целая функция, имеющая простые нули в вершинах сетки периодов (т.е. в точках $2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2$, где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$). Кроме того, справедливо равенство

$$\sigma(z + 2\omega_i) = -e^{2\eta_i(z+\omega_i)}\sigma(z), \ i = 1, 2, \tag{4}$$

где величины η_i, $i = 1, 2$, – параметры функции Вейерштрасса. Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{T}(z) = \frac{\sigma(z - \omega^0)^m}{\sigma(z)^{m-1}\sigma(z + 2k_1^0\omega_1 + 2k_2^0\omega_2)}.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{T}(z)$ имеет нуль кратности m в точке ω^0 и полюс порядка m в точке 0. Кроме того, из (4) вытекает, что

$$\mathfrak{T}(z + 2\omega_i) = \mathfrak{T}(z)e^{2\eta_i(m\omega^0 - 2k_1^0\omega_1 - 2k_2^0\omega_2)} = \mathfrak{T}(z), \ i = 1, 2,$$

т.е. $\mathfrak{T}(z)$ – двоякопериодическая функция с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$.

Пусть множество $\Omega = \Omega(D)$ получается из области D преобразованиями $z \to z + 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2$:

$$\Omega = \{z : z = 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2 + z_D, \ z_D \in D, \ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Целью этого параграфа является построение гармонической в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ функции $V(z)$, принимающей на $\partial\Omega$ значения, равные

$$V_{\mathfrak{T}}(z) = -\log|\mathfrak{T}(z)|. \tag{5}$$

Для этого нам потребуется решение вспомогательной задачи Дирихле. При произвольном натуральном L рассмотрим параллелограмм

$$Q_L = \{z : z = 2\omega_1 k_1 + 2\omega_2 k_2, \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \ |k_1| < L, \ |k_2| < L\}.$$

Рассмотрим функцию $w_L(z)$, гармоническую в области $Q_L \setminus \overline{\Omega}$ и непрерывную вплоть до ее границы, удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$w_L(z) = \begin{cases} 1, & z \in \partial Q_L, \\ 0, & z \in \partial\Omega \bigcap Q_L. \end{cases}$$

Лемма 1. *В произвольной ограниченной области $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$,*

$$w_L(z) \rightrightarrows 0 \quad \textit{при} \quad L \to \infty.$$

Доказательство. Выберем постоянную $L_0 > 1$ так, чтобы для произвольного $z = 2\omega_1 s_1 + 2\omega_2 s_2 \in \tilde{\Omega}$ выполнялись неравенства $|s_1| \le L_0 - 1, |s_2| \le L_0 - 1$. Положим

$$\varepsilon = \max_{u \in \partial Q_{L_0 - 1}} w_{L_0}(u).$$

Поскольку $w_{L_0}(z) \le 1$ при $z \in \partial(Q_{L_0} \setminus \Omega)$ и $w_{L_0}(z) \not\equiv 1$, то из принципа максимума вытекает

$$w_{L_0}(z) \le \varepsilon < 1 \text{ при } z \in \overline{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega \qquad (6)$$

Заметим, что множество $\overline{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega$ представляет собой множество $Q_{L_0} \setminus \Omega$, из которого удалены параллелограммы со сторонами той же длины, что и у параллелограмма Q, какая-либо сторона которых принадлежит границе области Q_{L_0}.

Покажем, что

$$w_{2L_0}(z) \le \varepsilon w_{L_0}(z) \text{ при } z \in \partial Q_{L_0}.$$

Пусть при произвольном натуральном k параллелограмм $\tilde{Q}_k$ представляет собой сдвиг параллелограмма Q_k на половину "размера" параллелограмма Q_{2L_0}: $\tilde{Q}_k = Q_k + 2\omega_1 L_0 + 2\omega_2 L_0$.

Функция

$$\tilde{w}_{L_0}(z) = w_{L_0}(z - 2\omega_1 L_0 - 2\omega_2 L_0)$$

является гармонической в $\tilde{Q}_{L_0} \setminus \Omega$. В соответствии с (6), везде в $\tilde{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega$, следовательно, и на участке границы параллелограмма Q_{L_0}, лежащем в $\tilde{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega$, эта функция удовлетворяет неравенству

$$\tilde{w}_{L_0}(z) < \varepsilon$$

Кроме того, в силу выбора функций $w_{2L_0}(z)$ и $\tilde{w}_{L_0}(z)$, неравенство

$$w_{2L_0}(z) \le \tilde{w}_{L_0}(z)$$

справедливо на $\partial(\tilde{Q}_{L_0} \setminus \Omega)$. По принципу максимума, оно справедливо и в $\tilde{Q}_{L_0} \setminus \Omega$. Таким образом,

$$w_{2L_0}(z) < \varepsilon = \varepsilon w_{L_0}(z) \text{ при } z \in \partial Q_{L_0} \bigcap (\tilde{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega).$$

Последовательно двигая параллелограмм $\tilde{Q}_{L_0}$ вдоль всех четырех границ параллелограмма Q_{2L_0} на целые кратные $2\omega_1$ или

$2\omega_2$, мы получим, что последнее неравенство справедливо везде на ∂Q_{L_0}. Еще раз применяя принцип максимума для функций $w_{2L_0}(z)$ и $\varepsilon w_{L_0}(z)$ в области $Q_{L_0} \setminus \overline{\Omega}$ и пользуясь неравенствами (6), заключаем, что

$$w_{2L_0}(z) \le \varepsilon w_{L_0}(z) \le \varepsilon^2 \text{ при } z \in Q_{L_0-1} \setminus \Omega.$$

Повторяя эту процедуру N раз получим, что

$$w_{NL_0}(z) \le \varepsilon^N \text{ при } z \in Q_{L_0-1} \setminus \Omega.$$

Из принципа максимума легко следует, что $w_{L_2}(z) < w_{L_1}(z)$ при $L_1 < L_2$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Пусть, по-прежнему, функция $V_{\mathfrak{T}}$ определена в (5). Положим

$$V_{min} = \min_{z \in \partial D} V_{\mathfrak{T}}(z),$$
$$V_{max} = \max_{z \in \partial D} V_{\mathfrak{T}}(z).$$

Пусть $V_L^+(z)$ и $V_L^-(z)$ – решения задачи Дирихле в области $Q_L \setminus \overline{\Omega}$ со следующими граничными условиями:

$$V_L^+(z) = \begin{cases} V_{max}, & z \in \partial Q_L, \\ V_{\mathfrak{T}}(z), & z \in \partial\Omega \bigcap Q_L \end{cases}$$
$$V_L^-(z) = \begin{cases} V_{min}, & z \in \partial Q_L, \\ V_{\mathfrak{T}}(z), & z \in \partial\Omega \bigcap Q_L \end{cases}$$

Из принципа максимума вытекает, что при $L \to \infty$ $V_L^+(z)$ – убывающая, а $V_L^-(z)$ – возрастающая последовательности функций. Кроме того,

$$V_L^+(z) - V_L^-(z) = (V_{max} - V_{min}) w_L(z).$$

Применяя лемму 1, заключаем, что существуют пределы

$$\lim_{L \to \infty} V_L^+(z) = \lim_{L \to \infty} V_L^-(z) = V(z),$$

и функция $V(z)$ – гармоническая в $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

В следующем параграфе мы установим некоторые ограничения на рост полиномов от $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ вблизи полюсов функций $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$.

3. Поведение полиномов от $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ вблизи угловых точек параллелограмма периодов

Пусть $\delta_n(z)$ определено в (1); $\Gamma_{z_1 z_2}$ – кратчайший участок кривой $\Gamma = \partial D$ между точками z_1, z_2. Пусть функция $w(z) : \Gamma \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $w(z) > A_1 n^{-A_2}$, $A_1 = A_1(D) > 0$, $A_2 = A_2(D) > 0$;
2. для фиксированных точек $z_1, z_2 \in \Gamma$, где $|z_1 - z_2| \leq \delta_n(z_1)$ и произвольного $z \in \Gamma_{z_1,z_2}$ справедливо соотношение $w(z) \asymp w(z_1)$, причем постоянные соизмеримости зависят только от области D, но не от точек z_1, z_2;
3. для некоторых положительных постоянных $\kappa_1 = \kappa_1(D)$, $C_1 = C_1(D)$ и произвольных точек $z_1, z_2 \in \Gamma$ справедливо неравенство
$$w(z_2) \leq C_1 w(z_1) \left(\frac{|z_2 - z_1|}{\delta_n(z_1)} + 1 \right)^{\kappa_1}.$$

Замечание 2. Нас будет в основном интересовать случай $w(z) = \delta_n^{\alpha}(z), 0 < \alpha < 1$. Неравенства 1–3 в этом случае вытекают из геометрических свойств отображений областей Лаврентьева на внешность единичного круга ([3]).

Лемма 2. *Пусть функция $w(z)$ удовлетворяет условиям 1–3. Тогда найдется некоторое число $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного многочлена двух переменных $q_n(\zeta, w)$, $\deg q_n \leq n$, удовлетворяющего неравенству*
$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq w(z) \text{ при } z \in \Gamma$$
справедливо неравенство
$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq C_2 e^{C_3 n} \text{ при } z \in Q_\varepsilon,$$
где $Q_\varepsilon = \mathbb{C} \setminus \big(\Omega \cup \bigcup_{n_1,n_2 \in \mathbb{Z}} \{|z - 2\omega_1 n_1 - 2\omega_2 n_2| < \varepsilon\}\big)$, $C_2 = C_2(D), C_3 = C_3(D)$.

Доказательство. Пользуемся обозначениями п.2. Рассмотрим функцию
$$\mathfrak{w}(z) = \log \mathfrak{T}(z) + V(z),$$
гармоническую в области $\mathbb{C} \setminus \big(\overline{\Omega} \bigcup \{2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2,\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}\big)$. Как нетрудно видеть, $\mathfrak{w}(z) = 0$ при $z \in \partial\Omega$.

Проведя процедуру, аналогичную построению функции $V(z)$, построим гармоническую в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ функцию $U(z)$, удовлетворяющую следующему граничному условию:

$$U(z) = \log w(z) \text{ при } z \in \partial\Omega.$$

Рассмотрим, наконец, функцию

$$\chi(z) = U(z) + 3n\mathfrak{w}(z).$$

Выберем ε так, чтобы $\overline{\Omega} \cap \bigcup_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} \{|z - 2\omega_1 n_1 - 2\omega_2 n_2| \le \varepsilon\} = \emptyset$. Покажем, что найдется $\varepsilon_n \le \varepsilon$ такое, что при $z \in \mathbb{C}\setminus\bigl(\Omega \cup \bigcup_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} \{|z- 2\omega_1 n_1 - 2\omega_2 n_2| < \varepsilon_n\}\bigr)$ выполнено неравенство

$$\chi(z) > \log|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))|. \tag{7}$$

Действительно, на границе множества Ω это неравенство принимает вид

$$\log w(z) > \log|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \text{ при } z \in \partial\Omega.$$

Последнее неравенство непосредственно вытекает из предположений относительно функций $q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$.

Точки $2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2$ при $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ являются полюсами порядка 2 функции Вейерштрасса $\mathfrak{P}$ и полюсами порядка 3 функции $\mathfrak{P}'$. Следовательно, субгармоническая двоякопериодическая функция в правой части неравенства (7) имеет в этих точках логарифмический полюс порядка $\le 3n$.

Поскольку $U(z)$ и $V(z)$ – гармонические в $\mathbb{C}\setminus\Omega$ функции, а $\mathfrak{T}(z)$, по построению, имеет полюсы порядка m в точках $2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2$ при $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, то функция $\chi(z)$ имеет в этих точках логарифмический полюс порядка $3mn, m > 1$.

Таким образом, выбирая ε_n достаточно малым, можно добиться, чтобы неравенство (7) выполнялось на окружностях $\{|z - 2n_1\omega_1 - 2n_2\omega_2| < \varepsilon_n\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Пользуясь принципом максимума, получаем искомое неравенство.

Из доказанного вытекает, что неравенство (7) во всяком случае справедливо на множестве Q_ε при произвольном n. Преобразуя неравенство (7), получаем

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| < 2\max_{Q_\varepsilon} U(z) + n\cdot 3\max_{Q_\varepsilon} \mathfrak{w}(z), \ z \in Q_\varepsilon,$$

что, с учетом гармоничности функций $U(z)$ и $\mathfrak{w}(z)$ на множестве Q_ε, и доказывает лемму 2.

4. Неравенство типа Бернштейна

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются следующие леммы.

Лемма 3. (П. М. Тамразов [4]) *Пусть задана ограниченная область Лаврентьева $J \subset \mathbb{C}$. Найдется постоянная $C_4 = C_4(J)$ такая, что для произвольных положительных постоянных k, a, b и для произвольной субгармонической в области J функции $h(z)$, удовлетворяющей неравенству*

$$h(\zeta) \le k \log(a|\zeta - z_0| + b), \ \zeta \in \partial J,$$

справедливо неравенство

$$h(\zeta) \le k \left[\log(a|\zeta - z_0| + b) + C_4\right], \ \zeta \in J.$$

Лемма 4. *Пусть функция $w(z)$ удовлетворяет условиям 1)–3) п.3, а многочлен $q_n(\zeta, w)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Существует постоянная $C_5 = C_5(D)$ такая, что для произвольной точки $z_0 \in \Gamma$ справедливо неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \le C_5 w(z_0), \ \text{если } |\zeta - z_0| = \delta_n(z_0).$$

Доказательство. Фиксируем некоторую точку $z_0 \in \Gamma$.
1. Рассмотрим сначала случай $\zeta \in D$. В силу условий на полиномы $q_n(\zeta, w)$ и функцию $w(z)$, имеем

$$\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \le \log w(\zeta) \le \log(C_1 w(z_0)) + \kappa_1 \log \left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1 \right)$$
$$\text{при } \zeta \in \Gamma.$$

Применяя теперь лемму 3 к области $J = D$ и субгармонической в J функции $\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - \log(C_1 w(z_0))$, заключаем, что справедливо неравенство

$$\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - \log(C_1 w(z_0)) \le \kappa_1 \left[\log \left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1 \right) + C_4 \right]$$
$$\text{при } \zeta \in D.$$

Если теперь $|\zeta - z_0| = \delta_n(z_0), \ \zeta \in D$, то

$$\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \le \log(C_1 w(z_0)) + \kappa_1 [\log 2 + C_4] \ \text{ при } \zeta \in D,$$

и мы заключаем, что искомое неравенство справедливо на части окружности $|z - z_0| = \delta_n(z_0)$, лежащей в D.

2. Докажем искомое неравенство при $\zeta \in Q_\varepsilon$, где множество Q_ε определено в лемме 2, $|\zeta - z_0| = \delta_n(z_0)$. На границе множества Q_ε справедливы неравенства

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \le$$
$$\le \begin{cases} \log(C_1 w(z_0)) + \kappa_1 \log\left(|\zeta - z_0|/\delta_n(z_0) + 1\right), & \zeta \in \Gamma, \\ C_3 n + \log C_2, & \zeta \in \partial Q_\varepsilon \setminus \Gamma, \end{cases}$$

где постоянная C_1 фигурирует в условии 3) на функцию $w(z)$, а постоянные C_3, C_2 определены в лемме 2. Из условий на функцию $w(z)$ вытекает, что

$$\log w(z_0) \ge \log A_1 - A_2 \log n,$$

значит, для некоторой постоянной $C_6 = C_6(D)$

$$\log(C_1 w(z_0)) + C_6 n \ge 0.$$

Отсюда заключаем, что на границе множества Q_ε справедливо неравенство

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \le$$
$$\le \log(C_1 w(z_0)) + \kappa_1 \log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right) + (C_6 + C_3)n + \log C_2.$$

Рассмотрим гармоническую в области $\operatorname{Int} Q_\varepsilon$ функцию $g(z)$, принимающую на ее границе следующие значения:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \in \Gamma, \\ 1, & z \in \partial Q_\varepsilon \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Тогда предыдущее неравенство можно записать в виде

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \le \log(C_1 w(z_0)) + \kappa_1 \log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right) +$$
$$+((C_3 + C_6)n + \log C_2) g(\zeta) \text{ при } \zeta \in \partial Q_\varepsilon.$$

Применяя еще раз лемму 3 к области $J = Q_\varepsilon$ и субгармонической в J функции $\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - ((C_3 + C_6)n + \log C_2) g(\zeta) -$

$\log(C_1 w(z_0))$, приходим к неравенству

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - ((C_3 + C_6)n + \log C_2)g(\zeta) - \log(C_1 w(z_0)) \leq$$
$$\leq \kappa_1 \left[\log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right) + C_4\right] \text{ при } \zeta \in Q_\varepsilon. \qquad (8)$$

В силу рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве леммы 4 в [1], справедливо соотношение

$$\delta_n(z_0) \asymp \operatorname{dist}\left(z_0, \{\zeta \in Q_\varepsilon : |g(\zeta)| = \frac{1}{n}\}\right),$$

значит, для некоторой постоянной $C_7 = C_7(D)$,

$$|g(z)| \leq \frac{C_7}{n} \text{ при } |z - z_0| = \delta_n(z_0).$$

Окончательно, (8) принимает вид

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leq C_8 + \log(C_1 w(z_0))$$
$$\text{при } \zeta \in Q_\varepsilon,\ |\zeta - z_0| = \delta_n(z_0),$$

где $C_8 = C_8(D)$. Лемма доказана.

Докажем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема 3$'$. *Пусть D – область Лаврентьева, $\overline{D} \subset \operatorname{Int} Q$, $\Gamma = \partial D$. Пусть функция $w(z)$ удовлетворяет условиям 1)–3) п.3. Для произвольного полинома двух переменных $q_n(\zeta, w)$, $\deg q_n \leq n$, для которого выполнено неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq w(z) \text{ при } z \in \Gamma, \qquad (9)$$

справедливо также неравенство

$$|q_n'(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq C(D)\frac{w(z)}{\delta_n(z)} \text{ при } z \in \Gamma.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 4, оценим производную полинома q_n для произвольного $z_0 \in \Gamma$:

$$|q_n'(\mathfrak{P}(z_0), \mathfrak{P}'(z_0))| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=\delta_n(z_0)} \frac{q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)}{(z-z_0)^2}\, dz\right| \leq$$
$$\leq \frac{C_5}{2\pi}\int\limits_{|z-z_0|=\delta_n(z_0)} \frac{w(z_0)}{|z-z_0|^2}|dz| = C_5\frac{w(z_0)}{\delta_n(z_0)}.$$

С учетом замечания 2 п.3 из этой теоремы легко вытекает теорема 3, сформулированная во введении.

5. Доказательство основной теоремы

Используя результаты предыдущих параграфов, докажем теперь основную теорему, сформулированную во введении.

В соответствии с теоремой Тамразова [5] достаточно доказать неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le |z_1 - z_2|^\alpha$$

для $z_1, z_2 \in \Gamma$.

Для доказательства этого неравенства мы построим некоторое разложение функции f в ряд.

Для выбранных весов приближения $\delta_t(z)$ справедливы [5] следующие неравенства

$$C_9 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\kappa_2} \ge \frac{\delta_{t_2}(z)}{\delta_{t_1}(z)} \ge C_{10} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\kappa_3}, \ z \in \Gamma.$$

Здесь $C_9 = C_9(D),\ C_{10} = C_{10}(D),\ \kappa_2 = \kappa_2(D),\ \kappa_3 = \kappa_3(D)$. Отсюда заключаем, что для произвольного $L > 0$ справедливы неравенства

$$C_9 L^{\kappa_2} \ge \frac{\delta_{L^{n-1}}(z)}{\delta_{L^n}(z)} \ge C_{10} L^{\kappa_3}, \ z \in \Gamma.$$

Фиксируя L так, чтобы выполнялось условие

$$r = C_{10} L^{\kappa_3} > 1, \tag{10}$$

и полагая $R = C_9 L^{\kappa_2}$, получим неравенства

$$R \ge \frac{\delta_{L^{n-1}}(z)}{\delta_{L^n}(z)} \ge r > 1 \ \text{ при } z \in \Gamma, \tag{11}$$

где $R = R(D),\ r = r(D),\ L = L(D)$.

Обозначим

$$p_n(z) = P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)),\ \Delta_n(z) = p_{L^{n+1}}(z) - p_{L^n}(z).$$

На границе области D в силу условий теоремы

$$|\Delta_n(z)| \le |p_{L^n}(z) - f(z)| + |p_{L^{n+1}}(z) - f(z)| \le 2C(F, D)\delta^\alpha_{L^n}(z) \tag{12}$$

Известно ([5]), что можно выбрать постоянные $C_{11} = C_{11}(D)$, $\kappa_4 = \kappa_4(D) > 0$ таким образом, чтобы при произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \Gamma$ выполнялось неравенство

$$\delta_n(z) \leq \frac{C_{11}}{n^{\kappa_4}}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) вытекает, что на границе Γ области D функция f может быть представлена в виде

$$f(z) = p_1(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(z) \text{ при } z \in \Gamma$$

Пусть $z_1, z_2 \in \Gamma$. Имеем

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |p_1(z_1) - p_1(z_2)| + |\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_n(z_1) - \Delta_n(z_2))| \tag{14}$$

Поскольку, по построению, $p_1(z)$ представляет собой полином первой степени от функций $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, аналитических внутри параллелограмма периодов, то для некоторых постоянных $C'_{12} = C'_{12}(D)$, $C_{12} = C_{12}(D)$

$$|p_1(z_1) - p_1(z_2)| \leq C'_{12}|z_1 - z_2| \leq C_{12}|z_1 - z_2|^{\alpha}. \tag{15}$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (14). Для этого разделим его на две части. Выберем число $N_0 = N_0(z_1, |z_1 - z_2|)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\delta_{L^{N_0+1}}(z_1) \leq |z_1 - z_2| < \delta_{L^{N_0}}(z_1). \tag{16}$$

При $n \leq N_0$ имеем

$$|\Delta_n(z_1) - \Delta_n(z_2)| \leq \left| \int\limits_{\Gamma_{z_1,z_2}} \Delta'_n(z)\ dz \right|,$$

где Γ_{z_1,z_2} – кратчайшая дуга границы области D между точками z_1, z_2. Пользуясь неравенством (12) и теоремой 3 для функции $w(z) = 2C(F,D)\delta_n^{\alpha}(z)$, заключаем, что для многочленов $\Delta_n(z)$ справедливо неравенство типа Бернштейна

$$|\Delta'_n(z)| \leq 2C(F,D)C(D)\delta_{L^n}^{\alpha-1}(z).$$

Из последних двух неравенств следует

$$|\Delta_n(z_1)-\Delta_n(z_2)|\le 2C(F,D)C(D)\int\limits_{\Gamma_{z_1,z_2}}\delta_{L^n}^{\alpha-1}(z)\ |dz|.$$

Из геометрических свойств конформных отображений областей Лаврентьева на внешность единичного круга следует ([6], гл.9), что для произвольного $M>0$ и $|z-z_1|<\delta_M(z_1)$ справедливо неравенство

$$\delta_M(z)\ge C_{13}\delta_M(z_1), \tag{17}$$

где $C_{13}=C_{13}(D)$, следовательно, учитывая соизмеримость дуги Γ_{z_1,z_2} и соответствующей хорды, имеем неравенство

$$|\Delta_n(z_1)-\Delta_n(z_2)|\le C_{14}\delta_{L^n}^{\alpha-1}(z_1)|z_1-z_2|,$$

где $C_{14}=C_{14}(D)$. Значит,

$$\sum_{n=0}^{N_0}|\Delta_n(z_1)-\Delta_n(z_2)|\le C_{14}|z_1-z_2|\sum_{n=0}^{N_0}\delta_{L^n}^{\alpha-1}(z_1)$$

Используя (11), получаем, что для некоторой постоянной $C_{15}=C_{15}(D)$

$$\sum_{n=0}^{N_0}\delta_{L^n}^{\alpha-1}(z_1)=\sum_{n=0}^{N_0}\delta_{L^{N_0-n}}^{\alpha-1}(z_1)\le\sum_{n=0}^{N_0}r^{(\alpha-1)n}\delta_{L^{N_0}}^{\alpha-1}(z_1)\le C_{15}\delta_{L^{N_0}}^{\alpha-1}(z_1).$$

Окончательно, пользуясь неравенствами (16), получаем

$$|\sum_{n=0}^{N_0}(\Delta_n(z_1)-\Delta_n(z_2))|\le C_{16}\delta_{L^{N_0}}^{\alpha-1}(z_1)|z_1-z_2|\le C_{16}|z_1-z_2|^{\alpha}, \tag{18}$$

где $C_{16}=C_{16}(D)$. Оценим теперь оставшуюся часть суммы в (14). Пользуясь неравенствами (12), имеем

$$|\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(\Delta_n(z_1)-\Delta_n(z_2)|\le\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(|\Delta_n(z_1)|+|\Delta_n(z_2)|)\le$$

$$\le 2c(F,D)\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(\delta_{L^n}^{\alpha}(z_1)+\delta_{L^n}^{\alpha}(z_2)).$$

Пользуясь соотношениями (17), (11) и (16), получим

$$\left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(\Delta_n(z_1)-\Delta_n(z_2))\right| \le 2C(F,D)(\frac{1}{C_{13}}+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\delta^{\alpha}_{L^{N_0+1}}(z_1) \le$$
$$\le 2C(F,D)(\frac{1}{C_{13}}+1)\frac{r}{r-1}\delta^{\alpha}_{L^{N_0+1}}(z_1) \le$$
$$\le 2C(F,D)(\frac{1}{C_{13}}+1)\frac{r}{r-1}|z_1-z_2|^{\alpha}. \quad (19)$$

Используя неравенства (15), (18) и (19), приходим к утверждению теоремы.

Литература

1. А. В. Хаустов, Н. А. Широков *Полиномиальные приближения на замкнутых подмножествах эллиптических кривых*, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 178–187.
2. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, М., 1970.
3. Ch. Pommerenke, *Univalent functions*. Vandenhoeck & Ruprecht, Gottingen, 1975.
4. П. М.Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения*, Киев, 1975.
5. П. М.Тамразов, *Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук, **28**, No. 1 (1973), 131–161.
6. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, М., 1977.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 26 апреля 2004 г.