Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

А. В. Шутов

ПРОИЗВОДНЫЕ ПОВОРОТОВ ОКРУЖНОСТИ И ПОДОБИЕ ОРБИТ

§1. Введение

В работе изучаются арифметические и геометрические свойства иррационального поворота окружности

$$R_\alpha : x \to x - \alpha \pmod 1.$$

Производная отображения на множестве Y есть отображение первого возвращения, определяемое соотношением

$$d_Y R_\alpha(x) = R_\alpha^{n_Y(x)}(x), \quad \text{где} \quad n_Y(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : R_\alpha^n(x) \in Y\}.$$

В качестве множеств Y в работе выбраны интервалы единичной окружности. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $R_\alpha : x \to x - \alpha \pmod 1$ – поворот окружности. Тогда если $I = I_m$ – собственный интервал дифференцирования (см. §2), то производная $d_I R_\alpha$ – вновь поворот окружности. Если же $I \neq I_m$ – несобственный интервал, то $d_I R_\alpha$ – нециклическое перекладывание трех отрезков.*

Геометрическим следствием теоремы 1 является подобие орбит поворота окружности с различными α. Обозначим через $\mathrm{Orb}(1, \alpha, I_0)$ последовательность элементов $-n\alpha \pmod 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Производная $d^m \mathrm{Orb}(1, \alpha, I_0)$ определяется как последовательность элементов из $\mathrm{Orb}(1, \alpha, I_0) \cap I_m$, пронумерованных в порядке попадания их в собственный интервал I_m. Из теоремы 1 следует, что существует гомотетия h_m с центром в точке 1, переводящая отрезок I_m в I_0 и такая, что

$$d^m \mathrm{Orb}(1, \alpha, I_0) = h_m \mathrm{Orb}(1, d^m\alpha, I_0)$$

для некоторого $d^m\alpha$. Наибольший интерес это утверждение представляет для квадратичных иррациональностей. Пусть $\alpha =$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02-01-00368.

$[(q_1, \cdots, q_r)]$ - квадратичная иррациональность с чисто периодическим разложением в цепную дробь,

$$T = \begin{cases} q_1 + \ldots + q_r, & \text{если } r \text{ четно}, \\ 2(q_1 + \ldots + q_r), & \text{если } r \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Тогда справедливо равенство $d^T\alpha = \alpha$ и при этом имеет место самоподобие орбит

$$d^T \operatorname{Orb}(1, \alpha, I_0) = h_T \operatorname{Orb}(1, \alpha, I_0).$$

Дифференцирование орбит порождает отображение $\alpha \to d^1\alpha$ единичной окружности на себя. Это отображение обладает рядом интересных свойств, допускающих естественную интерпретацию в терминах символической динамики. В §5 каждому $\alpha \in [0; 1)$ ставится в соответствие его код, представляющий собой бесконечную одностороннюю последовательность нулей и единиц. Действие оператора d^1 на этой кодировке оказывается эквивалентным действию сдвига Бернулли (теорема 3). Неожиданным является то, что построенная кодировка совпадает с известным разложением α в последовательность Штерна–Броко.

Исторические замечания. Понятие производной отображения на множестве возникло в теории динамических систем как дискретный аналог сечений Пуанкаре. Производные поворота окружности начали изучать G. Rauzy [1] и S. Ferenczi [2, 3] в связи с задачей о множествах ограниченного остатка. В настоящей работе используется подход В. Г. Журавлева, основанный на использовании разбиений Фибоначчи. Этот подход был предложен в работе [4], где была построена общая теория разбиений Фибоначчи для $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В дальнейшем Н. Н. Мануйлов перенес эти результаты на случай $\tau_2 = 1 + \sqrt{2}$ [5].

Благодарности. Автор благодарит В. Г. Журавлева и Н.Н. Мануйлова за возможность познакомиться с их результатами в данной области, а также за многочисленные полезные обсуждения.

§2. Обобщенные разбиения Фибоначчи

Для формулировки результатов нам потребуется понятие обобщенного разбиения Фибоначчи. Мы приводим здесь определение обобщенных разбиений Фибоначчи и их свойства, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательства можно найти в работах [4, 6, 7]

Рассмотрим множество $\mathbb{T}$ всех разбиений единичной окружности $\mathbb{S}^1 = [0;1)$ на конечное число полуинтервалов. Рассмотрим оператор $B : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, действующий следующим образом. Пусть $\mathrm{Til} \in \mathbb{T}$ – разбиение $\mathbb{S}^1$ на конечное число полуинтервалов, $|X|$ – наименьшая из длин полуинтервалов разбиения. Тогда в разбиении $B(\mathrm{Til})$ интервалы из Til длины $|X|$ сохраняются, а интервалы длины $|Y| > |X|$ распадаются на 2 интервала длины $|X|$ и $|Y| - |X|$, соответственно. Другими словами, действие B-оператора заключается в откладывании интервала наименьшей длины от левых концов всех интервалов разбиения Til.

Пусть $\mathrm{Til}_0(\alpha)$ состоит из двух полуинтервалов $[0;\alpha) \oplus [\alpha;1)$, где $\oplus$ означает некоммутативную операцию прикладывания полуинтервалов.

Обобщенное разбиение Фибоначчи порядка m определяется соотношением

$$\mathrm{Til}_m(\alpha) = B^m(\mathrm{Til}_0(\alpha)).$$

Очевидно, что если α иррационально, то $\mathrm{Til}_m(\alpha) \neq \mathrm{Til}_n(\alpha)$ при $m \neq n$.

Легко показать, что разбиение $\mathrm{Til}_m(\alpha)$ состоит из интервалов двух разных длин и не может заканчиваться двумя интервалами одной длины. Введем отображение $\mathrm{Col}_{m,\alpha}$, ставящее в соответствие каждому интервалу из $\mathrm{Til}_m(\alpha)$ одну из двух цветовых меток E и G с соблюдением двух условий:

1) Интервалы $\mathrm{Til}_m(\alpha)$, имеющие одинаковую длину, получают одну и ту же метку, интервалы разной длины – разные метки.

2) Крайнему правому интервалу из $\mathrm{Til}_m(\alpha)$ ставится в соответствие метка E.

В результате получаются цветные разбиения Фибоначчи

$$\mathrm{CTil}_m(\alpha) = \mathrm{Col}_{m,\alpha}(\mathrm{Til}_m(\alpha)).$$

Мы будем использовать следующие обозначения: L^m, S^m – длинные и короткие интервалы разбиения $\mathrm{Til}_m(\alpha)$, $l_m(\alpha)$ и $s_m(\alpha)$ - их длины, $L_m(\alpha)$ и $S_m(\alpha)$ – их количества; E^m и G^m E и G интервалы разбиения $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$, $e_m(\alpha)$ и $g_m(\alpha)$ – их длины, $E_m(\alpha)$ и $G_m(\alpha)$ – их количества. Всюду, где это не будет вызывать двусмысленности, индекс α будет опускаться.

Каждому интервалу разбиения $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ поставим в соответствие его номер по следующему правилу. Разбиение $\mathrm{CTil}_0(\alpha)$ состоит из двух полуинтервалов

$$\mathrm{CTil}_0(\alpha) = G_0^0 \oplus E_0^0 = [0;\alpha) \oplus [\alpha;1).$$

Последующие номера определяются по индукции. Если $s_m(\alpha) = e_m(\alpha)$, то

$$\begin{gathered} E_i^m \to E_i^{m+1}, \\ G_i^m \to E_{i+E_m}^{m+1} \oplus G_i^{m+1}. \end{gathered}$$

Если $s_m(\alpha) = g_m(\alpha)$, то

$$\begin{gathered} E_i^m \to G_i^{m+1} \oplus E_i^{m+1}, \\ G_i^m \to G_{i+E_m}^{m+1}. \end{gathered}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими свойствами разбиений $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$.

Свойство 1.

$$\mathrm{CTil}_m(1-\alpha) = \overline{\mathrm{CTil}_m(\alpha)}^{(+)}.$$

Здесь $*^{(+)}$ *– операция перекладывания двух крайних правых интервалов,* $\overline{\mathrm{CTil}_m(\alpha)}$ *– разбиение, получающееся из* $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ *заменой всех меток* E *на метки* G *и наоборот.*

Свойство 2.

$$\begin{gathered} \langle E_m\alpha\rangle = g_m, \\ \langle G_m\alpha\rangle = 1 - e_m. \end{gathered} \tag{1}$$

Свойство 3.

$$\begin{gathered} E_i^m - \alpha \equiv E_{i+1}^m \ (\mathrm{mod}\ 1), \\ G_i^m - \alpha \equiv G_{i+1}^m \ (\mathrm{mod}\ 1). \end{gathered} \tag{2}$$

Свойство 4.

$$\mathrm{CTil}_m(\alpha) - \alpha \equiv \mathrm{CTil}_m(\alpha)^{(+)} \pmod 1. \tag{3}$$

§3. Производные поворота окружности

Пусть X – некоторое множество, $Y \subset X$ – его подмножество, $A : X \to X$ – отображение множества X в себя. Определим производную (или отображение первого возвращения) $d_Y A : Y \to Y$ соотношением

$$d_Y A = A^{n_Y(x)}(x), \quad \text{где} \quad n_Y(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : A^n(x) \in Y\}. \tag{4}$$

Обозначим через R_α сдвиг

$$R_\alpha : x \to x - \alpha \pmod 1 \tag{5}$$

единичной окружности $\mathbb{S}^1$. Нас будет интересовать случай, когда $X = \mathbb{S}^1$, $A = R_\alpha$, $Y = I$ – некоторый полуинтервал в $\mathbb{S}^1$. Без ограничения общности можно считать, что правый конец полуинтервала I совпадает с точкой 1.

Обозначим $I_m = G_0^m \oplus E_0^m$, $i_m = |I_m|$ и назовем интервалы I_m собственными интервалами дифференцирования. Вначале вычислим производные $d_I R_\alpha$ на собственных интервалах.

Воспользуемся разбиением $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$. Из (2) следует, что под действием сдвига R_α интервалы $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ переходят друг в друга по правилам

$$\begin{array}{l} G_0^m \to G_1^m \to \ldots \to G_{G_m}^m, \\ E_0^m \to E_1^m \to \ldots \to E_{E_m}^m. \end{array} \tag{6}$$

Из свойства 4 следует, что

$$I_m = G_0^m \oplus E_0^m = E_{E_m}^m \oplus G_{G_m}^m.$$

Таким образом, действие $d_{I_m} R_\alpha$ сводится к перекладыванию полуинтервалов G_0^m и E_0^m. Склеивая правый и левый конец полуинтервала I_m, получаем, что $d_{I_m} R_\alpha$ есть отображение

$$I_m \to I_m : x \to x - g_m \pmod{I_m}. \tag{7}$$

Таким образом, производная поворота окружности на собственном интервале дифференцирования – вновь поворот окружности.

Рассмотрим теперь несобственный интервал I такой, что

$$I_{m+1} \subset I \subset I_m. \tag{8}$$

Из (1) следует, что $E_0^m \subset I$. Разобъем полуинтервал G_0^m на два полуинтервала $G_0^m = G_{0,1}^m \oplus G_{0,2}^m$ так, что $I = G_{0,2}^m \oplus E_0^m$. Из (8) следует, что $|G^m_{0,1}| < |E^m_0|$. Интервал E^m_0 представим в виде $E^m_0 = E^m_{0,1} \oplus E^m_{0,2}$, где $|E^m_{0,1}| = |G^m_{0,1}|$. Отображение $d_{I_m} R_\alpha$ перекладывает интервалы по следующему правилу:

$$G^m_{0,1} \to G^m_{G_m,1},$$

$$G^m_{0,2} \to G^m_{G_m,2},$$

$$E^m_{0,1} \to E^m_{E_m,1} = G^m_{0,1} \to G^m_{G_m,1},$$

$$E^m_{0,2} \to E^m_{E_m,2}.$$

При этом $E^m_{E_m,2} \oplus G^m_{G_m,1} \oplus G^m_{G_m,2} = E^m_{E_m,2} \oplus G^m_{G_m} = I$, так как $|I| = e_m + g_m - |G^m_{0,1}|$, $|E^m_{E_m,1}| + |G^m_{G_m}| = e_m + g_m - |G^m_{0,1}|$. Таким образом, производная $d_I R_\alpha$ есть нециклическое перекладывание трех отрезков

$$G^m_{0,2} \oplus E^m_{0,1} \oplus E^m_{0,2} \to E^m_{E_m,2} \oplus G^m_{G_m,1} \oplus G^m_{G_m,2}$$

или, иначе,

$$G^m_{0,2} \oplus E^m_{0,1} \oplus E^m_{0,2} \to d_I R_\alpha(E^m_{0,2}) \oplus d_I R_\alpha(E^m_{0,1}) \oplus d_I R_\alpha(G^m_{0,2}).$$

Итак, нами доказана теорема, сформулированная во введении.

Теорема 1. *Пусть $R_\alpha : x \to x - \alpha \pmod 1$ – поворот окружности. Тогда если $I = I_m$ – собственный интервал дифференцирования, то производная $d_I R_\alpha$ – вновь поворот окружности. Если же $I \neq I_m$ – несобственный интервал, то $d_I R_\alpha$ – нециклическое перекладывание трех отрезков.*

Первую часть доказанной теоремы можно переформулировать на языке орбит. Введем обозначение $\mathrm{Orb}(a, \alpha, I)$ для обозначения орбиты точки a под действием отображения $x \to x - \alpha \pmod I$. Рассмотрим последовательность вложенных интервалов

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_m \supset \ldots$$

Пусть $S_l = (S, I_l)$, где $S = (a_i)_{i=0}^\infty$ – последовательность из полуинтервала I_l, $d^k S_l = (S', I_{l+k})$, где $S' = S \cap I_{l+k}$ и элементы последовательности $S' = (a_{i_j})_{j=0}^\infty$ упорядочены по индукции:

$$i_0 = \min\{i : a_i \in I_{l+k}\},$$

$$i_{n+1} = \min\{i > i_n : a_i \in I_{l+k}\}.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\begin{aligned} O_m^- =& \mathrm{Orb}(1, -g_m(\alpha), I_m),\\ O_m^+ =& \mathrm{Orb}(1, g_m(\alpha), I_m),\\ \widetilde{O}_m^- =& \mathrm{Orb}(1, -e_m(\alpha), I_m),\\ \widetilde{O}_m^+ =& \mathrm{Orb}(1, e_m(\alpha), I_m). \end{aligned}$$

Тогда имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} d^k O_m^- &= O_{m+k}^-,\\ d^k O_m^+ &= O_{m+k}^-,\\ d^k \widetilde{O}_m^- &= \widetilde{O}_{m+k}^-,\\ d^k \widetilde{O}_m^+ &= \widetilde{O}_{m+k}^+. \end{aligned}$$

Доказательство. Первое соотношение фактически доказано в теореме 1. Третье соотношение получается из первого соотношения для $1-\alpha$ с помощью равенств $g_m(\alpha) = e_m(1-\alpha)$, $e_m(\alpha) = g_m(1-\alpha)$. Два других соотношения получаются из предыдущих с помощью равенства $e_m(\alpha) + g_m(\alpha) = |I_m|$.

Пусть h_m – гомотетия с центром в точке 1, переводящая полуинтервал I_m в $I_0 = [0; 1)$. Рассмотрим орбиты $O_m = h_m(O_m^-)$. При этом

$$\begin{aligned} O_0 =& \mathrm{Orb}(1, -\alpha, \mathbb{S}^1),\\ O_m =& \mathrm{Orb}(1, -d^m\alpha, \mathbb{S}^1) \end{aligned}$$

для некоторого $d^m\alpha$. Оператор d^m обладает свойством

$$d^{m_1}(d^{m_2}\alpha) = d^{m_1+m_2}\alpha.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$d^m\alpha = \frac{g_m(\alpha)}{g_m(\alpha) + e_m(\alpha)} = \frac{g_m(\alpha)}{i_m(\alpha)}. \tag{9}$$

Используя (1), формулу (9) можно переписать в виде

$$d^m\alpha = \frac{\langle E_m\alpha\rangle}{\langle E_m\alpha\rangle - \langle G_m\alpha\rangle + 1}.$$

Наша дальнейшая цель – получить явные формулы для $d^m\alpha$.

§4. Формулы для $d^m\alpha$

Формулу для $d^1\alpha$ можно получить прямым вычислением.

Предложение 1.

$$d^1\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha}, & \textit{если } \alpha < \frac{1}{2}, \\ \frac{2\alpha-1}{\alpha}, & \textit{если } \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Предложение 2. *Пусть* $\alpha = [0; q_1, q_2, q_3, \ldots]$, *где в квадратных скобках записаны элементы разложения* α *в цепную дробь. Тогда*

$$d^1\alpha = \begin{cases} [0; q_1 - 1, q_2, q_3, \ldots], \textit{ если } q_1 > 1, \\ [0; 1, q_2 - 1, q_3, \ldots], \textit{ если } q_1 = 1, q_2 > 1, \\ [0; q_3 + 1, q_4, q_5, \ldots], \textit{ если } q_1 = q_2 = 1. \end{cases}$$

Для явного вычисления $d^m\alpha$ нам нужны формулы для $e_m(\alpha)$ и $g_m(\alpha)$. Вначале вычислим $s_m(\alpha)$ и $l_m(\alpha)$.

Поскольку $d^m\alpha + d^m(1-\alpha) = 1$, достаточно ограничиться рассмотрением случая $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$.

Число i назовем α-регулярным, если $l_{m-1}(\alpha) > l_m(\alpha)$. Пусть $\{m_i\}$ – последовательность α-регулярных чисел, $n_i = m_i - m_{i-1}$, $\overline{s}_i = s_{m_i}(\alpha)$, $\overline{l}_i = l_{m_i}(\alpha)$. При переходе $\mathrm{Til}_{m-1}(\alpha) \to \mathrm{Til}_m(\alpha)$ длинные и короткие интервалы преобразуются по правилам:

$$\begin{aligned} S^m &\to S^{m+1}, \\ L^m &\to S^{m+1} \oplus L^{m+1}, \end{aligned}$$

если m – не α-регулярно;

$$\begin{aligned} S^m &\to L^{m+1}, \\ L^m &\to L^{m+1} \oplus S^{m+1}, \end{aligned}$$

если m – α-регулярно. Переход $\mathrm{Til}_{m_{i-1}}(\alpha) \to \mathrm{Til}_{m_i}(\alpha)$ имеет вид

$$\begin{aligned} S^{m_{i-1}} &\to L^{m_i}, \\ L^{m_{i-1}} &\to n_i L^{m_i} \oplus S^{m_i}. \end{aligned} \tag{10}$$

Из (10) следует, что

$$\overline{s}_i = \overline{l}_{i+1}, \tag{11}$$

$$\overline{l}_{i-1} = n_i \overline{l}_i - \overline{l}_{i+1}. \tag{12}$$

Предложение 3. *Пусть* $G(\alpha) = \langle \frac{1}{\alpha} \rangle$. *Тогда* $n_1 = [\frac{1}{\alpha}] - 1$, $\overline{l}_0 = 1 - \alpha$, $\overline{s}_0 = \alpha$. *Для* $k \geq 1$ *справедливы формулы*

$$n_k = \left[\frac{1}{G^{k-1}(\alpha)} \right], \tag{13}$$

$$\overline{l}_k(\alpha) = \prod_{i=0}^{k-1} G^i(\alpha). \tag{14}$$

Доказательствополучается индукцией по k с использованием соотношений (11), (12) и равенств $n_k = [\frac{\overline{l}_k}{\overline{s}_k}] = [\frac{\overline{l}_{k-1}}{\overline{l}_k}]$.

Оператор $G(\alpha) = \langle \frac{1}{\alpha} \rangle$ есть известный оператор Гаусса–Кузьмина [8]. Известны следующие свойства этого оператора. Пусть разложение α в цепную дробь имеет вид $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots, q_n, r_n(\alpha)]$, где $r_n(\alpha)$ – остаток. Тогда

$$q_i = \left[\frac{1}{G^{i-1}(\alpha)} \right], \tag{15}$$

$$r_n(\alpha) = G^n(\alpha). \tag{16}$$

При этом предполагается, что $G^0(\alpha) = \alpha$.

Сравнивая (13) с (15) и (14) с (16) получаем, что

$$n_k = q_k \text{ для } k > 1 \text{ и } n_1 = q_1 - 1, \tag{17}$$

$$\overline{l}_k = \prod_{i=0}^{k-2} r_i(\alpha). \tag{18}$$

Рассмотрим вопрос о вычислении $l_i(\alpha)$ и $s_i(\alpha)$ в случае, когда m не α-регулярно. Пусть $m_{i-1} < m < m_i$. Представим m в виде $m = m_{i-1} + t$, где $0 < t < n_i$. Переход $\mathrm{Til}_{m_{i-1}}(\alpha) \to \mathrm{Til}_m(\alpha)$ происходит по правилу

$$\begin{aligned} S^{m_{i-1}} &\to S^m, \\ L^{m_{i-1}} &\to tS^m \oplus L^m. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом,

$$s_m(\alpha) = \overline{s}_i, \tag{20}$$

$$l_m(\alpha) = \overline{l}_i - t\overline{s}_i. \tag{21}$$

Собирая вместе (11), (18)–(21) получаем

Предложение 4. *Пусть* $m = m_i + t$, $0 \le t < n_{i+1}$. *Тогда*

$$l_m(\alpha) = \prod_{j=0}^{i} r_j(\alpha),$$

$$s_m(\alpha) = \prod_{j=0}^{i-1} r_j(\alpha)(1 - tr_i(\alpha)).$$

Для вычисления $e_m(\alpha)$ и $g_m(\alpha)$ нам потребуется формула для $\mathrm{Col}_{m,\alpha}$. Так как $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$, то $\mathrm{Til}_0(\alpha) = S^0 \oplus L^0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{Col}_{0,\alpha}(L) &= E, \\ \mathrm{Col}_{0,\alpha}(S) &= G. \end{aligned} \tag{22}$$

Формула (19) означает, что переход от $\mathrm{Til}_{m_{i-1}}(\alpha)$ к $\mathrm{Til}_{m_{i-1}+t}(\alpha)$ не меняет вид последнего интервала разбиения. Следовательно,

$$\mathrm{Col}_{m_{i-1}+t,\alpha} \equiv \mathrm{Col}_{m_{i-1},\alpha}\,. \tag{23}$$

С другой стороны, из (10) следует

$$\mathrm{Col}_{m_i,\alpha} \equiv \overline{\mathrm{Col}_{m_{i-1},\alpha}}. \tag{24}$$

Собирая вместе (22)–(24), получаем

Предложение 5. *Пусть* $m = m_i + t$, $0 \le t < n_{i+1}$. *Тогда*

$$\mathrm{Col}_{m,\alpha}(L) = \begin{cases} E, & \textit{если } i \textit{ четно,} \\ G, & \textit{если } i \textit{ нечетно.} \end{cases}$$

$$\mathrm{Col}_{m,\alpha}(S) = \begin{cases} G, & \textit{если } i \textit{ четно,} \\ E, & \textit{если } i \textit{ нечетно.} \end{cases}$$

Обратное отображение имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{Col}^{-1}_{m,\alpha}(E) &= \begin{cases} L, & i - \textit{четно,} \\ S, & i - \textit{нечетно;} \end{cases} \\ \mathrm{Col}^{-1}_{m,\alpha}(G) &= \begin{cases} S, & i - \textit{четно,} \\ L, & i - \textit{нечетно.} \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

Объединяя предложения 4 и 5 с формулой (9), получаем выражение для $d^m\alpha$ в терминах разложения α в цепную дробь.

Предложение 6. *Пусть* $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$, $m = m_i + t$, $0 \le t < n_{i+1}$. *Тогда*

$$d^m\alpha = \begin{cases} \frac{r_i(\alpha)}{1+(1-t)r_i(\alpha)}, & \textit{если } i \textit{ четно,} \\ \frac{1-tr_i(\alpha)}{1+(1-t)r_i(\alpha)}, & \textit{если } i \textit{ нечетно.} \end{cases}$$

§5. Производные и сдвиги Бернулли

Каждому числу α поставим в соответствие последовательность $w(\alpha) = (w_0, w_1, w_2, \dots)$, где

$$w_m = \begin{cases} 0, \text{ если } g_m(\alpha) < e_m(\alpha), \\ 1, \text{ если } g_m(\alpha) > e_m(\alpha). \end{cases}$$

Последовательность $w(\alpha)$ обрывается в случае $g_m(\alpha) = e_m(\alpha)$, что возможно только для рациональных α. Из (25) следует, что для $m = m_i + t$, $0 \le t < n_{i+1}$

$$w_m = \begin{cases} 0, \text{ если } i \text{ четно}, \\ 1, \text{ если } i \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Вводя сокращение x^n для n раз подряд записанного элемента x, получаем, что числу $\alpha = [0; q_1, q_2, q_3, \dots]$ ставится в соответствие последовательность

$$w(\alpha) = 0^{q_1 - 1} 1^{q_2} 0^{q_3} 1^{q_4} \dots \tag{26}$$

Отсюда сразу следует существование взаимно-однозначного соответствия между $\alpha \in [0; 1]$ и $w(\alpha)$.

Предложение 7. $\{0, w(\alpha)\}$ *есть разложение* α *в последовательность Штерна-Броко.*

Напомним определение последовательности Штерна–Броко. Начиная с двух дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$ будем повторять следующую операцию:

вставить дробь $\frac{m+m'}{n+n'}$ между двумя соседними дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$.

В результате получим дерево дробей, называемое деревом Штерна–Броко. Разложение α в последовательность Штерна–Броко получается с помощью бинарного поиска α в полученном дереве. При этом 0 соответствует движению по левой ветви дерева, 1 – движению по правой ветви [9]. Для доказательства предложения 8 достаточно сравнить (26) с разложением α в последовательность Штерна–Броко, приведенным в [9].

Выясним как действует оператор d^1 на последовательность $w(\alpha)$.

Теорема 3. *Пусть* $w(\alpha) = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$. *Тогда* $w(d^1\alpha) = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$. *Таким образом, действие оператора* d^1 *эквивалентно сдвигу Бернулли на множестве* $0/1$*-последовательностей.*

Доказательство. По определению, $g_0(d^1\alpha) = \frac{g_1(\alpha)}{i_1(\alpha)}$, $e_0(d^1\alpha) = \frac{e_1(\alpha)}{i_1(\alpha)}$. Индукцией по m отсюда легко получить, что $g_m(d^1\alpha) = \frac{g_{m+1}(\alpha)}{i_1(\alpha)}$, $e_m(d^1\alpha) = \frac{e_{m+1}(\alpha)}{i_1(\alpha)}$. Таким образом, $g_m(d^1\alpha) > e_m(d^1\alpha)$ тогда и только тогда, когда $g_{m+1}(\alpha) > e_{m+1}(\alpha)$, и $g_m(d^1\alpha) < e_m(d^1\alpha)$ тогда и только тогда, когда $g_{m+1}(\alpha) < e_{m+1}(\alpha)$.

Следствие 1. *Для любого* $\alpha \in [0; 1)$ *уравнение* $d^m\beta = \alpha$ *имеет* 2^m *решений.*

Для доказательства достаточно заметить, что $w(\beta) = (w_0, \ldots, w_{m-1}, w(\alpha))$, где $(w_0, \ldots, w_{m-1})$ - любая из 2^m возможных последовательностей нулей и единиц.

Следствие 2. *Пусть* α *иррационально. Тогда для выполнения соотношения*

$$d^{m+T}\alpha = d^m\alpha \tag{27}$$

для некоторых m *и* α *необходимо и достаточно, чтобы* α *являлось квадратичной иррациональностью.*

Это следует из того, что последовательность Штерна–Броко периодична (возможно, с некоторым предпериодом) для квадратичных иррациональностей и только для них. Этот факт, в свою очередь, эквивалентен теореме Лагранжа о разложении квадратичных иррациональностей в цепную дробь.

Геометрический смысл соотношения (27) состоит в подобии орбит и их производных, то есть в существовании такой гомотетии $h_{m,T}$, что

$$h_{m,T}O_m^- = d^T O_m^-. \tag{28}$$

Используя теорему 2, соотношение (28) можно переписать в виде

$$h_{m,T}O_m^- = O_{m+T}^-,$$

что означает подобие различных орбит.

Заметим, что если (27) выполняется для некоторого $m = m_0$, то оно выполняется и для всех $m > m_0$. В этом случае последовательность производных периодична и можно определить наименьший период $T_0(\alpha)$.

Следствие 3. *Пусть α – квадратичная иррациональность и ее разложение в цепную дробь имеет вид $\alpha=[0;q_1,\ldots,q_k,(q_{k+1},\ldots,q_{k+r})]$, где во внутренние скобки заключен период разложения. Тогда*

$$T_0(\alpha)=\begin{cases} q_{k+1}+\ldots+q_{k+r}, & \text{если } r \text{ четно,}\\ 2(q_{k+1}+\ldots+q_{k+r}), & \text{если } r - \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Доказательство очевидно.

Следствие 4. *Число решений уравнения $T_0(\alpha)=n$ равно*

$$\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})(2^d-1),$$

где $\mu(x)$ – функция Мебиуса.

Доказательство. Число решений уравнения $d^n\alpha=\alpha$ равно 2^n-1, так как число возможных 0/1-последовательностей длины n равно 2^n, и периоду, состоящему из одних единиц, соответствует $\alpha=1$. Далее достаточно воспользоваться стандартной формулой перехода от периодических точек к примитивным периодическим.

Литература

1. G. Rauzy, Ensembles à restes bornés, Sémin. théor. nombers de Bordeaux, 1983–1984, exposé 24.
2. S. Ferenczi, Bounded remainder sets., Acta Arithm. **61**, No. 4 (1992), 319–326.
3. S. Ferenczi, Ch. Holton, L. Zamboni, Structure of 3-interval exchange, I: an arithmetic study, Preprints of Marcelle University, No. 24, 2001.
4. В. Г. Журавлев, Одномерные разбиения Фибоначчи, Изв. РАН, сер. матем., 2004 (в печати).
5. Н. Н. Мануйлов, Самоподобие некоторых последовательностей, Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 81–95.
6. Н. Н. Мануйлов, Рекуррентные самоподобные разбиения, Чебышевский сборник **4**, вып. 2 (2003). Тула, 2003, 87–90.
7. А. В. Шутов, Н. Н. Мануйлов, Глобальный порядок разбиения окружности, Молодежь. Образование. Экономика. Сборник научных статей участников 5-ой Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов, 4 мая 2004 г., Ярославль, 2004, 101–103.
8. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М., 1969.
9. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, Конкретная математика, М., 1998.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 15 июля 2004 г.