Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

А. Б. Александров

АППРОКСИМАЦИЯ ЯДРАМИ М. РИССА В ПРОСТРАНСТВЕ L^p ПРИ $p < 1$

1. Введение

Пусть $\alpha > 0$. Обозначим через $\mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ линейную оболочку скалярных ядер Рисса

$$\left\{\frac{1}{|x-a|^\alpha}\right\}_{a\in\mathbb{R}^n}.$$

Обозначим через $\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ линейную оболочку векторных ($\mathbb{R}^n$-значных) ядер Рисса

$$\left\{\frac{1}{|x-a|^{\alpha+1}}(x-a)\right\}_{a\in\mathbb{R}^n}.$$

В этой статье мы рассматриваем векторные пространства только над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, в частности, под линейной оболочкой мы понимаем $\mathbb{R}$-линейную оболочку.

Положим

$$\mathfrak{X}^0_\alpha(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n) : \min(1,|f|) \in L^1(\mathbb{R}^n)\},$$
$$\mathfrak{Y}^0_\alpha(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n) : \min(1,|f|) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

Положим $\mathfrak{X}^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Здесь $L^p(\mathbb{R}^n)$ обозначает пространство L^p вещественных функций на $\mathbb{R}^n$, а $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ – пространство L^p векторных ($\mathbb{R}^n$-значных) функций на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ обозначает замыкание множества $\mathfrak{X}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, а $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ – замыкание множества $\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ и $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, если $\alpha p \geqslant n$.

Работа частично поддержана грантами РФФИ No. 02-01-00267, "Ведущие Научные Школы" No. 2266.2003.1 и the European Community's Human Potential Programme under contract HPRN-CT-2000-00116 [Analysis and Operators].

Обозначим через $L^p_0(\mathbb{R}^n)$ замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ множества $\{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 0\}$, где $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначает пространство всех быстро убывающих гладких функций, заданных на $\mathbb{R}^n$. Точнее, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ – это множество всех бесконечно дифференцируемых функций f на $\mathbb{R}^n$ таких, что $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < +\infty$ для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$. Обозначим через $L^p_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ множества $\{\nabla\varphi : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$. Здесь и далее $\nabla\varphi$ обозначает градиент функции φ.

Легко видеть, что
$L^p_0(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \neq 1$,
$L^1_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} f = 0\}$,
$L^p_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ при $p < 1$.

Последнее равенство может быть также выведено из теоремы 1.2 в [2].

Наконец, при $p \in [1, +\infty)$ пространство $L^p_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством всех функций $(f_1, \dots, f_n) \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ в смысле теории обобщённых функций, где $1 \leqslant j < k \leqslant n$.

Нетрудно доказать, что $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p_0(\mathbb{R}^n)$ и $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, если $1 \leqslant p < +\infty$ и $\alpha p < n$.

Случай $p < 1$ гораздо более сложный. В этом случае автор не в состоянии ответить на следующие вопросы.

1. Когда $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$?
2. Когда $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$?

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть $n = \alpha = 1$. В этом случае ясно, что множество $\mathfrak{Y}^p_1(\mathbb{R})$ содержится в классическом классе Харди H^p в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Следовательно, $Y^p_1(\mathbb{R}) \neq L^p(\mathbb{R})$. Известно (см. [1]), что $Y^p_1(\mathbb{R})$ есть множество всех функций пространства H^p, имеющих вещественные граничные значения почти всюду на $\mathbb{R}$. Пусть $H^p(\mathbb{R}^n)$ обозначает вещественный класс Харди, см. [4] и [5]. Аналогично, используя пространство $H^p(\mathbb{R}^n)$, мы можем доказать, что $Y^p_n(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ при $\frac{n-1}{n} \leqslant p < 1$ (случай $p = \frac{n-1}{n}$ требует чуть больших усилий). Условие $p \geqslant \frac{n-1}{n}$ связано с тем, что функция $|\nabla U|^p$ субгармонична при $p \geqslant \frac{n-1}{n}$, где U – гармоническая функция $n+1$ вещественной переменной.

Мы можем доказать, что $Y_n^p(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ при $\frac{n-1}{n} \leqslant p < 1$, используя только это субгармоническое свойство градиента (и совсем не используя классы $H^p(\mathbb{R}^n)$). Это субгармоническое свойство влечёт следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|e - f|^p - 1) \geqslant 0 \tag{1}$$

для $f \in \mathfrak{Y}_n^0(\mathbb{R}^n)$, $\frac{n-1}{n} \leqslant p < 1$ и векторов $e \in \mathbb{R}^n$, имеющих единичную норму. В самом деле, с функцией $f = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{1}{|x-a_\kappa|^{n+1}}(x-a_\kappa)$ мы можем связать градиент u гармонической функции от переменных $(x_1, \dots, x_n, t)$,

$$u(x,t) = \left(e - \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{1}{(|x-a_\kappa|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}(x-a_\kappa),\ -\sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{t}{(|x-a_\kappa|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right).$$

Заметим, что $u(x,0) = (e - f(x), 0)$, и функция $|u(x,t)|^p - 1$ субгармонична при $p \geqslant \frac{n-1}{n}$. Кроме того, функция $|u(x,t)|^p - 1$ достаточно быстро убывает в бесконечности. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|u(x,0)|^p - 1)\, dx \geqslant 0,$$

что доказывает неравенство (1). Неравенство (1) влечёт, что $Y_n^p(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ при $\frac{n-1}{n} \leqslant p < 1$ (детали см. ниже в доказательстве теоремы 4.2 или теоремы 1.3 статьи [2]).

Мы сформулируем ряд известных результатов, относящихся к пространствам $X_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$ и $Y_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$.

Положим

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, p) : \alpha > 0, 0 < p < 1, X_\alpha^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

и

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, p) : \alpha > 0, 0 < p < 1, Y_\alpha^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\}.$$

Теорема 1. *Пусть $0 < p < 1$ и $\alpha > 0$. Тогда*

а) $(\alpha, p) \in A_n$ *в том и только в том случае, когда* $\int_{\mathbb{R}^n} (|1 - f|^p - 1) < 0$ *для некоторой функции* $f \in \mathfrak{X}_\alpha^0(\mathbb{R}^n)$;

б) $(\alpha, p) \in B_n$ *в том и только в том случае, когда*

$\int_{\mathbb{R}^n}(|e-f|^p-1)<0$ *для некоторой функции* $f\in\mathfrak{Y}^0_\alpha(\mathbb{R}^n)$ *и вектора* $e\in\mathbb{R}^n$ *единичной нормы.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.4 статьи [2]. Чтобы доказать б), следует заметить, что

$$f\in\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)\Rightarrow Q\circ f\circ Q^{-1}\in\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|e-f|^p-1)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|Qe-Q\circ f\circ Q^{-1}|^p-1)$$

для любого ортогонального преобразования Q пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, из б) вытекает, что для любого вектора $e\in\mathbb{R}^n$ единичной нормы существует функция $f\in\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^n}(|e-f|^p-1)<0$.

Следствие 1. *Множества A_n и B_n открыты в пространстве $\mathbb{R}^2$.*

Следствие 2. *Если $(\alpha,p)\in A_n$, то $(\alpha,q)\in A_n$ для всех $q\in(0,p]$. Если $(\alpha,p)\in B_n$, то $(\alpha,q)\in B_n$ для всех $q\in(0,p]$.*

Достаточно заметить, что функция $t\mapsto\dfrac{a^t-1}{t}$ возрастает на промежутке $(0,+\infty)$ при любом $a\geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть $0<p<1$. Если $0<\alpha<n$, то $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ и $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.*

Схема доказательства. Мы рассмотрим только равенство $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$, равенство $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ может быть доказано аналогично.

Шаг 1. $X^1_\alpha(\mathbb{R}^n)\supset L^1_0(\mathbb{R}^n)$.

Шаг 2. Существует функция $f\in L^1_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^n}(|1-f|^p-1)<0$.

Шаг 3. Существует функция $f\in\mathfrak{X}^1_\alpha(\mathbb{R}^n)=\mathfrak{X}^0_\alpha(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^n}(|1-f|^p-1)<0$.

Шаг 4. Применить теорему 1. □

Теорема 3 (см. [2, теорема 8.1]). *Пусть $0<p<\frac{2n}{\alpha}-1$ и $\alpha\geqslant n$. Тогда $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Теорема 4. *Если* $\frac{n-1}{n} \leqslant p < 1$, *то* $Y_n^p(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Это было объяснено выше.

Теорема 5. *Если* $0 < p < \frac{n-1}{n+1}$, *то* $Y_n^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Это следует из теоремы 4.7 и теоремы 0.7 статьи [2].

Теорема 6. *Если* $\frac{n-1}{n} \leqslant p < \frac{1}{n+1}$, *то* $X_{n+1}^p(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n)$.

Это следует из замечания 8.8 статьи [2].

Прежде чем сформулировать следующие две теоремы, упомянем статью Хавина [7], см. также [8]. Хавин [7] исследовал задачи единственности для потенциалов Рисса. Он использовал аппарат уравнений Дарбу и обобщённых аналитических функций. Эти исследования были продолжены в статьях [6] и [13]. Сергеев [13] на этом пути получил ряд результатов, относящихся к пространствам $X_\alpha^p(\mathbb{R})$ при $\alpha \geqslant 2$.

Теорема 7. *Если* $2 \leqslant \alpha < \frac{1}{p}$, *то* $X_\alpha^p(\mathbb{R}) \neq L^p(\mathbb{R})$.

Это частный случай теоремы 3 статьи [13].

Теорема 8. *Если* $1 \leqslant \alpha < \frac{1}{p}$, *то* $Y_\alpha^p(\mathbb{R}) \neq L^p(\mathbb{R})$.

Это может быть доказано так же, как теорема 7, см. теорему 2.7 ниже. Для удобства читателя во втором параграфе мы излагаем более подробно некоторые результаты Сергеева [13].

Замечание 1. Заметим, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{|x+h|^{\alpha+1}} - \frac{x}{|x|^{\alpha+1}}\right) = -\frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Это равенство (а точнее, лемма 6.3 ниже) позволяет доказать, что $X_{\alpha+1}^p(\mathbb{R}) \subset Y_\alpha^p(\mathbb{R})$. Следовательно, теорема 7 может быть сведена к теореме 8. Аналогично лемма 6.4 ниже позволяет доказать, что $Y_{\alpha+1}^p(\mathbb{R}) \subset X_\alpha^p(\mathbb{R})$. Следовательно, теорема 8 при $\alpha \geqslant 3$ может быть сведена к теореме 7.

Замечание 2. Теорема 1 и теорема 2 могут быть распространены на случай $\alpha < 0$ при условии, что α не является чётным целым числом.

Как было отмечено выше, доказательство теоремы 4 основано на неравенстве

$$\Delta(|\nabla U|^p) \geqslant 0$$

при $p \geqslant \frac{n-1}{n}$ для любой гармонической функции U, зависящей от $n+1$ переменной. В этой статье мы доказываем, что если $\beta \geqslant 0$, то

$$\Delta_\beta(|\nabla U|^p) \geqslant 0$$

при $p \geqslant \frac{n-1+\beta}{n+\beta}$ для любой функции U, зависящей от $n+1$ переменной и удовлетворяющей уравнению Дарбу $\Delta_\beta U = 0$ (см. теорему 4.1 ниже). Это позволяет получить обобщение теоремы 4 (см. теорему 4.2 ниже).

В §5 собрана нужная нам информация о вещественных классах Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$. В частности, мы отмечаем, что классы Харди можно рассматривать как пространства функций, удовлетворяющих уравнению Дарбу. В §6 показано, что в некоторых случаях классы $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать как пространства обобщённых функций и даже как подмножества вещественного класса Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$. При этом в одномерном случае благодаря результатам Сергеева можно продвинуться гораздо дальше. В качестве приложения получается, например, в одномерном случае такое неравенство: $\|\operatorname{Re} F\|_{L^p} \leqslant C(p)\|\operatorname{Im} F\|_{L^p}$ при $p < 1$ для широкого класса функций F, лежащих в пространстве Харди H^p в полуплоскости, см. теорему 6.6 и неравенства для функций класса Z^p_α, введённого в §6. Наконец, в §7 мы формулируем ряд открытых вопросов.

2. Результаты Сергеева

Все результаты этого параграфа принадлежат Сергееву [13]. Мы излагаем здесь эти результаты, потому что некоторые из них лишь неявно содержатся в [13].

Пусть W – гладкая вещественная функция, заданная в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяющая уравнению Дарбу

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\beta}{y}\,\frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

Положим

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial W}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - i\frac{\partial W}{\partial y}\right).$$

Легко проверить (см. [7] и [8]), что функция Φ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} + \frac{\beta i}{4y}(\Phi - \overline{\Phi}) = 0. \tag{2}$$

Следуя [8], обозначим через $O(\beta)$ множество всех гладких функций $\Phi:\mathbb{C}_+\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих уравнению (2).

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi\in O(\beta)$, где $\beta\geqslant 0$. Тогда существует субгармоническая функция $h:\mathbb{C}_+\to[-\infty,\infty)$ такая, что $h\leqslant \log|\Phi|\leqslant h+\beta C$ всюду в $\mathbb{C}_+$, где C – абсолютная константа.*

Доказательство. В силу следствия 1 статьи [13] существует семейство $\{A_b\}_{b\in\mathbb{R}}$ голоморфных в $\mathbb{C}_+$ функций такое, что $|A_b|\leqslant e^{C_1\beta}|\Phi|$ и $|\Phi|\leqslant e^{C_2\beta}|z-b|^{\beta}y^{-\beta}|A_b|$ всюду в $\mathbb{C}_+$. Положим $h\stackrel{\mathrm{def}}{=}-C_1\beta+\sup\limits_{b\in\mathbb{R}}\log|A_{\Phi,b}|$. Тогда $h\leqslant\log|\Phi|\leqslant h+(C_1+C_2)\beta$. $\square$

Следствие 2.2. *Пусть $\Phi\in O(\beta)$, где $\beta<0$. Тогда существует субгармоническая функция $h:\mathbb{C}_+\to[-\infty,\infty)$ такая, что $h+|\beta|\log y\leqslant\log|\Phi|\leqslant h+|\beta|\log y+|\beta|C$ всюду в $\mathbb{C}_+$, где C – абсолютная константа.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\Phi\in O(\beta)$ в том и только в том случае, когда $iy^{\beta}\Phi\in O(-\beta)$. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть $\Phi\in O(\beta)$, где $\beta\geqslant 0$. Предположим, что в условиях теоремы* 2.1

$$\sup_{y>0}\int\limits_{\mathbb{R}}|\Phi(x+iy)|^p\,dx<+\infty$$

при некотором $p\in(0,+\infty)$. Тогда существует функция F класса Харди H^p в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ такая, что $|\Phi|\leqslant e^{C\beta}|F|$ всюду в $\mathbb{C}_+$ и

$$\liminf_{y\to 0}(|\Phi(x+iy)|-|F(x+iy)|)\geqslant 0$$

при почти всех $x\in\mathbb{R}$. $\square$

Следствие 2.4. *В условиях теоремы* 2.3 *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|\Phi(x+iy)|^p\,dx\leqslant e^{Cp\beta}\int\limits_{\mathbb{R}}\liminf_{t\to 0}|\Phi(x+it)|^p\,dx$$

при любом $y>0$.

Следствие 2.5. *В условиях теоремы 2.3 имеет место неравенство*

$$|\Phi(x_0+iy_0)|^p \leqslant \frac{e^{C\beta p}}{4\pi y_0}\int\limits_{\mathbb{R}} \liminf_{y\to 0}|\Phi(x+iy)|^p\,dx,$$

где $x_0\in\mathbb{R}$, *а* $y_0>0$. $\square$

Следствие 2.6. *В условиях следствия 2.5 имеет место неравенство*

$$\log|\Phi(x_0+iy_0)| \leqslant C\beta + \frac{y_0}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\liminf_{y\to 0}\log|\Phi(x+iy)|}{(x_0-x)^2+y_0^2}\,dx. \ \square$$

Теорема 2.7. *Пусть* $\alpha\geqslant 1$ *и* $0<p<\frac{1}{\alpha}$. *Тогда* $Y^p_\alpha(\mathbb{R})\neq L^p(\mathbb{R})$, *пространство, сопряжённое с* $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$, *разделяет точки пространства* $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$. *Кроме того, если* $f\in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ *и мера Лебега множества* $\{x\in\mathbb{R}: f(x)=0\}$ *положительна, то* $f\equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f\in\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R})$. Тогда функция f может быть представлена в виде

$$f=\sum_{\kappa=1}^{N}\lambda_\kappa\frac{1}{|x-a_\kappa|^{\alpha+1}}(x-a_\kappa),$$

где $a_\kappa,\ \lambda_\kappa\in\mathbb{R}$. Положим

$$\widehat{f}(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{\kappa=1}^{N}\lambda_\kappa\frac{\overline{z}-a_\kappa}{|z-a_\kappa|^{\alpha+1}} \tag{3}$$

для $z\in\mathbb{C}_+$. Легко проверить, что функция $\widehat{f}$ удовлетворяет уравнению (2) при $\beta=\alpha-1\geqslant 0$. Следствие 2.5 влечёт:

$$|\widehat{f}(z)|^p\leqslant\frac{e^{C\beta p}}{4\pi\operatorname{Im} z}\|f\|^p_{L^p}.$$

Следовательно, оператор $f\to\widehat{f}(z)$ может быть продолжен до ограниченного ($\mathbb{R}$-линейного) оператора из пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ в пространство $\mathbb{C}$. Это позволяет определить $\widehat{f}$ для любой функции $f\in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$. Из следствия 2.4 и теоремы Банаха-Штейнгауза вытекает, что $\lim\limits_{t\to 0}\widehat{f}(\cdot+it)=f$ в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ для любой функции $f\in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$. Теперь ясно, что пространство, сопряжённое с $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$, разделяет точки на $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$. Чтобы закончить доказательство теоремы, заметим, что

$$\log|\widehat{f}(z)| \leqslant C\beta + \frac{\operatorname{Im} z}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\log|f(t)|}{|z-t|^2}\,dt.$$

для всех $z \in \mathbb{C}_+$ и $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$. $\square$

Замечание. Пусть $\alpha \geqslant 1$. Для $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ мы определяем угловую максимальную функцию

$$M_\alpha f : \mathbb{R} \to [0, +\infty], \quad (M_\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|\widehat{f}(y+it)| : |x-y| < t\}.$$

Из теоремы 2.3 вытекает, что если $\alpha \geqslant 1$, то неравенство $\|M_\alpha f\|_{L^p} \leqslant C(p,\alpha)\|f\|_{L^p}$ имеет место для всех $f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R})$, а значит, и для всех $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$.

Из этого замечания получается, что угловые граничные значения функции $\widehat{f}$ существуют и совпадают с f почти всюду на $\mathbb{R}$ для любой функции $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R})$, если $\alpha \geqslant 1$.

Теорема 2.8. *Пусть $\alpha \geqslant 2$ и $0 < p < \frac{1}{\alpha}$. Тогда $X^p_\alpha(\mathbb{R}) \neq L^p(\mathbb{R})$, пространство, сопряжённое с $X^p_\alpha(\mathbb{R})$, разделяет точки на $X^p_\alpha(\mathbb{R})$. Кроме того, если $f \in X^p_\alpha(\mathbb{R})$ и мера Лебега множества $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ положительна, то $f \equiv 0$.*

Доказательство. Теорема 2.8 сводится к теореме 2.7. Достаточно заметить, что $X^p_\alpha(\mathbb{R}) \subset Y^p_{\alpha-1}(\mathbb{R})$, см. §1, замечание 1 после теоремы 8. $\square$

3. Вспомогательные результаты

Обычно мы обозначаем вектор в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ буквой x, а в пространстве $\mathbb{R}^n$ – буквой x. Положим

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathrm{x}_{n+1} > 0\} = \{\mathrm{x} = (x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

Положим $D_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_j}$ для $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Для $\beta \in \mathbb{R}$ мы определяем оператор Дарбу Δ_β следующим образом

$$\Delta_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \Delta + \frac{\beta}{\mathrm{x}_{n+1}} D_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n+1} D_j^2 + \frac{\beta}{\mathrm{x}_{n+1}} D_{n+1}.$$

Как уже отмечалось выше, $\Delta|\nabla U|^p \geqslant 0$ для любой гармонической в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функции U и любого показателя $p \geqslant \frac{n-1}{n}$ (см. [14]). Мы покажем, что точно такими же методами можно получить соответствующий результат (см. теорему 4.1 ниже) для функций $U \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, удовлетворяющих уравнению Дарбу $\Delta_\beta U = 0$.

Лемма 3.1. *Пусть $U \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Предположим, что $\Delta_\beta U = 0$. Положим $u_j \stackrel{\text{def}}{=} D_j U$ для $j = 1, 2, \dots, n+1$. Тогда набор функций $u \stackrel{\text{def}}{=} (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} D_j u_j = -\frac{\beta u_{n+1}}{\mathrm{x}_{n+1}} \\ D_k u_j - D_j u_k = 0 \qquad (1 \leqslant k < j \leqslant n+1). \end{cases} \tag{4}$$

Кроме того, $\Delta_\beta u_j = 0$ для $j = 1, 2, \dots, n$ и $\Delta_\beta u_{n+1} = \frac{\beta u_{n+1}}{\mathrm{x}^2_{n+1}}$.

Обратно, если функции $u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ удовлетворяют системе уравнений (4), то $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) = \nabla U$ для некоторой функции $U \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, удовлетворяющей уравнению Дарбу $\Delta_\beta U = 0$.

Мы опускаем элементарное доказательство этой леммы.

Функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ мы называем β-субгармонической, если $\Delta_\beta f \geqslant 0$. Заметим, что если функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ удовлетворяют системе уравнений (4) при $\beta \geqslant 0$, то функция $|u|^2$ является β-субгармонической, поскольку

$$\Delta_\beta(|u|^2) = 2|\nabla u|^2 + 2\frac{\beta u^2_{n+1}}{\mathrm{x}^2_{n+1}} \geqslant 0.$$

Справедливость следующей леммы проверяется прямыми вычислениями.

Лемма 3.2. *Пусть положительная функция f является β-субгармонической в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Предположим, что $|\nabla f|^2 \leqslant M f \Delta_\beta f$ для некоторой константы $M \geqslant 1$. Тогда функция f^μ является β-субгармонической при $\mu \geqslant 1 - \frac{1}{M}$.* $\square$

Следствие 3.3. *Пусть неотрицательная функция f является β-субгармонической в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Предположим, что $|\nabla f|^2 \leqslant M f \Delta_\beta f$ для некоторой константы $M \geqslant 1$. Тогда функция*

$(f+\varepsilon)^\mu$ является β-субгармонической при любом $\varepsilon > 0$ и $\mu \geqslant 1-\frac{1}{M}$.
$\square$

Лемма 3.4. *Пусть A – самосопряжённая матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$. Пусть $\beta>0$. Тогда*

$$\|A\|^2 \leqslant \frac{\beta+n}{\beta+n+1}\Big(|A|_2^2+\frac{1}{\beta}(\operatorname{trace} A)^2\Big),$$

где $|A|_2$ и $\|A\|$ обозначают соответственно норму Гильберта–Шмидта и операторную норму матрицы A.

Доказательство. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n+1}$ собственные числа матрицы A. Нам нужно доказать, что

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n+1}\lambda_j^2 \leqslant \frac{\beta+n}{\beta+n+1}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j^2+\frac{1}{\beta}\Big(\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\Big)^2\right).$$

Мы можем предположить, что $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n+1}\lambda_j^2=\lambda_{n+1}^2$. Остаётся проверить, что

$$\lambda_{n+1}^2 \leqslant \frac{\beta+n}{\beta+n+1}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j^2+\frac{1}{\beta}\Big(\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\Big)^2\right).$$

Имеем:

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j^2+\frac{1}{\beta}\Big(\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\Big)^2-\frac{\beta+n+1}{\beta+n}\lambda_{n+1}^2$$

$$=\frac{n^2}{\beta}\Big(\frac{\lambda_{n+1}}{\beta+n}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big)^2+\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\lambda_{n+1}}{\beta+n}+\lambda_j\Big)^2\geqslant 0. \quad\square$$

Пусть $\beta<1$. Положим

$$P_\beta(x,t)\overset{\text{def}}{=}\frac{\Gamma(\frac{n+1-\beta}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{1-\beta}{2})}\frac{t^{1-\beta}}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1-\beta}{2}}},\qquad x\in\mathbb{R}^n, t>0.$$

С каждой функцией f из пространства $L^1\Big(\mathbb{R}^n,(1+|x|^2)^{\frac{\beta-n-1}{2}}dx\Big)$ мы связываем β-интеграл Пуассона

$$(P_\beta f)(x,t)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^n}P_\beta(x-y,t)f(y)\,dy,$$

где $(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$. Следующая лемма показывает, что P_β является аналогом ядра Пуассона для уравнения Дарбу $\Delta_\beta U=0$.

Лемма 3.5. *Пусть $\beta < 1$. Пусть f – ограниченная непрерывная функция, заданная на пространстве $\mathbb{R}^n$. Положим*

$$U(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (P_\beta f)(x,t), & t > 0, \\ f(x), & t = 0. \end{cases}$$

Тогда функция U непрерывна на полупространстве $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ и $\Delta_\beta U = 0$ в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Доказательство этой леммы можно найти в [9].

Лемма 3.6. *Пусть $\beta < 1$, $U \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что*

(i) $\Delta_\beta U \geqslant 0$,

(ii) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\infty} U(\mathrm{x}) = 0$,

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} U(x,t) = f(x)$ *при почти всех* $x \in \mathbb{R}^n$,

(iv) $\sup\limits_{0<t<1} |U(\cdot,t)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Тогда $U \leqslant P_\beta f$ всюду в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Доказательство. Пусть сначала $f \in C(\mathbb{R}^n)$ и $f(x) = \lim\limits_{(y,t)\to(x,0)} U(y,t)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. В силу принципа максимума (см. [10]) функция $U - P_\beta f$ не может принимать наибольшего значения в области $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Следовательно, $U \leqslant P_\beta f$. Рассмотрим теперь общий случай. Возьмем неотрицательную функцию φ, непрерывную на пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющую компактный носитель и удовлетворяющую условию $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Положим

$$U_\varepsilon(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} U(x-y,t)\varphi\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big)\,dy$$

и

$$f_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big)\,dy.$$

Ясно, что $\Delta_\beta U_\varepsilon \geqslant 0$, $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\infty} U_\varepsilon(\mathrm{x}) = 0$, $f_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$ и $f_\varepsilon(x) = \lim\limits_{(y,t)\to(x,0)} U_\varepsilon(y,t)$ для всех $\varepsilon > 0$. Следовательно, $U_\varepsilon \leqslant P_\beta f_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. Остаётся перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. $\square$

Следствие 3.7. *В условиях леммы* 3.6 *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

для всех $t>0$. $\square$

Замечание. Можно доказать, что в условиях леммы 3.6 функция $t\mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\,dx$ является убывающей.

4. Пространство $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и β-субгармоническое свойство градиента для уравнения Дарбу

Теорема 4.1. *Пусть* $\beta\geqslant 0$ *и* $p\geqslant \frac{\beta+n-1}{\beta+n}$. *Предположим, что набор функций* $u=(u_1,u_2,\dots,u_{n+1})$ *удовлетворяет системе уравнений* (4). *Тогда* $\Delta_\beta(|u|^2+\varepsilon)^{p/2}\geqslant 0$ *для любого числа* $\varepsilon>0$.

Доказательство. Мы можем предположить, что $\beta>0$, поскольку случай $\beta=0$ хорошо известен, см. [14]. В силу следствия 3.3 достаточно доказать, что

$$|\nabla(|u|^2)|^2\leqslant \frac{2(\beta+n)}{\beta+n+1}|u|^2\Delta_\beta(|u|^2).$$

Рассмотрим матрицу $A=\{D_j u_k\}_{1\leqslant j,k\leqslant n+1}$. Ясно, что $|\nabla(|u|^2)|^2=4|Au|^2$ и

$$\Delta_\beta(|u|^2)=2|\nabla u|^2+2\frac{\beta u_{n+1}^2}{\mathrm{x}_{n+1}^2}=2|A|_2^2+2\frac{\beta u_{n+1}^2}{\mathrm{x}_{n+1}^2}.$$

Таким образом, теорема 4.1 сводится к неравенству

$$|Au|_2^2\leqslant\frac{\beta+n}{\beta+n+1}\Big(|A|_2^2+\frac{\beta u_{n+1}^2}{\mathrm{x}_{n+1}^2}\Big)|u|^2,$$

которое следует из леммы 3.4, поскольку $\operatorname{trace}A=-\frac{\beta u_{n+1}}{\mathrm{x}_{n+1}}$. $\square$

Пример 1. Положим $u_j(\mathrm{x})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\dfrac{1}{|\mathrm{x}|^{n+\beta+1}}\mathrm{x}_j$, где $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_+$. Набор функций $u\stackrel{\mathrm{def}}{=}(u_1,u_2,\dots,u_{n+1})$ удовлетворяет системе уравнений (4). Имеем: $|u(\mathrm{x})|=\dfrac{1}{|\mathrm{x}|^{n+\beta}}$ и

$$\Delta_\beta|u|^p=p(n+\beta)^2\Big(p-\frac{n+\beta-1}{n+\beta}\Big)\frac{1}{|\mathrm{x}|^{pn+p\beta+2}}.$$

Следовательно, функция $|u|^p$ является β-субгармонической только при $p \geqslant \frac{\beta+n-1}{\beta+n}$. Таким образом, теорема 4.1 точна.

Пример 2. Положим $u_j \equiv 0$ при $j = 1, 2 \ldots, n$ и $u_{n+1}(\mathrm{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{x}_{n+1}^{-\beta}$, где $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Ясно, что набор функций $u \stackrel{\mathrm{def}}{=} (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ удовлетворяет системе уравнений (4) и

$$\Delta_\beta |u|^p = \beta\, p\, (\beta p + 1 - \beta)\, \mathrm{x}_{n+1}^{-\beta p - 2}.$$

Следовательно, для любого показателя $p \in (0, +\infty)$ мы имеем $\Delta_\beta |u|^p < 0$, если только $\beta < 0$ и число $|\beta|$ достаточно мало.

Теорема 4.2. *Пусть $n \leqslant \alpha < n+1$ и $\frac{\alpha-1}{\alpha} \leqslant p < \frac{n}{\alpha}$. Тогда $Y_\alpha^p(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{Y}_\alpha^0(\mathbb{R}^n)$. Тогда функция f может быть представлена в виде

$$f = \sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{1}{|x - a_\kappa|^{\alpha+1}} (x - a_\kappa),$$

где $a_\kappa \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_\kappa \in \mathbb{R}$. Положим

$$\widehat{f}(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{1}{(|x - a_\kappa|^2 + t^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} (x - a_\kappa), \sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{t}{(|x - a_\kappa|^2 + t^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right).$$

Функции $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_{n+1})$ удовлетворяют системе уравнений (4) при $\beta = \alpha - n$ (см. пример 1). Кроме того, $\lim\limits_{t\to 0} \widehat{f}(x,t) = (f(x), 0)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq a_\kappa$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, N$). Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ – вектор единичной нормы. Положим $U_\varepsilon \stackrel{\mathrm{def}}{=} (|(e,0) - \widehat{f}|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} - (1+\varepsilon)^{\frac{p}{2}}$ для $\varepsilon > 0$. Отметим, что функция U_ε является β-субгармонической в силу теоремы 4.1. Применяя следствие 3.7, мы получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left((|e - f(x)|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} - (1+\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \right) dx \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left((|(e,0) - \widehat{f}(x,t)|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} - (1+\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \right) dx = 0$$

для любого числа $\varepsilon > 0$, откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|e - f(x)|^p - 1)\, dx \geqslant 0.$$

Положим

$$Z^p(e) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|e - f(x)|^p - 1)\, dx \geqslant 0\}.$$

Ясно, что $Z^p(e)$ – замкнутое подмножество пространства $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Кроме того, $Z^p(e) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, поскольку $\mathbb{1}_Q e \notin Z^p(e)$, где $\mathbb{1}_Q$ – характеристическая функция невырожденного куба Q. Чтобы закончить доказательство, достаточно заметить, что $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \subset Z^p(e)$ для любого вектора $e \in \mathbb{R}^n$ единичной нормы. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть* $n \leqslant \alpha < n+1$, $\frac{\alpha-1}{\alpha} \leqslant p < \frac{n}{\alpha}$ *и* $t > 0$. *Тогда*

$$\|\widehat{f}(\cdot, t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})} \leqslant \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$$

и

$$\|\widehat{f}(\cdot, t)\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})} \leqslant \frac{\Gamma(\frac{2n-\alpha+1}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-\alpha+1}{2})} \quad t^{-n} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$$

для всех функций $f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, *где* $\widehat{f}$ *обозначает то же, что в доказательстве теоремы* 4.2.

Доказательство. Положим $U_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} (|\widehat{f}|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} - \varepsilon^p$ для $\varepsilon > 0$. Применяя теорему 4.1 и лемму 3.6, мы получаем $(|\widehat{f}|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} - \varepsilon^p \leqslant P_\beta\big((|f|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} - \varepsilon^p\big)$ для любого положительного числа ε, где $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha - n$. Следовательно, $|\widehat{f}|^p \leqslant P_\beta(|f|^p)$. Чтобы закончить доказательство, достаточно заметить, что $\|P_\beta(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant 1$ и $\|P_\beta(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant \dfrac{\Gamma(\frac{2n-\alpha+1}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-\alpha+1}{2})}\, t^{-n}$. $\square$

Пусть $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Из леммы 4.3 следует, что оператор $f \mapsto \widehat{f}(x, t)$ может быть продолжен до ограниченного оператора из пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Это позволяет определить функцию $\widehat{f}$ для любой функции $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ при условиях $n \leqslant \alpha < n+1$, $\frac{\alpha-1}{\alpha} \leqslant p < \frac{n}{\alpha}$.

Теорема 4.4. *Пусть $n \leqslant \alpha < n+1$ и $\frac{\alpha-1}{\alpha} \leqslant p < \frac{n}{\alpha}$. Для любой ненулевой функции $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ существует линейный непрерывный функционал Φ на пространстве $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ такой, что $\Phi(f) \neq 0$.*

Доказательство. Из леммы 4.3 и теоремы Банаха–Штейнгауза следует, что

$$\lim_{t\to 0} \widehat{f}(\cdot,t) = (f,0) \tag{5}$$

в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n+1})$ для любой функции $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $\Phi(f)=0$ для любого функционала Φ на пространстве $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\widehat{f}(x,t)=0$ для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$, и равенство (5) влечёт равенство $f=0$. $\square$

Пусть $n \leqslant \alpha < n+1$. Для $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ мы определяем угловую максимальную функцию $M_\alpha f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$, $(M_\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|\widehat{f}(y,t)| : |x-y|<t\}$.

Теорема 4.5. *Пусть $n \leqslant \alpha < n+1$. Тогда $\|M_\alpha f\|_{L^p} \leqslant C(p,\alpha,n)\|f\|_{L^p}$ при $p \in (\frac{\alpha-1}{\alpha},\frac{n}{\alpha})$, и $\|M_\alpha f\|_{L^{p\,\infty}} \leqslant C(p,\alpha,n)\|f\|_{L^p}$ при $p=\frac{\alpha-1}{\alpha}$, где $L^{p\,\infty}$ обозначает слабое L^p-пространство.*

Доказательство. Положим $p_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Так же, как и в доказательстве леммы 4.3, мы можем получить неравенство $|\widehat{f}|^{p_0} \leqslant P_\beta(|f|^{p_0})$ сначала для любой функции $f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, а затем и для любой функции $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $|M_\alpha f|^{p_0} \leqslant C(\alpha,n)M^*(|f|^{p_0})$, где M^* обозначает максимальный оператор Харди–Литлвуда. Таким образом, теорема сводится к хорошо известным свойствам максимального оператора M^*. $\square$

Из теоремы 4.5 легко следует, что угловые граничные значения функции $\widehat{f}$ совпадают с функцией $(f,0)$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$ для любой функции $f \in Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ при условиях $n \leqslant \alpha < n+1$, $\frac{\alpha-1}{\alpha} \leqslant p < \frac{n}{\alpha}$.

5. Классы Харди и уравнения Дарбу

Напомним одно из эквивалентных определений вещественных классов Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$, данных в статье Феффермана–Стейна [4]. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, причём $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx \neq 0$. Обобщённая функция $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$, если максимальная функция

$$(M_\varphi f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|(t^{-n}\varphi(\cdot/t)*f)(y)| : y\in\mathbb{R}^n, |x-y|<t\}$$

принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}^n)$. Это определение не зависит от выбора функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такой, что $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx \neq 0$. На самом деле аналогичное определение работает для гораздо более широкого класса функций φ. Например, в качестве φ можно взять ядро Пуассона, $\varphi(x) = P_0(x,1) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$. Цель этого параграфа – отметить, что в качестве φ можно взять также и β-ядро Пуассона $P_\beta(x,1)$ при $\beta < 1$, которое мы рассматривали в §3. Другими словами, в качестве φ можно взять также ядро вида $\varphi(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha > n$. Некоторые результаты мы получим и для несуммируемых ядер $\varphi(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$, то есть при $\alpha \leqslant n$ (случай отрицательных α мы также не исключаем). Напомним (см. [5]), что пространство, сопряжённое с пространством Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$ при $p < 1$, отождествляется естественным образом с однородным пространством s-гладких функций $\Lambda_s(\mathbb{R}^n)$ при $s = \frac{n}{p} - n$. Наши обозначения не совпадают с обозначениями, принятыми в [4] и [5]. Здесь $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} L^\infty_\alpha(\mathbb{R}^n)$, где $L^\infty_\alpha(\mathbb{R}^n)$ обозначает то же, что в [5].

Заметим, что функция $(1+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ принадлежит пространству $\Lambda_\gamma(\mathbb{R}^n)$ (с $\gamma > 0$), если $\alpha+\gamma \geqslant 0$. Это позволяет определить свёртку $f*(1+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ для любой функции $f \in H^p$, если $p < 1$ и $\alpha + \frac{n}{p} \geqslant n$.

Пусть $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Положим $\|f\|_{H^p} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|M_\varphi f\|_{L^p}$, где $\varphi(x) = P_0(x,1)$.

Теорема 5.1. *Пусть $\beta < 1$ и $0 < p < +\infty$. Предположим, что f – обобщённая функция класса $H^p(\mathbb{R}^n)$. Положим*

$$u(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (P_\beta(\cdot,t) * f)(x).$$

Тогда $\Delta_\beta u = 0$ в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и угловая максимальная функция $(Mu)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{|u(y,t)| : |x-y| < t\}$ принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}^n)$, при этом справедливо неравенство $\|Mu\|_{L^p} \leqslant C(p,n)\|f\|_{H^p}$. Кроме того, $f = \lim\limits_{t\to 0} u(\cdot,t)$ в пространстве $H^p(\mathbb{R}^n)$, а значит, и в пространстве умеренно растущих обобщённый функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Теорема тривиальна при $p > 1$. Случай $p \leqslant 1$ нетрудно получить, используя теорему об атомном разложении пространства $H^p(\mathbb{R}^n)$, см. [5].

Теорема 5.2. *Пусть $\beta < 1$ и $0 < p < +\infty$. Предположим, что $\Delta_\beta u = 0$ для некоторой гладкой функции u в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ такой, что $Mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует единственная обобщённая функция $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ такая, что $u(x,t) = (P_\beta(\cdot,t) * f)(x)$, при этом $\|f\|_{H^p} \leqslant C(p,n)\|Mu\|_{L^p}$.*

Отметим, что теоремы 5.1 и 5.2 при $\beta = 0$ содержатся в статье [4]. Доказательство теоремы 5.2 в общем случае аналогично доказательству из [4] в частном случае $\beta = 0$, при этом нужно использовать следующую лемму для $\alpha = n + 1 - \beta$.

Лемма 5.3. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\alpha \neq -2k$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда существует функция $\psi \in L^\infty[1, +\infty)$ такая, что*

(i) $x^N\psi(x) \in L^\infty[1, +\infty)$ *для* $N = 1, 2, \ldots$,

(ii) $\varphi(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_1^{+\infty} (1 + s^{-2}|x|^2)^{-\alpha/2}\psi(s)\,ds \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

(iii) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(s)s^{2k+\alpha}\,ds = 0 \tag{6}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$. Заметим, что если h – чётная функция, принадлежащая классу $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $h(|x|)$ как функция переменной $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому можно считать, что $n = 1$. Положим $h(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_1^{+\infty} \psi(s)(1 + s^{-2}x^2)^{-\alpha/2}\,ds$ для $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Докажем теперь, что h вместе со всеми своими производными стремится в бесконечности к нулю быстрее любой степени. Для этого достаточно доказать, что функция $h(1/x)$ стремится в нуле к нулю вместе со всеми своими производными. Таким образом, равенство

$$h(1/x) = \int\limits_1^{+\infty} |x|^\alpha(1 + s^2x^2)^{-\alpha/2}s^\alpha\psi(s)\,ds$$

и формула Тейлора влекут, что $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, если выполнено условие (6). Выясним теперь, что означает условие $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$ в терминах функции ψ. Предположим сначала, что $\alpha > n$. Тогда в силу теоремы Фубини имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-\alpha/2}\,dx \int\limits_1^{+\infty} s^n \psi(s)\,ds.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha \leqslant n$. Положим $N = [(n-\alpha)/2]$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a. Применяя формулу Тейлора, находим коэффициенты $\{c_k\}_{k=0}^N$ такие, что

$$F(\alpha, N, x) \stackrel{\text{def}}{=} (1+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} - \sum_{k=0}^{N} c_k |x|^{-2k-\alpha} = \mathcal{O}(|x|^{-2N-\alpha-2})$$

при $x \to \infty$. Предположим сначала, что $(\alpha - n)/2 \notin \mathbb{Z}$. Тогда $F(\alpha, N, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, из формулы Тейлора с остатком по Лагранжу, применённой к функции $(1+t)^{-\alpha/2}$, следует, что функция $F(\alpha, N, \cdot)$ знакопостоянна. Снова применяя теорему Фубини, получаем:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_1^{+\infty} F(\alpha, N, x/s)\psi(s)\,ds\,dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\alpha, N, x)\,dx \int\limits_1^{+\infty} s^n \psi(s)\,ds.\end{aligned}$$

Если же $(\alpha - n)/2 \in \mathbb{Z}$, то $|x|^\varepsilon F(\alpha, N, x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \in (0, 2)$. Теперь теорема Фубини даёт:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\varepsilon \varphi(x)\,dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_1^{+\infty} |x|^\varepsilon F(\alpha, N, x/s)\psi(s)\,ds\,dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\varepsilon F(\alpha, N, x)\,dx \int\limits_1^{+\infty} s^{n+\varepsilon} \psi(s)\,ds.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\varepsilon F(\alpha, N, x)\,dx = -c_N \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^{\varepsilon - n}\,dx = -\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} c_N.$$

Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_1^{+\infty} s^{n+\varepsilon}\psi(s)\,ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_1^{+\infty}(s^{n+\varepsilon}-s^n)\psi(s)\,ds$$

$$=\int\limits_1^{+\infty} s^n(\log s)\psi(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx=-\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}c_N\int\limits_1^{+\infty} s^n(\log s)\psi(s)\,ds.$$

Заметим, что $c_N\neq 0$. Таким образом, лемма сводится к существованию функции $\psi:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ такой, что

(i) $\psi(t)=\mathcal{O}(t^{-N})$ при $t\to+\infty$ при любом $N>0$,

(ii) $\int\limits_1^{\infty}\psi(s)s^{2k+\alpha}\,ds=0$ при $k=0,1,2,\dots$,

(iii) $\int\limits_1^{\infty}\psi(s)s^n\,ds\neq 0$, если n не встречается среди чисел $2k+\alpha$ $(k=0,1,2,\dots)$,

(iv) $\int\limits_{\mathbb{R}} s^n(\log s)\psi(s)\,ds\neq 0$, если n встречается среди чисел $2k+\alpha$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Существование такой функции ψ хорошо известно. $\square$

Лемма 5.3 позволяет доказать вариант теоремы 5.2, имеющий место не только при $\beta<1$ (см. теорему 5.4 ниже). Положим $G_\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{F}((1+|x|^2)^{-\alpha/2})$, где $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, первоначально определяемое на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$(\mathcal{F}\varphi)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)e^{-2\pi i(x,y)}\,dy.$$

Известно, что

$$G_\alpha(x)\sim\begin{cases}C(\alpha,n)|x|^{\alpha-n}, & \alpha<n,\quad \alpha\neq 0,-2,-4,\dots,\\ C(n,n)\log|x|, & \alpha=n,\\ C(\alpha,n), & \alpha>n\end{cases}\tag{7}$$

при $x \to 0$, см. [12]. Кроме того, функция G_α экспоненциально быстро стремится к нулю в бесконечности, см. [14]. Заметим, что если

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad (\mathcal{F}f)(x) = \mathcal{O}(|x|^N)$$

при $x \to \infty$ и $G_\alpha \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то мы можем определить свёртку

$$f * t^{\alpha-n}(t^2+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

при помощи преобразования Фурье:

$$f * t^{\alpha-n}(t^2+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}((G_\alpha(tx)\mathcal{F}f).$$

Теорема 5.4. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -2k$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть f – умеренно растущая обобщённая функция такая, что $\mathcal{F}f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{F}f)(x) = \mathcal{O}(|x|^N)$ в окрестности бесконечности при некотором $N > 0$ и $G_\alpha \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Определим функцию u в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ формулой $u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t^{\alpha-n}}{(|x|^2+t^2)^{\frac{\alpha}{2}}} * f$. Предположим, что угловая максимальная функция Mu принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p > 0$. Тогда $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ и $\|f\|_{H^p} \leqslant C(p,n,\alpha)\|Mu\|_{L^p}$.*

Доказательство аналогично доказательству импликации (D)$\Rightarrow$(A) теоремы 11 статьи [4]. Пусть ψ – функция, существование которой утверждается в лемме 5.3. Положим

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty u(x,ts)s^n\psi(s)\,ds.$$

Ясно, что $Mv \leqslant CMu$ и $v(x,t) = t^{-n}\varphi(\cdot/t) * f$. Следовательно, $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ и $\|f\|_{H^p} \leqslant C(p,n,\alpha)\|Mu\|_{L^p}$. $\Box$

6. Пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ как пространства обобщённых функций

Пусть $f \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Каждую такую функцию мы хотим рассматривать как обобщённую функцию $\breve{f}$. Для этого достаточно рассмотреть случай функции $f(x) = f_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x|^{-\alpha}$. Заметим, что функция f_α локально суммируема, если $\alpha < n$. Случай $\alpha \geqslant n$ (и даже $\alpha \in \mathbb{C}$) подробно разобран в [12]. Таким образом, мы можем построить вложение $f \to \breve{f}$ пространства $\mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство умеренно растущих обобщённых функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Отметим только, что случай $\alpha = n + 2k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, является особым. В частности, в этом случае не существует обобщённой функции f такой, что f однородна степени $-\alpha$ (то есть $f(\cdot/t) = t^\alpha f$ при всех $t > 0$) и сужение f на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ совпадает с локально суммируемой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функцией $|x|^{-\alpha}$.

Построим теперь соответствующее вложение пространства $\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathbb{R}^n$-значных обобщённых функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Пусть сначала $\alpha \neq 1$. Заметим, что $\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{\nabla f : f \in \mathfrak{X}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n)\}$. Положим $\breve{g} \overset{\text{def}}{=} \nabla \breve{f}$ в смысле обобщённых функций для $g = \nabla f$, $f \in \mathfrak{X}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n)$. Пусть теперь $\alpha = 1$. Для $f = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{x-a_\kappa}{|x-a_\kappa|^2} \in \mathfrak{Y}_1(\mathbb{R})$ положим $\breve{f} \overset{\text{def}}{=} \nabla\big(\sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \log|x - a_\kappa|\big)$, где градиент берётся в смысле теории обобщённых функций, $a_\kappa \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_\kappa \in \mathbb{R}$. Разумеется, последнее определение требуется только при $n = 1$, поскольку каждая функция пространства $\mathfrak{Y}_1(\mathbb{R}^n)$ локально суммируема, если $n \geqslant 2$.

Замечание. Пусть $f \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Тогда можно определить свёртку $\breve{f} * \varphi$ для любой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|dx}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} < +\infty. \tag{8}$$

Достаточно рассмотреть случай функции $f = f_\alpha$. Возьмём функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем такую, что $\psi = 1$ в окрестности нуля. Представим функцию $\breve{f}$ в виде $\breve{f} = \psi\breve{f} + (1-\psi)\breve{f}$. Свёртка $(\psi\breve{f}) * \varphi$ определена, поскольку $\psi\breve{f}$ – обобщённая функция с компактным носителем. Свёртку $((1-\psi)\breve{f}) * \varphi$ двух бесконечно дифференцируемых функций мы можем определить формулой

$$(((1-\psi)\breve{f}) * \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} ((1-\psi)\breve{f})(y)\varphi(x-y)\,dy,$$

причём интеграл абсолютно сходится в силу условия (8). Положим теперь $\breve{f} * \varphi \overset{\text{def}}{=} (\psi\breve{f}) * \varphi + ((1-\psi)\breve{f}) * \varphi$. Ясно, что это определение не зависит от выбора функции ψ. Точно так же мы можем определить свёртку $\breve{f}_j * \varphi$ при $j = 1, 2, \dots, n$ для любой функции $f \in \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и любой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию (8).

Напомним, что для $f = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \dfrac{1}{|x-a_\kappa|^\alpha} \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ мы определяем функцию $\widehat{f}(x,t) = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \dfrac{1}{(|x-a_\kappa|^2+t^2)^{\alpha/2}}$. Кроме того, для $f = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \dfrac{1}{|x-a_\kappa|^{\alpha+1}}(x-a_\kappa) \in \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ мы определяем функцию

$$\widehat{f}(x.t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{1}{(|x-a_\kappa|^2+t^2)^{(\alpha+1)/2}}(x-a_\kappa), \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{t}{(|x-a_\kappa|^2+t^2)^{(\alpha+1)/2}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \dots, \widehat{f}_{n+1}).$$

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha \neq n+2k$, $k = 0,1,2,\dots$. Предположим, что $f \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\frac{t^{n-\alpha}}{(|x|^2+t^2)^{n-\alpha/2}} * \check{f} = \frac{\pi^{n/2}\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(n-\alpha/2)}\,\widehat{f}(x,t)$$

для любого числа $t>0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $f(x) = |x|^{-\alpha}$. Предположим сначала, что $\alpha < n$. Рассмотрим функцию $F(\mathrm{x}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathrm{x}|^{-\alpha}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Эта функция неотрицательна и удовлетворяет уравнению Дарбу $\Delta_\beta F = 0$ при $\beta = \alpha - n + 1$. Следовательно, в силу теоремы 1 статьи [9] имеет место равенство

$$F(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_\beta(x-y,t)\,d\mu(y), \tag{9}$$

где μ – слабый предел мер $F(x,t)\,dx$ при $t \to 0$, откуда $\mu = |x|^{-\alpha}\,dx$. Таким образом, формула (9) даёт требуемый результат при $\alpha < n$. Отображение $\alpha \mapsto |x|^{-\alpha}$ можно рассматривать как $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$-значную мероморфную функцию комплексной переменной, имеющую простые полюсы в точках $n+2k$ при $k = 0,1,2,\dots$, см. [12]. Таким образом, общий случай следует из теоремы единственности для аналитических функций. $\square$

Следствие 6.2. *Пусть $\alpha \neq n+2k+1$, $k = 0,1,2,\dots$. Предположим, что $f \in \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\frac{t^{n+1-\alpha}}{(|x|^2+t^2)^{n+1/2-\alpha/2}} * \check{f}_j = \frac{\pi^{n/2}\Gamma((n+1-\alpha)/2)}{\Gamma(n+1/2-\alpha/2)}\,\widehat{f}_j(x,t)$$

для $j = 1, 2, \dots, n$ *и любого* $t > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда $\check{f} = \nabla \check{g}$ для некоторой функции $g \in \mathfrak{X}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n)$. Применяя лемму 6.1 к функции f, получаем

$$\frac{t^{n+1-\alpha}}{(|x|^2+t^2)^{n+1/2-\alpha/2}} * \check{g} = \frac{\pi^{n/2}\Gamma((n+1-\alpha)/2)}{\Gamma(n+1/2-\alpha/2)}\widehat{g}(x,t).$$

Дифференцирую это равенство по x_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, получаем требуемый результат. Случай $\alpha = 1$ может быть получен при помощи предельного перехода при $\alpha \to 1$. $\square$

Замечание 1. Лемма 6.1 и следствие 6.2, конечно, хорошо известны и могут быть доказаны при помощи преобразования Фурье (все необходимые для этого вычисления можно найти в [12]).

Замечание 2. Лемма 6.1 и следствие 6.2 могут быть переписаны также следующим образом:

$$P_{\alpha-n+1}(\cdot,t) * \check{f} = \widehat{f}(\cdot,t)$$

для $f \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и

$$P_{\alpha-n}(\cdot,t) * \check{f}_j = \widehat{f}_j(\cdot,t)$$

для $j = 1, 2, \dots, n$ и $f \in \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Как и выше,

$$P_\beta(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(\frac{n+1-\beta}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{1-\beta}{2})}\frac{t^{1-\beta}}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1-\beta}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

но здесь не обязательно $\beta < 1$.

Бо́льшая часть этого параграфа посвящена одномерному случаю. В этом случае вложение $f \to \check{f}$ может быть описано при помощи функций комплексной переменной.

Пусть F_α обозначает ветвь функции $(\frac{i}{z})^\alpha$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ такую, что $F_\alpha(1) = 1$. Положим $\widetilde{F}_\alpha(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\log(-iz))F_\alpha(z)$ для $z \in \mathbb{C}_+$, где $\log$ обозначает главную ветвь логарифма. Пусть $f \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R})$, $f = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{1}{|x-a_\kappa|^\alpha}$. Тогда

$$\check{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\cos\dfrac{\pi\alpha}{2})^{-1}\operatorname{Re}\left(\lim\limits_{y\to 0}\sum\limits_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa F_\alpha(x+iy-a_\kappa)\right), & \alpha-1 \notin 2\mathbb{Z}, \\ 2(\pi\sin\dfrac{\pi\alpha}{2})^{-1}\operatorname{Re}\left(\lim\limits_{y\to 0}\sum\limits_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \widetilde{F}_\alpha(x+iy-a_\kappa)\right), & \alpha-1 \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пусть теперь $f \in \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R})$, $f = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \dfrac{1}{|x-a_\kappa|^{\alpha+1}}(x-a_\kappa)$. Тогда

$$\breve{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\sin \dfrac{\pi\alpha}{2})^{-1} \operatorname{Im}\left(\lim\limits_{y\to 0}\sum\limits_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa F_\alpha(x+iy-a_\kappa)\right), & \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ -2(\pi\cos\dfrac{\pi\alpha}{2})^{-1} \operatorname{Im}\left(\lim\limits_{y\to 0}\sum\limits_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \widetilde{F}_\alpha(x+iy-a_\kappa)\right), & \alpha \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Во всех этих формулах пределы берутся в пространстве умеренно растущих обобщённых функций. Разумеется, в этих формулах нет необходимости при $\alpha < 1$, поскольку $\mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ при $\alpha < 1$.

Лемма 6.3. *Пусть $\alpha > 0$, $p\alpha < 1$. Предположим, что $f \in \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R})$ и $f' \in L^p(\mathbb{R})$. Тогда $f(x+h) - f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ при всех $h \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(f(x+h)-f(x)) = f'$ в пространстве $L^p(\mathbb{R})$.*

Доказательство этой леммы элементарно, и мы его опускаем. Аналогично, имеет место следующая лемма.

Лемма 6.4. *Пусть $\alpha > 0$, $p\alpha < 1$. Предположим, что $f \in \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R})$ и $f' \in L^p(\mathbb{R})$. Тогда $f(x+h) - f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ при всех $h \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(f(x+h)-f(x)) = f'$ в пространстве $L^p(\mathbb{R})$.*

Теперь мы покажем, что пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ и $X^p_\alpha(\mathbb{R})$ при определённых условиях можно рассматривать как пространства обобщённых функций.

Теорема 6.5. *Пусть $p < \frac{1}{\alpha}$. Тогда*

(i) $\|\breve{f}\|_{H^p} \leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ *для всех* $f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R})$, *если* $\alpha \geqslant 1$ *и* $\alpha \neq 2k$ *при* $k = 1, 2, \ldots$,

(ii) $\|\breve{f}\|_{H^p} \leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ *для всех* $f \in \mathfrak{X}^p_\alpha(\mathbb{R})$, *если* $\alpha \geqslant 2$ *и* $\alpha \neq 2k+1$ *при* $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Заметим, что неравенство $\|\breve{f}\|_{H^p} \leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ для всех $f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R})$ влечёт такое же неравенство для всех $f \in \mathfrak{X}^p_{\alpha+1}(\mathbb{R})$ в силу леммы 6.3. Точно так же неравенство $\|\breve{f}\|_{H^p} \leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ для всех $f \in \mathfrak{X}^p_\alpha(\mathbb{R})$ влечёт такое же неравенство для всех $f \in \mathfrak{Y}^p_{\alpha+1}(\mathbb{R})$ в силу леммы 6.4. Таким образом, достаточно доказать только первую часть теоремы для $\alpha \in [1,2)\cup(2,3)$. Пусть

$f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \geqslant 1$, $\alpha \neq 2, 3, 4, \dots$. Следствие 6.2 в обозначениях §2 (см. формулу (3)) даёт:

$$\frac{y^{2-\alpha}}{(x^2+y^2)^{\frac{3-\alpha}{2}}} * \check{f}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2})} \operatorname{Re} \widehat{f}(x+iy). \tag{10}$$

В силу замечания после теоремы 2.7 угловая максимальная функция $M\widehat{f}$ принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R})$ и $\|M\widehat{f}\|_{L^p} \leqslant C(p,\alpha)\|f\|_{L^p}$. Остаётся воспользоваться теоремой 5.4. $\square$

Доказанная теорема позволяет нам рассматривать пространство $Y^p_\alpha(\mathbb{R})$ при $\alpha \geqslant 1$ ($\alpha \neq 2k$) и пространтсво $X^p_\alpha(\mathbb{R})$ при $\alpha \geqslant 2$ ($\alpha \neq 2k+1$) как пространства обобщённых функций класса $H^p(\mathbb{R})$. Напомним, что $X^p_\alpha(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$, если $p < \frac{2}{\alpha} - 1$ и $\alpha \geqslant 1$. В этом случае пространство $X^p_\alpha(\mathbb{R})$ не может быть вложено в пространство обобщённых функций, поскольку $(X^p_\alpha(\mathbb{R}))^* = \{0\}$.

Замечание. Пусть k – натуральное число. Тогда

$$\sup\{\|\check{f}\|_{H^p} : f \in \mathfrak{Y}^p_{2k}(\mathbb{R}), \|f\|_{L^p} = 1\} = +\infty \tag{11}$$

при всех $p < \frac{1}{2k}$ и

$$\sup\left\{\|\check{f}\|_{H^p} : f \in \mathfrak{X}^p_{2k-1}(\mathbb{R}), \|f\|_{L^p} = 1\right\} = +\infty \tag{12}$$

при всех $p < \frac{1}{2k-1}$.

Доказательство. Зафиксируем ненулевую функцию

$$f = \sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{x - a_\kappa}{|x - a_\kappa|^{2k+1}} \in \mathfrak{Y}^p_{2k}(\mathbb{R}).$$

Положим $f_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{x - ta_\kappa}{|x-ta_\kappa|^{2k+1}}$, где $t > 0$. Ясно, что $f_t \in \mathfrak{Y}^p_{2k}(\mathbb{R})$ при всех $t > 0$ и $\|f_t\|^p_{L^p} = t^{1-2kp}\|f\|^p_{L^p}$. Заметим, что $\|\check{f}\|_{H^p} \geqslant C\|H\check{f}\|_{L^p}$, где H обозначает преобразование Гильберта. Ясно, что граничные значения интеграла Пуассона обобщённой функции $H\check{f}_t$ равны $\frac{2}{\pi} \sum\limits_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \dfrac{\log|x - ta_\kappa|}{(x - ta_\kappa)^{2k}}$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Таким образом,

$$\|\check{f}_t\|^p_{H^p} \geqslant Ct^{1-2kp} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{\log t}{(x-a_\kappa)^{2k}} + \sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{\log|x-a_\kappa|}{(x-a_\kappa)^{2k}} \right|^p dx.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|\check{f}_t\|_{H^p}}{\|f_t\|_{L^p}}=+\infty$, что доказывает равенство (11). Равенство (12) доказывается аналогично. $\square$

Определим оператор $T_\alpha:\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R})\to\mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R})$ формулой

$$T_\alpha\left(\sum_{\kappa=1}^{N}\lambda_\kappa\frac{x-a_\kappa}{|x-a_\kappa|^{\alpha+1}}\right)=\sum_{\kappa=1}^{N}\lambda_\kappa\frac{1}{|x-a_\kappa|^{\alpha}}.$$

Теорема 6.6. *Пусть* $p<\frac{1}{\alpha}$. *Тогда*

(i) $\|T_\alpha f\|_{L^p}\leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ *для всех* $f\in\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R})$, *если* $\alpha>1$ *и* $\alpha\neq 2k+1$ *при* $k=1,2,\dots$,

(ii) $\|T_\alpha^{-1}f\|_{L^p}\leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ *для всех* $f\in\mathfrak{X}^p_\alpha(\mathbb{R})$, *если* $\alpha>2$ *и* $\alpha\neq 2k+2$ *при* $k=1,2,\dots$.

Доказательство. Если число α не является целым, то нужные нам неравенства следуют из теоремы 6.5. Действительно, пусть $f\in\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R})$. Положим $g\stackrel{\text{def}}{=}T_\alpha f$. Легко видеть, что $\check{g}=C(\alpha)H\check{f}$, где H – преобразование Гильберта. Следовательно, $\|T_\alpha f\|_{L^p}\leqslant\|\check{g}\|_{H^p}\leqslant|C(\alpha)|C(p)\|f\|_{L^p}$ в силу теоремы 6.5. Так же, как в доказательстве теоремы 6.5, можно заметить, что неравенство $\|T_\alpha f\|_{L^p}\leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ для всех $f\in\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R})$ влечёт неравенство $\|T^{-1}_{\alpha+1}f\|_{L^p}\leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ для всех $f\in\mathfrak{X}^p_{\alpha+1}(\mathbb{R})$ в силу леммы 6.3. Кроме того, неравенство $\|T_\alpha^{-1}f\|_{L^p}\leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ для всех $f\in\mathfrak{X}^p_\alpha(\mathbb{R})$ влечёт неравенство $\|T_{\alpha+1}f\|_{L^p}\leqslant C(p)\|f\|_{L^p}$ для всех $f\in\mathfrak{Y}^p_{\alpha+1}(\mathbb{R})$ в силу леммы 6.4. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $\alpha=2$. Пусть $f=\sum\limits_{\kappa=1}^{N}\lambda_\kappa\frac{x-a_\kappa}{|x-a_\kappa|^3}\in\mathfrak{Y}^p_2(\mathbb{R})$. Положим $f^\flat\stackrel{\text{def}}{=}\sum\limits_{\kappa=1}^{N}\lambda_\kappa\delta'(x-a_\kappa)$, где δ' обозначает производную δ-функции. Заметим, что $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-1}*f^\flat(x)=\operatorname{Re}\widehat{f}(x+iy)$. Это равенство является правильным аналогом равенства (10) для $\alpha=2$. Теперь, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 6.5, получаем $\|f^\flat\|_{H^p}\leqslant C\|f\|_{L^p}$, откуда $\|T_2f\|_{L^p}\leqslant C\|f\|_{L^p}$ для всех $f\in\mathfrak{Y}^p_2(\mathbb{R})$. $\square$

Напомним, что F_α обозначает ветвь функции $(\frac{i}{z})^\alpha$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ такую, что $F_\alpha(1)=1$. Обозначим через Z^p_α замыкание в пространстве H^p множества всех функций вида $f=\sum\limits_{\kappa=1}^{N}\lambda_\kappa F_\alpha(x-a_\kappa)$ (где $a_\kappa,\lambda_\kappa\in\mathbb{R}$), принадлежащих пространству

H^p. Ясно, что $Z^p_\alpha = \{0\}$, если $\alpha p \geqslant 1$. Можно доказать, что $Z^p_\alpha = H^p$, если $\alpha < 1$ и $\alpha p < 1$.

Теорема 6.6 влечёт следующие неравенства для нецелых α:

(i) если $\alpha > 1$ и $\alpha \neq k+1$ при $k = 1, 2, \ldots$, то $\|\operatorname{Re} f\|_{L^p} \leqslant C(\alpha, p)\|\operatorname{Im} f\|_{L^p}$ для любой функции $f \in Z^p_\alpha$,

(ii) если $\alpha > 2$ и $\alpha \neq k+2$ при $k = 1, 2, \ldots$, то $\|\operatorname{Im} f\|_{L^p} \leqslant C(\alpha, p)\|\operatorname{Re} f\|_{L^p}$ для любой функции $f \in Z^p_\alpha$.

В конце этого параграфа приведём некоторые многомерные результаты.

Теорема 6.7. *Пусть $n \leqslant \alpha < n+1$ и $\frac{\alpha-1}{\alpha} < p < \frac{n}{\alpha}$. Тогда $\|\check{f}_j\|_{H^p} \leqslant C(p, \alpha, n)\|f\|_{L^p}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ для всех $f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Заметим, что $M\widehat{f_j} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ в силу теоремы 4.5. Остаётся воспользоваться теоремой 5.2. $\square$

Эта теорема позволяет вложить пространство $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathbb{R}^n$-значных обобщённых функций.

Определим оператор $T_\alpha : \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$T_\alpha\left(\sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{1}{|x-a_\kappa|^{\alpha+1}}(x-a_\kappa)\right) = \sum_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \frac{1}{|x-a_\kappa|^{\alpha}}.$$

Теорема 6.8. *Пусть $n < \alpha < n+1$ и $\frac{\alpha-1}{\alpha} < p < \frac{n}{\alpha}$. Тогда оператор $T_\alpha|_{\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)}$ продолжается до непрерывного оператора из пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Положим $g \stackrel{\text{def}}{=} T_\alpha f$. Легко проверить, что $\check{g} = C(\alpha, n)\sum\limits_{j=1}^{n} R_j \check{f}_j$, если $n < \alpha < n+1$. Следовательно,

$$\|T_\alpha f\|_{L^p} \leqslant \|\check{g}\|_{H^p} \leqslant |C(\alpha, n)| \sum_{j=1}^{n} R_j \|\check{f}_j\|_{H^p} \leqslant n|C(\alpha, n)|C(p, \alpha, n)\|f\|_{L^p}$$

в силу теоремы 6.7. $\square$

Замечание 1. Если $p < 1$ и оператор $T_\alpha|_{\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)}$ продолжается до непрерывного оператора из пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, то $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Если $p < 1$ и оператор $T^{-1}_\alpha|_{\mathfrak{X}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)}$ продолжается до непрерывного оператора из пространства $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, то $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Предположим, что $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Заметим, что оператор $T_\alpha : \mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ коммутирует со сдвигами и растяжениями. Тогда и продолженный оператор $T_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ коммутирует со сдвигами и с растяжениями. Операторы в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p < 1$, коммутирующие со сдвигами, были описаны Оберлином [11]. Из этого описания следует, что если такой оператор к тому же коммутирует и с растяжениями, то он скалярный. Следовательно, $T_\alpha(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j f_j$, и мы приходим к противоречию. Аналогичные рассуждения применимы и для оператора T_α^{-1}. $\square$

Замечание 2. Если $\alpha \leqslant n$ и $p < 1$, то оператор $T_\alpha|_{\mathfrak{Y}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)}$ не может быть продолжен до непрерывного оператора из пространства $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в пространство $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Если $\alpha < n$, то достаточно воспользоваться замечанием 1 после теоремы 6.8 и теоремой 2 в §1. Рассмотрим случай $\alpha = n$. Зафиксируем невырожденный замкнутый куб Q в пространстве $\mathbb{R}^n$ и ненулевую дискретную меру $\mu = \sum\limits_{\kappa=1}^{N} \lambda_\kappa \delta_{a_\kappa}$ с конечным носителем таким образом, чтобы мера μ была ортогональна всем полиномам степени не выше $n/p - n$, а кубы $a_\kappa + Q$ попарно не пересекались. Возьмём последовательность положительных мер $\{\nu_j\}_{j\geqslant 1}$, слабо сходящуюся к мере $\mathbb{1}_Q\, dx$ (где $\mathbb{1}_Q$ обозначает характеристическую функцию куба Q) и такую, что каждая мера ν_j имеет конечный носитель, лежащий в кубе Q. Предположим, что оператор $T_n|_{\mathfrak{Y}^p_n(\mathbb{R}^n)}$ может быть продолжен до непрерывного оператора из пространства $Y^p_n(\mathbb{R}^n)$ в пространство $X^p_n(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдётся константа C такая, что $\||x|^{-n} * \mu * \nu_j\|_{L^p} \leqslant C$ для всех $j \geqslant 1$, но этого не может быть, поскольку $\int\limits_Q |x-y|^{-n}\, dy = +\infty$ для всех $x \in Q$. $\square$

7. Заключительные замечания и нерешённые задачи

Пусть $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $\mathfrak{Y}_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n)$ линейную оболочку семейства функций $\{\frac{x_j - a_j}{|x-a|^{\alpha+1}}\}_{a\in\mathbb{R}^n}$. Положим $\mathfrak{Y}^p_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{Y}_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$. Пусть $Y^p_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n)$ обозначает замыкание множества $\mathfrak{Y}^p_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ясно, что $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ в том и только в том случае, когда $Y^p_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Поэтому достаточно рассмотреть только случай $j = 1$.

Вопрос о равенстве $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ (так же, как и вопрос о равенстве $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$) представляет интерес только, когда $\alpha \geqslant n$ и $p < 1$, см. §1.

Определим оператор $P_j : L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ следующим образом: $P_j(f_1, f_2, \dots, f_n) = f_j$. Снова мы будем рассматривать только случай $j = 1$.

Легко доказать следующее утверждение (см. следствие 3.5 в статье [2]).

Теорема 7.1. *Пусть $0 < p < 1$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $P_1(Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)) = L^p(\mathbb{R}^n)$,

(iii) *множество $P_1(Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n))$ плотно в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Теорема 7.2. *Пусть $n \leqslant \alpha < 2n+1$. Предположим, что*

$$p < \begin{cases} \dfrac{n-1}{\alpha-1}, & \alpha \leqslant n+2 \\ \dfrac{2n-\alpha+1}{\alpha-1}, & \alpha \geqslant n+2. \end{cases}$$

Тогда $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Схема доказательства. Шаг 1. Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathfrak{Y}^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$. Тогда L^p-значная функция $t \mapsto f(x+te)$ принадлежит пространству $\Lambda_{\frac{n}{p}-\alpha}(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}^n))$.

Шаг 2. Функция $t \mapsto f(x+te)$ интегрируема в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, если $\frac{n}{p} - \alpha > \frac{1}{p} - 1$, см. [15]. Отсюда следует, что $\int\limits_0^a f(x+te)\,dt \in Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$ при всех $a \in \mathbb{R}$, если $p < \frac{n-1}{\alpha-1}$.

Шаг 3. Пусть $F \in \mathfrak{X}^p_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n)$. Положим $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда $F(x + ae_1) - F(x) = \int\limits_0^a \frac{\partial F}{\partial x_1}(x+te)\,dt$. Ясно, что $\frac{\partial F}{\partial x_1} \in \mathfrak{Y}^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $F(x+ae_1) - F(x) \in Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, если $p < \frac{n-1}{\alpha-1}$.

Шаг 4. Если $p < \frac{n-1}{\alpha-1}$ и $X^p_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, то $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Остаётся применить теоремы 2 и 3, см. §1. □

Замечание 1. Равенство $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ очевидным образом влечёт: $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Обратное неверно.

Действительно, если $\frac{\alpha-1}{\alpha} \leqslant p < \frac{n-1}{\alpha-1}$, то $Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ в силу теоремы 4.2 и $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ в силу теоремы 7.2.

Замечание 2. Имеет место включение $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \supset Y^p_{\alpha+1,1}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \supset \operatorname{clos}_{L^p}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} Y^p_{\alpha+1,j}(\mathbb{R}^n)\Big)$.

Доказательство основано на равенстве $D_1(|x|^{-\alpha}) = -\alpha x_1 |x|^{-\alpha-2}$.

Замечание 3. Имеет место включение $\operatorname{clos}_{L^p}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} Y^p_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n)\Big) \supset X^p_{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство основано на тождестве

$$\sum_{j=1}^{n} D_j\Big(\frac{x_j}{|x|^{\alpha+1}}\Big) = \frac{n-\alpha-1}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Замечание 4. Из замечаний 2 и 3 следует, что $X^p_{\alpha+2}(\mathbb{R}^n) \subset X^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и

$$\operatorname{clos}_{L^p}\Big(\sum_{j=1}^{n} Y^p_{\alpha+2,j}(\mathbb{R}^n)\Big) \subset \operatorname{clos}_{L^p}\Big(\sum_{j=1}^{n} Y^p_{\alpha,j}(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Замечание 5. Имеет место включение $Y^p_{\alpha+2}(\mathbb{R}^n) \subset Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство основано на тождестве

$$\Delta(|x|^{-\alpha-1}x) = (\alpha+1)(\alpha+1-n)|x|^{-\alpha-3}x.$$

Пусть $\alpha \geqslant n$. Из теоремы 1 следует существование таких чисел $p(\alpha,n)$, $q(\alpha,n) \in [0, \frac{n}{\alpha}]$, что при $p \in (0, \frac{n}{\alpha})$

$$X^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow p < p(\alpha,n)$$

и

$$Y^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow p < q(\alpha,n).$$

Аналогично, существует число $q_0(\alpha,n) \in [0, \frac{n}{\alpha}]$ такое, что при $p \in (0, \frac{n}{\alpha})$ равенство $Y^p_{\alpha,1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ имеет место в том и только в том случае, когда $p < q_0(\alpha,n)$.

Задача 1. Найти $p(\alpha,n)$, $q(\alpha,n)$ и $q_0(\alpha,n)$.

Отметим, что

1. $q_0(\alpha,1)=q(\alpha,1)$.
2. $q_0(\alpha,n)\geqslant q(\alpha,n)$. Это следует из теоремы 7.1.
3. $p(\alpha,n)\geqslant\frac{2n}{\alpha}-1$ (теорема 3). В частности, $p(n,n)=1$.
4. $p(n+1,n)\leqslant q(n,n)$ (замечание 8.8 в статье [2]).
5. $q(\alpha,1)=0$ при $\alpha\geqslant 1$ (теорема 8).
6. $q(\alpha,n)\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}$ (теорема 4.2).
7. $q_0(\alpha+1,1)\leqslant p(\alpha,1)$ (замечание 2).
8. $p(\alpha+1,1)\leqslant q_0(\alpha,1)$ (замечание 3).
9. $q(\alpha+2,n)\leqslant q(\alpha,n)$ (замечание 5).

Следующий вопрос связан с теоремой 6.6.

Вопрос 1. Насколько существенны условия $\alpha\neq 2k+1$ и $\alpha\neq 2k+2$ в теореме 6.6? В частности, верно ли, что

$$\Big\|\sum_{\kappa=1}^{N}\frac{\lambda_\kappa\operatorname{sgn}x}{(x-a_k)^2}\Big\|_{L^p}\leqslant C(p)\Big\|\sum_{\kappa=1}^{N}\frac{\lambda_\kappa}{(x-a_k)^2}\Big\|_{L^p}$$

при $p<\frac12$, где $\lambda_\kappa, a_\kappa\in\mathbb{R}$?

Заметим, что противоположное неравенство (с другой константой $C(p)$)

$$\Big\|\sum_{\kappa=1}^{N}\frac{\lambda_\kappa}{(x-a_k)^2}\Big\|_{L^p}\leqslant C(p)\Big\|\sum_{\kappa=1}^{N}\frac{\lambda_\kappa\operatorname{sgn}x}{(x-a_k)^2}\Big\|_{L^p}$$

имеет место в силу теоремы 6.6 (i) для $\alpha=2$.

Вопрос 2. Что должно соответствовать теореме 2.1 в многомерном случае?

Наконец, сформулируем вопрос, относящийся к градиентам N-ого порядка $\nabla^N U$. Кальдерон и Зигмунд (см. [3]) доказали, что функция $|\nabla^N U|^p$ является субгармонической при $p\geqslant\frac{n-1}{n-1+N}$ для любой гармонической функции U от $n+1$ вещественной переменной.

Вопрос 3. Что является аналогом этого результата Кальдерона–Зигмунда для функций U, удовлетворяющих уравнению Дарбу $\Delta_\beta U=0$?

Теорема 4.1 отвечает на этот вопрос при $N=1$. Однако, уже при $N=2$ вопрос остаётся открытым даже в одномерном случае.

Литература

1. А. Б. Александров, *Аппроксимация рациональными функциями и аналог теоремы М. Рисса о сопряженных функциях для пространства L^p при $p \in (0,1)$.* — Мат. сб. **107 (149)**, No. 1 (1978), 3–19.
2. А. Б. Александров, П. П. Каргаев, *Классы Харди гармонических в полупространстве функций.* — Алгебра и анализ **5**, No. 2 (1993), 1–73.
3. A. P. Calderón, A. Zygmund, *On higher gradients of harmonic functions.* Studia Math. **24** (1964), 211–226.
4. C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables.* — Acta Math. **129**, Nos. 3–4 (1972), 137–193.
5. J. García-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1985).
6. М. Г. Голузина, *Об одной теореме единственности.* — Вестник СПбГУ Сер. 1, No. 1 (1987), 109–111.
7. В. П. Хавин, *Принцип неопределенности для одномерных потенциалов М. Рисса.* — ДАН СССР **264**, No. 3 (1982), 559–563.
8. V. P. Havin, B.Jöricke, *The uncertainty principle in harmonic analysis.* — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **28**, Springer-Verlag, Berlin (1994).
9. П. П. Каргаев, *О положительных решениях уравнения Дарбу $\Delta u = (\alpha-1)y^{-1}\partial u/\partial y$, $\alpha > 0$, в полупространстве $y > 0$.* — Алгебра и анализ **8**, No. 3 (1996), 125–150.
10. Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.* Наука, Москва (1971).
11. D. M. Oberlin, *Translation-invariant operators on $L^p(G)$, $0 < p < 1$. II.* — Canad. J. Math. **29**, No. 3 (1977), 626–630.
12. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Наука и техника, Минск (1987).
13. А. И. Сергеев, *Теоремы единственности и аппроксимация для одномерных потенциалов М. Рисса.* — Вестник СПбГУ, Сер. 1, No. 3 (1994), 45–53.
14. Е. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Мир, Москва (1973).
15. P. Turpin, L. Waelbroeck, *Intégration et fonctions holomorphes dans les espaces localement pseudo-convexes.* — C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **267** (1968), 160–162.

Aleksandrov A. B. Approximation by M. Riesz's kernels in L^p for $p < 1$.

Let $\alpha > 0$. We consider the linear span $\mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ of scalar Riesz's kernels $\{\frac{1}{|x-a|^\alpha}\}_{a\in\mathbb{R}^n}$ and the linear span $\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ of vector Riesz's kernels $\{\frac{1}{|x-a|^{\alpha+1}}(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}^n}$. We deal with the following questions.

1. When is the intersection $\mathfrak{X}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$?

2. When is the intersection $\mathfrak{Y}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dense in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$?

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 июня 2004 г.