Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

А. В. Васин

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЯМИ КЛАССА ЛИПШИЦА

§1. Введение

В своей работе 1979 г. [1] Дынькин дал описание интерполяционных множеств для аналитических классов Липшица A_α. Оказалось, что граничными интерполяционными множествами $E \subset \mathbb{T}$ являются пористые множества. Условие пористости впервые появилось в работе Коточигова [2] и означает следующее: для любой дуги $I \subset \mathbb{T}$ найдется соизмеримая с ней дуга $J \subset I$, свободная от точек множества E. Если необходимость условия пористости проявляется непосредственно ввиду неравенства Иенсена, то доказательство достаточности использует так называемое неравенство Дынькина, эквивалентное условию пористости: $\exists\, c,\ \alpha > 0$ $\forall I \subset \mathbb{T}$

$$\sum |J_k|^{1-\alpha} \leqslant c|I|^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где сумма берется по дугам J_k, смежным с $E : \cup J_k = I \setminus E$ и дуги J_k попарно не пересекаются. Неравенство (1) дает возможность определить внешнюю функцию $g \in A_\alpha$ с нулями на E и, кроме того, такую, что $\log|g| \in \mathrm{BMO}$. Во всех известных доказательствах достаточности внешняя функция с этими свойствами играет определяющую роль.

При распространении результатов об интерполяции на слабые модули непрерывности (такие как $\omega(x) = (\log\dfrac{1}{x})^{-1}$) оказалось, что подходящих аналогов для необходимых и близких к ним достаточных условий нет.

В настоящей заметке мы предъявим необходимое условие, которое по форме представляет собой неравенство Дынькина.

§2. Основной результат

Пусть $\Lambda_\omega(G)$ – пространство функций класса Липшица с модулем непрерывности ω, $\|f\|_\omega = \inf\{c : |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \omega(|z_1 - z_2| :$

$z_1, z_2 \in G\}$. Модуль ω считаем вогнутым возрастающим, регулярным. $\mathbb{D}$ – единичный круг, $\mathbb{T}$ – единичная окружность, для множества $E \subset \mathbb{T}$ пусть $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, E)$. $A_\omega(\mathbb{D})$ – подпространство в $\Lambda_\omega(\mathbb{D})$, состоящее из аналитических функций.

Определение. *Множество $E \subset \mathbb{T}$ интерполяционное для ω, если*

$$A_\omega(\mathbb{D})\Big|_E = \Lambda_\omega(E).$$

Теорема. *Пусть E – интерполяционное для ω множество, тогда найдутся такие c, $\alpha > 0$, что*

$$\sum \frac{|I_k|}{\omega^\alpha(I_k)} \leqslant c \frac{|I|}{\omega^\alpha(I)}, \tag{2}$$

где $I \setminus E = \cup I_k$.

При $\omega(x) = x^\beta$ получим неравенство Дынькина. Для слабого модуля непрерывности условие (2) по форме сильнее, чем A^1-условие Макенхаупта [3] для веса $\dfrac{1}{\omega^\alpha(\rho)}$, но на самом деле эквивалентно ему.

Доказательство (следуя [1, с. 116]). Пусть K – область, ограниченная дугой $I \subset \mathbb{T}$ и геодезической $J \subset \mathbb{D}$, точка z_0 такова, что

$$\int_I d\nu_{z_0} = \int_J d\nu_{z_0}$$

для гармонической меры на $\partial K = I \cup J$ относительно z_0 (z_0 – "центр" области K). Оценим норму функции $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ в $\Lambda_\omega(E)$:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_0|\,|z_2 - z_0|} \leqslant c \frac{\omega(|z_1 - z_2|)}{|I|\omega(|I|)},$$

откуда $\|f\|_\omega \leqslant c/(|I|\omega(I))$. Пусть $h \in A_\omega(\mathbb{D})$ интерполирует f, тогда $\|h\|_\omega \leqslant c/(|I|\omega(I))$. Определим $g(z) = 1 - (z - z_0)h$, тогда функция g равна 0 на E и $g(z_0) = 1$, кроме того $g(z) \leqslant c_1 \dfrac{\omega(\rho(z))}{\omega(I)}$ на I и $|g(z)| \leqslant c_2$ на J. Функция $\log|g|$ субгармоническая в K, поэтому

$$0 = \log|g(z_0)| \leqslant \int_{\partial K} \log|g| d\nu_{z_0} = \int_I + \int_J .$$

Оценивая, выводим

$$0 \leqslant \log c_2 \cdot |\nu_{z_0}(J)| + \sum_k \int\limits_{I_k} \log c_1 \frac{\omega(\rho)}{\omega(I)} d|\nu_{z_0}|$$

$$\leqslant \log c_2 \cdot |\nu_{z_0}(J)| + \sum_k \log c_1 \frac{\omega(I_k)}{\omega(I)} \big|\nu_{z_0}(I_k)\big|.$$

На дуге I из геометрических соображений

$$\big|\nu_{z_0}(I_k)\big| \asymp \frac{|I_k|}{|I|},$$

поэтому

$$\log \frac{1}{c} \leqslant \sum \log \frac{\omega(I_k)}{\omega(I)} \cdot \frac{|I_k|}{|I|},$$

что и дает логарифмическую оценку вида BLO:

$$\frac{1}{|I|} \sum \log \frac{1}{\omega(I_k)} I_k \leqslant c + \log \frac{1}{\omega(I)}. \tag{3}$$

Из неравенства (3) получим, что

$$\omega(I) \leqslant c\omega(\widetilde{I}), \tag{4}$$

где $\widetilde{I}$ – самая большая из свободных дуг на I. Это и есть условие пористости, когда $\omega(x) = x^\beta$. В общей ситуации из (3) следует, что $\log \dfrac{1}{\omega(\rho)} \in$BLO (BLO – класс функций ограниченной нижней осцилляции), а по теореме Джона–Ниренберга [3] для некоторого $\alpha > 0$ получим A^1-условие Макенхаупта для $\dfrac{1}{\omega^\alpha(\rho)}$:

$$\sum \frac{|I_k|}{\omega^\alpha(I_k)} \leqslant c \frac{|I|}{\omega^\alpha(\widetilde{I})},$$

где $\widetilde{I}$ – наибольшая свободная дуга в I. Окончательный вид неравенства (2) получим, применяя (4).

Автор надеется, что полученное условие является близким к достаточному, что проверяется, по крайней мере, для ядра Коши $\dfrac{1}{z - z_0}$.

Автор выражает благодарность А. М. Коточигову за полезные консультации.

Литература

1. Е. М. Дынькин, *Множества свободной интерполяции для классов Гельдера.* — Мат. сборник **109(151)**, No. 1(5) (1979), 107–128.
3. А. М. Коточигов, *Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **30** (1972), 167–169.
3. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М. (1984).

Vasin A. V. On a condition necessary for interpolation by functions in the Lipschitz class.

For the weak modulus of continuity and the corresponding Lipschitz class, a necessary condition for interpolation by analytic functions is given in the form of Dyn'kin's inequality.

С.-Петербургский государственный университет водных коммуникаций

Поступило 25 октября 2004 г.