Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

И. В. Виденский

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ РЯДОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$ последовательность точек единичного круга $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, занумерованных так, что $|z_k| \leqslant |z_{k+1}|$. Обозначим

$$b(z,\zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z} \cdot \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}; \quad B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} b(z, z_k)$$

произведение Бляшке с нулями в точках $\{z_k\}_{k=1}^n$. Процесс ортогонализации рациональных дробей $\{\frac{1}{1-\bar{z}_k z}\}_{k\geqslant 1}$ (если точка z_k встречается в последовательности несколько раз, то рассматриваются степени соответствующей дроби) на единичной окружности по отношению к нормированной мере Лебега приводит к системе функций Такенака–Мальмквиста [1]

$$\varphi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|z_n|^2}}{1-\bar{z}_n z} B_{n-1}(z).$$

Если рациональные дроби $\{\frac{1}{1-\bar{z}_k z}\}$ полны в пространстве Харди H^2, то есть расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) = \infty$, то функции $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ образуют ортонормированный базис в пространстве H^2. Если же выполнено условие Бляшке $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < \infty$, то в единичном круге сходится бесконечное произведение Бляшке $B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} b(z, z_k)$ и последовательность $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ образует ортонормированный базис в пространстве $H^2 \ominus BH^2$. Ряды по системе функций $\{\varphi_k\}$ являются естественным обобщением степенных рядов и исследовались в различных направлениях [2, 3, 4, 5].

Тауберова теорема для степенных рядов ([6, гл. 3]) утверждает, что условия $a_n = o(1/n)$ и существование радиального граничного значения в единице функции $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ достаточно для

Работа частично поддержана грантами РФФИ N02-01-00267 и "Ведущие научные школы" N 2266.2003.1.

сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Аналог теоремы Таубера для многочленов, ортогональных на окружности относительно некоторой меры, доказан в [7]. В настоящей заметке мы получим обобщение теоремы Таубера для рядов по системе $\{\varphi_n\}$.

Обозначим

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-|z_k|}.$$

Теорема. *Пусть* $a_k = o\big(\frac{1}{\sqrt{1-|z_k|\tau_k}}\big)$, $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$. *Тогда функция*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

принадлежит пространству H^2 *и существование радиального граничного значения функции* $F(z)$ *в точке* $e^{i\theta_0}$

$$\lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta_0}) = F(e^{i\theta_0})$$

эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(e^{i\theta_0}) = F(e^{i\theta_0})$$

к этому значению.

Доказательство. Пусть

$$S_n(e^{i\theta_0}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(e^{i\theta_0}).$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |F(re^{i\theta_0}) - S_n(e^{i\theta_0})| &\leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \big(\varphi_k(re^{i\theta_0}) - \varphi_k(e^{i\theta_0})\big) \right| \\ &+ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \varphi_k(re^{i\theta_0}) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| |\varphi_k(re^{i\theta_0}) - \varphi_k(e^{i\theta_0})| \\ &+ \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \big|\varphi_k(re^{i\theta_0})\big|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Положим $B_{k,j} = \prod_{l=1, l\neq j}^{k} b(z, z_l)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, тогда

$$|\varphi_k'(z)| = \sqrt{1-|z_k|^2}\bigg|\frac{\bar z_k}{(1-\bar z_k z)^2}B_{k-1}(z) + \frac{1}{1-\bar z_k z}\sum_{j=1}^{k-1} B_{k-1,j}(z)\frac{1-|z_j|^2}{(1-\bar z_j z)^2}\bigg| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-|z_k|}}\bigg(\frac{1}{1-|z_k|} + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{\sqrt{2}}{1-|z_j|}\bigg) < \frac{2\tau_k}{\sqrt{1-|z_k|}}.$$

Следовательно,

$$|\varphi_k(re^{i\theta_0}) - \varphi_k(e^{i\theta_0})| < \frac{2\tau_k}{\sqrt{1-|z_k|}}(1-r). \tag{2}$$

Для оценки второй суммы в (1) заметим, что воспроизводящее ядро в пространстве $H^2 \ominus B_m H^2$ вычисляется по формулам

$$K(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\varphi_k(\zeta)}\varphi_k(z), \quad z, \zeta \in \mathbb{D},$$

$$K(z,\zeta) = \frac{1 - B_m(z)\overline{B_m(\zeta)}}{1 - z\bar\zeta}.$$

Полагая $z = \zeta$, получим для любого натурального m:

$$\sum_{k=1}^{m} |\varphi_k(z)|^2 = \frac{1-|B_m(z)|^2}{1-|z|^2} < \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{3}$$

Продолжим неравенство (1), воспользовавшись оценками (2) и (3):

$$|F(re^{i\theta_0}) - S_n(e^{i\theta_0})| < 2\bigg(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\frac{\tau_k}{\sqrt{1-|z_k|}}\bigg)(1-r) + \frac{1}{\sqrt{1-r}}\bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^2\bigg)^{1/2} = \sigma_1(r) + \sigma_2(r). \tag{4}$$

Выберем r_n из условия $(1-r_n) = \frac{1}{\tau_n}$, тогда $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Рассмотрим треугольную матрицу суммирования

$$b_{nk} = \frac{1}{\tau_n(1-|z_k|)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad b_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad k > n.$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} b_{nk} = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0$, следовательно, матрица (b_{nk}) регулярная ([6, гл. 3]). Так как $|a_k|\tau_k\sqrt{1-|z_k|} = o(1)$, то

$$\sigma_1(r_n) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|\tau_k\sqrt{1-|z_k|}}{1-|z_k|}\right)\cdot\frac{1}{\tau_n}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} b_{nk}(|a_k|\tau_k\sqrt{1-|z_k|}) = o(1).$$

Оценим

$$\sigma_2^2(r_n) = \tau_n \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 = \tau_n o(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\tau_k^2(1-|z_k|)}.$$

Так как $\tau_k = \tau_{k-1} + \frac{1}{1-|z_k|}$, то

$$\frac{1}{\tau_k^2(1-|z_k|)} < \frac{1}{\tau_k\tau_{k-1}(1-|z_k|)} = \frac{1}{\tau_{k-1}} - \frac{1}{\tau_k}.$$

Значит

$$\sigma_2^2(r_n) < o(1) \quad \tau_n \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_{k-1}} - \frac{1}{\tau_k}\right) = o(1).$$

Если $r_n < r < r_{n+1}$, то $|F(re^{i\theta_0}) - S_n(e^{i\theta_0})| < \sigma_1(r_n) + \sigma_2(r_{n+1})$. Следовательно, условие $\lim_{r\to1}|F(re^{i\theta_0}) - F(e^{e\theta_0})| = 0$ эквивалентно условию $\lim_{n\to\infty} S_n(e^{i\theta_0}) = F(e^{e\theta_0})$.

Замечания. В условиях теоремы у функции $F(z)$ существует угловое граничное значение в точке $e^{i\theta_0}$:

$$\lim_{r\to e^{i\theta_0}} F(z) = F(e^{i\theta_0}),$$

где z стремится к $e^{i\theta_0}$, оставаясь в угле с вершиной в $e^{i\theta_0}$, то есть $|z - e^{i\theta_0}| \leqslant c(1-|z|)$ при некотором $c > 1$. В доказательстве изменится лишь оценка (2):

$$|\varphi_k(z) - \varphi_k(e^{i\theta_0})| < \frac{2\tau_k}{\sqrt{1-|z_k|}}|1-z| \leqslant \frac{2c\tau_k}{\sqrt{1-|z_k|}}(1-|z|).$$

В приложениях рядов по системе $\{\varphi_k\}$ [5] часто предполагают, что последовательность $\{z_k\}$ лежит в круге меньшего радиуса $|z_k| < R < 1$. При таком предположении условие теоремы превращается в условие классической теоремы Таубера $a_n = o(1/n)$.

Литература

1. Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* М., ИЛ (1961).
2. Г. Ц. Тумаркин, *Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов.* — Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., **14**, No. 1 (1961), 9–31.
3. М. М. Джрбашян, *Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами.* — Изв. АН АрмССР. Сер. матем. **2**, N 1 (1965), 3–51.
4. M. M. Djrbashian, *A survey on the theory of orthogonal systems and some open problems.* Orthogonal Polynomials. Theory and Practice (P. Nevai, ed.), Kluwer (1990), 135–146.
5. A. Bultheel, P. Gonzalez–Vera, E. Hendriksen, O. Njastad, *Orthogonal Rational Functions.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Math. 5. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1999).
6. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* т. I. М. Мир (1965).
7. Я. Л. Геронимус, *Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке.* М. Физматгиз (1958).

Videnskii I. V. A Tauberian theorem for orthogonal series of rational functions.

The so-called Takenaka–Malmquist system consist of a sequence of functions obtained from the sequence of rational fractions by applying the Gram–Schmidt orthogonalization procedure with respect to the Lesbegue measure on the unite circle. A Tauberian theorem for series with respect to the Takenaka–Malmquist system is proved.

С.-Петербургский государственный электротехнический университет

E-mail: ilya@viden.pdmi.ras.ru

Поступило 10 ноября 2004 г.