Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

М. Ф. Гамаль

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ $C_{\cdot 0}$-СЖАТИЙ: ГИПЕРИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И СПЛЕТАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Введение

В работе рассматривается один класс $C_{\cdot 0}$-сжатий, являющийся обобщением класса $C_{\cdot 0}$-сжатий с конечными дефектами. Как известно, для $C_{\cdot 0}$-сжатий T с $d_T < \infty$ была построена жорданова модель [1]. С использованием жордановой модели была описана решетка гиперинвариантных подпространств такого сжатия T: эта решетка изоморфна решетке гиперинвариантных подпространств его жордановой модели и порождается пространствами вида $\operatorname{Ker}\varphi(T)$ и $\operatorname{Ran}\varphi(T)$, где $\varphi \in H^\infty$ [2,3]. Далее, жорданова модель была построена для более широкого класса $C_{\cdot 0}$-сжатий, чем $C_{\cdot 0}$-сжатия с конечными дефектами [4]. В этой работе с использованием жордановой модели проверяется, что результаты работ [2,3] о гиперинвариантных пространствах верны и для таких сжатий.

Рассматривается также следующий вопрос. Для достаточно широкого класса $C_{\cdot 0}$-сжатий известно, что если одно из них является квазиаффинным преобразованием другого, то деформация, сплетающая эти сжатия, дает изоморфизм решеток их инвариантных подпространств. Однако, даже если эти сжатия квазиподобны, обратный изоморфизм может не задаваться никакой сплетающей деформацией [4]. Но, как будет показано в этой работе, он может быть построен при помощи семейства сплетающих операторов, согласованных с исходной деформацией.

Также для $C_{\cdot 0}$-сжатий, имеющих жорданову модель, вычисляется характеристика disc, связанная с решеткой инвариантных

Работа частично поддержана грантами РФФИ N02-01-00264 и “Ведущие научные школы” N 2266.2003.1.

подпространств и применяющаяся в теории управления. О характеристике disc см. [5].

Все рассматриваемые гильбертовы пространства предполагаются *сепарабельными*. Оператором здесь всегда называется линейное ограниченное отображение, подпространством — линейное замкнутое подмножество гильбертова пространства. Оператор, действующий между гильбертовыми пространствами, называется *деформацией*, если он имеет нулевое ядро и плотный образ. Символами Ker и Ran обозначаются ядро и замыкание образа оператора.

Пусть T — оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$. Символом $\operatorname{Lat} T$ обозначается *решетка инвариантных подпространств* оператора T: $\operatorname{Lat} T = \{E \subset \mathcal{H} : TE \subset E\}$. Символом $\mu_T = \mu(T)$ обозначается *кратность спектра* оператора T, т.е. наименьшая размерность воспроизводящего подпространства: $\mu_T = \min\{\dim E : \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n E = \mathcal{H}\}$.

Оператор T называется *сжатием*, если $\|T\| \leqslant 1$. Сжатие T называется *абсолютно непрерывным*, если его унитарная часть абсолютно непрерывна или действует на пространстве $\{0\}$. Для абсолютно непрерывного сжатия T определено функциональное исчисление на пространстве Харди H^∞ в единичном круге [6, III.2]. Абсолютно непрерывное сжатие T принадлежит *классу* C_0 (T является C_0-сжатием, $T \in C_0$), если существует функция $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$, такая, что $\varphi(T) = \mathbb{O}$. Минимальным аннулятором C_0-сжатия T называется внутренняя функция φ, $\varphi \in H^\infty$, такая, что $\varphi(T) = \mathbb{O}$ и $\psi/\varphi \in H^\infty$ для любой функции ψ из H^∞, для которой $\psi(T) = \mathbb{O}$. О C_0-сжатиях см. [6,7].

Наибольший общий внутренний делитель семейства функций $\{f_i\}_i$, $f_i \in H^\infty$, обозначается символом $\bigwedge_i f_i$.

Пусть $1 \leqslant \nu \leqslant \infty$, положим $H^2_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} \oplus H^2$. *Односторонний сдвиг* S_ν *кратности* ν — это оператор умножения на независимую переменную z в пространстве H^2_ν, $\mu(S_\nu) = \nu$.

Пусть T, R — операторы в пространствах $\mathcal{H}$ и, соответственно, $\mathcal{K}$. Следуя [7], символом $\mathcal{I}(T, R)$ будем обозначать множество операторов, действующих из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$ и сплетающих T и R:

$$\mathcal{I}(T, R) = \{X : \mathcal{H} \to \mathcal{K}, \quad XT = RX\}.$$

Оператор T называется *квазиаффинным преобразованием* оператора R, если множество $\mathcal{I}(T, R)$ содержит деформацию, обозначение: $T \prec R$. Операторы T и R называются *квазиподобными*, если $T \prec R$ и $R \prec T$, обозначение: $T \sim R$ [6, гл. II; 7, гл. I]. Пусть $\mathfrak{X} \subset \mathcal{I}(T, R)$, E – подпространство пространства $\mathcal{H}$. Положим

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{X}} = \bigvee_{X \in \mathfrak{X}} XE.$$

Пусть $\theta \in H^\infty$, θ – внутренняя функция. Оператор T_θ действует в пространстве $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$ по формуле $T_\theta f = P_\theta z f$, $f \in K_\theta$, где P_θ – ортогональный проектор из H^2 на K_θ. *Жордановым оператором класса* C_0 называется оператор вида $J_0 = \sum_{n=1}^\infty \oplus T_{\theta_n}$, где $\theta_n \in H^\infty$, θ_n внутренние, θ_{n+1} делит θ_n для всех $n \geqslant 1$; возможно, $\theta_n \equiv 1$ для n, больших некоторого n_0. Всякое C_0-сжатие квазиподобно единственному жорданову оператору класса C_0, называемому его *жордановой моделью* [7, III.5]. Пусть C_0-сжатие T имеет жорданову модель $J_0 = \sum_{n=1}^\infty \oplus T_{\theta_n}$, говорят, что C_0-сжатие T обладает свойством (P), если $\bigwedge_{n=1}^\infty \theta_n = 1$ [7, VII.1.9]. Кратность спектра $\mu(J_0)$ равна числу слагаемых в сумме $J_0 = \sum_{n=1}^\infty \oplus T_{\theta_n}$, отличных от $\mathbb{O}$, то есть числу функций θ_n, отличных от тождественной единицы.

Сжатие T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ принадлежит *классу* $C_{\cdot 0}$ (T является $C_{\cdot 0}$-сжатием, $T \in C_{\cdot 0}$), если $T^{*n} x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для любого x из $\mathcal{H}$. Сжатие T принадлежит *классу* C_{00} (T является C_{00}-сжатием, $T \in C_{00}$), если $T \in C_{\cdot 0}$ и $T^* \in C_{\cdot 0}$. Сжатие T принадлежит *классу* C_{10}, если $T \in C_{\cdot 0}$ и для любого $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, последовательность $\{T^n x\}_{n=1}^\infty$ не стремится к нулю.

Дефектами сжатия T называются числа $d_T = \dim(I - T^*T)\mathcal{H}$ и $d_{T^*} = \dim(I - TT^*)\mathcal{H}$. Если $T \in C_{\cdot 0}$, то $d_T \leqslant d_{T^*}$.

Всякое сжатие T класса $C_{\cdot 0}$ имеет триангуляцию вида

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}, \tag{*}$$

где T_0 — сжатие класса C_{00}, T_1 — сжатие класса C_{10} [6, II.4].

Будем использовать обозначения из [4]:

$C_{\cdot 0}(C_0, \mathrm{fin}) = \{T : T$ – сжатие класса $C_{\cdot 0}$, $T_0 \in C_0$ и $T_1 \prec S_k$, $k < \infty$, где T_0 и T_1 определены в $(*)\}$,

$C_{\cdot 0}(C_0\,(\mathrm{P}), \mathrm{fin}) = \{T \in C_{\cdot 0}(C_0, \mathrm{fin})$: T_0 обладает свойством (P)$\}$.

Теорема 1.1. [4, §4]. *Пусть $T \in C_{\cdot 0}(C_0, \mathrm{fin})$, T_0 и T_1 определены в $(*)$, $T_1 \prec S_k$, $k < \infty$. Тогда существуют операторы $X_1, X_2 \in \mathcal{I}(T, R)$, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}(R, T)$ и функции $\delta_1, \delta_2 \in H^\infty$ такие, что $\delta_1 \wedge \delta_2 = 1$, $X_i Y_i = \delta_i(T_0 \oplus S_k)$, $Y_i X_i = \delta_i(T)$, $i = 1, 2$.*

Теорема 1.2 [4, теоремы 0.1 и 0.2]. *Пусть $T \in C_{\cdot 0}(C_0\,(\mathrm{P}), \mathrm{fin})$, T_0 и T_1 определены в $(*)$, J_0 — жорданова модель C_0-сжатия T_0, $T_1 \prec S_k$, $k < \infty$, $J = J_0 \oplus S_k$. Тогда $T \prec J$ и для любой деформации X, $X \in \mathcal{I}(T, J)$, отображение $\mathcal{J}_X : \operatorname{Lat} T \to \operatorname{Lat} R$ является изоморфизмом решеток инвариантных подпространств.*

Если T_0 – $C_{\cdot 0}$-сжатие, $1 \leqslant \nu \leqslant \infty$, то $\mu(T_0 \oplus S_\nu) = \mu(T_0) + \nu$ [8]. Из теоремы 1.1 следует, что если $T \in C_{\cdot 0}(C_0, \mathrm{fin})$, то $\mu(T) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mu(T_0) < \infty$.

§2. Гиперинвариантные подпростанства

В этом параграфе сначала будут доказаны общие утверждения о гиперинвариантных подпространствах; результаты о $C_{\cdot 0}$-сжатиях получатся в качестве следствий.

Пусть T – оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Символом $\{T\}'$ обозначается *коммутант* оператора T – это множество всех операторов в пространстве $\mathcal{H}$, перестановочных с T, он является алгеброй, замкнутой в слабой операторной топологии. *Решетка гиперинвариантных подпространств* $\operatorname{Lat}\{T\}'$ оператора T – это множество всех подпространств пространства $\mathcal{H}$, инвариантных для всех операторов из $\{T\}'$:

$$\operatorname{Lat}\{T\}' = \{E \subset \mathcal{H} : \forall A \in \{T\}' \; AE \subset E\}.$$

Если T – абсолютно непрерывное сжатие, то для любой функции φ из H^∞ имеем: $\operatorname{Ran}\varphi(T)$, $\operatorname{Ker}\varphi(T) \in \operatorname{Lat}\{T\}'$. Будем называть решетку $\operatorname{Lat}\{T\}'$ "*простой*," если она порождается как (полная) решетка пространствами вида $\operatorname{Ran}\varphi(T)$, $\operatorname{Ker}\varphi(T)$, где $\varphi \in H^\infty$.

Лемма 1 [6, II.5.1; 7, IV.2.7; 2]. *Квазиподобие сохраняет нетривиальность решеток гиперинвариантных подпространств. Именно, если операторы T и R квазиподобны, $E \in \operatorname{Lat}\{T\}'$, $E \neq \{0\}, \mathcal{H}$, то $\mathcal{J}_{\mathcal{I}(T,R)}E \neq \{0\}, \mathcal{K}$.*

Лемма 2. *Пусть T, R – абсолютно непрерывные сжатия, $\{\delta_i\}_i \subset H^\infty$, $\bigwedge\limits_i \delta_i = 1$, $\{X_i\}_i \subset \mathcal{I}(T, R)$, $\{Y_i\}_i \subset \mathcal{I}(R, T)$, $X_i Y_i = \delta_i(R)$, $Y_i X_i = \delta_i(T)$. Тогда $\mathcal{J}_{\{X_i\}_i} = \mathcal{J}_{\mathcal{I}(T,R)}$, $\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} = \mathcal{J}_{\mathcal{I}(R,T)}$,*

$$\mathcal{J}_{\{X_i\}_i}\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} = \mathrm{id}_{\operatorname{Lat}\{R\}'}, \mathcal{J}_{\{Y_i\}_i}\mathcal{J}_{\{X_i\}_i} = \mathrm{id}_{\operatorname{Lat}\{T\}'}.$$

Доказательство. Пусть $E \in \operatorname{Lat}\{T\}'$. Имеем:

$$\mathcal{J}_{\{X_i\}_i}\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i}E = \bigvee_{i,j} Y_j X_i E \supset \bigvee_i Y_i X_i E = \bigvee_i \delta_i(T)E = \bigvee_i \delta_i(T|_E)E = E$$

(последнее равенство верно, так как $\bigwedge_i \delta_i = 1$, см. [9], [10] или [11]). С другой стороны,

$$\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i}\mathcal{J}_{\{X_i\}_i}E \subset \mathcal{J}_{\mathcal{I}(R,T)}\mathcal{J}_{\mathcal{I}(T,R)}E = \bigvee_{\substack{Y\in\mathcal{I}(R,T)\\ X\in\mathcal{I}(T,R)}} YXE \subset E,$$

так как $YX \in \{T\}'$. Итак, $\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i}\mathcal{J}_{\{X_i\}_i} = \mathcal{J}_{\mathcal{I}(R,T)}\mathcal{J}_{\mathcal{I}(T,R)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Lat}\{T\}'}$.

Теперь покажем, что $\mathcal{J}_{\{X_i\}_i}E = \mathcal{J}_{\mathcal{I}(T,R)}E$ для любого $E \in \mathrm{Lat}\{T\}'$. Положим $F = \mathcal{J}_{\{X_i\}_i}E$ и $\mathcal{F} = \mathcal{J}_{\mathcal{I}(T,R)}E$. Очевидно, что $F \subset \mathcal{F}$ и $E = \mathcal{J}_{\mathcal{I}(R,T)}\mathcal{F}$. Поэтому

$$F = \mathcal{J}_{\{X_i\}_i}\mathcal{J}_{\mathcal{I}(R,T)}\mathcal{F} = \bigvee_i \bigvee_{Y\in\mathcal{I}(R,T)} X_iY\mathcal{F} \supset \bigvee_i X_iY_i\mathcal{F} = \mathcal{F}. \quad \bullet$$

Лемма 3 (см. [3]). *Пусть T, R – абсолютно непрерывные сжатия, $\mathfrak{X} \subset \mathcal{I}(T,R)$, и пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathfrak{X}} : \mathrm{Lat}\{T\}' \to \mathrm{Lat}\{R\}'$ – изоморфизм решеток. Тогда $\mathcal{J}\,\mathrm{Ran}\,\varphi(T) = \mathrm{Ran}\,\varphi(R)$, $\mathcal{J}\,\mathrm{Ker}\,\varphi(T) = \mathrm{Ker}\,\varphi(R)$ для любой функции φ из H^∞.*

Следствие. *В условиях леммы 3 решетки $\mathrm{Lat}\{T\}'$ и $\mathrm{Lat}\{R\}'$ являются "простыми" или нет одновременно.*

Доказательство леммы 3. Пусть $\varphi \in H^\infty$. Утверждения $\mathcal{J}\,\mathrm{Ran}\,\varphi(T) = \mathrm{Ran}\,\varphi(R)$ и $\mathcal{J}\,\mathrm{Ker}\,\varphi(T) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi(R)$ легко следуют из сплетающих свойств операторов из $\mathfrak{X}$. Далее, так как $\mathrm{Ker}\,\varphi(R) \in \mathrm{Lat}\{R\}'$, а $\mathcal{J}$ – изоморфизм, то существует подпространство $E \in \mathrm{Lat}\{T\}'$ такое, что $\mathcal{J}E = \mathrm{Ker}\,\varphi(R)$. Так как $\mathcal{J}\,\mathrm{Ker}\,\varphi(T) \subset \mathcal{J}E$, то $\mathrm{Ker}\,\varphi(T) \subset E$. С другой стороны, $\mathrm{clos}\,\varphi(T)E \in \mathrm{Lat}\{T\}'$ и $\mathcal{J}\,\mathrm{clos}\,\varphi(T)E = \bigvee_{X\in\mathfrak{X}} X\varphi(T)E = \bigvee_{X\in\mathfrak{X}} \varphi(R)XE = \mathrm{clos}\,\varphi(R)\mathcal{J}E = \mathrm{clos}\,\varphi(R)\,\mathrm{Ker}\,\varphi(R) = \{0\}$, откуда $\mathrm{clos}\,\varphi(T)E = \{0\}$, т.е. $E \subset \mathrm{Ker}\,\varphi(T)$. $\bullet$

Доказательство следствия. Сначала отметим тот очевидный факт, что $\mathcal{J}^{-1}\,\mathrm{Ran}\,\varphi(R) = \mathrm{Ran}\,\varphi(T)$ и $\mathcal{J}^{-1}\,\mathrm{Ker}\,\varphi(R) = \mathrm{Ker}\,\varphi(T)$ для любой функции φ из H^∞. Пусть решетка $\mathrm{Lat}\{T\}'$ – "простая". Это значит, что любой элемент E решетки $\mathrm{Lat}\{T\}'$ получается из элементов вида $\mathrm{Ran}\,\varphi(T)$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi(T)$ под действием операций взятия верхней и нижней граней (замыкания линейной оболочки и пересечения). Пусть $F \in \mathrm{Lat}\{R\}'$. Так как $\mathcal{J}$ – изоморфизм, то существует пространство $E \in \mathrm{Lat}\{T\}'$ такое, что $F = \mathcal{J}E$. Так как $\mathcal{J}$ сохраняет операции взятия верхней и нижней граней и переводит элементы вида $\mathrm{Ran}\,\varphi(T)$, $\mathrm{Ker}\,\varphi(T)$ в элементы вида $\mathrm{Ran}\,\varphi(R)$,

$\operatorname{Ker}\varphi(R)$, заключаем, что F принадлежит решетке, порожденной элементами вида $\operatorname{Ran}\varphi(R)$, $\operatorname{Ker}\varphi(R)$. Итак, если решетка $\operatorname{Lat}\{T\}'$ – “простая”, то решетка $\operatorname{Lat}\{R\}'$ – “простая”. Для доказательства обратного утверждения надо заменить $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J}^{-1}$. $\bullet$

Лемма 4. *Пусть T, R – абсолютно непрерывные сжатия, пусть $\operatorname{Lat}\{T\}'$ и $\operatorname{Lat}\{R\}'$ – “простые” решетки, пусть $\mathfrak{X}\subset\mathcal{I}(T,R)$ и*

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}:\operatorname{Lat}T\to\operatorname{Lat}R$$

– изоморфизм решеток инвариантных подпространств сжатий T и R. Тогда

$$\mathcal{J}:\operatorname{Lat}\{T\}'\to\operatorname{Lat}\{R\}'$$

– изоморфизм решеток гиперинвариантных подпространств сжатий T и R.

Доказательство. Точно так же, как в доказательстве леммы 3, проверяем, что $\mathcal{J}\operatorname{Ran}\varphi(T)=\operatorname{Ran}\varphi(R)$, $\mathcal{J}\operatorname{Ker}\varphi(T)=\operatorname{Ker}\varphi(R)$, $\varphi\in H^\infty$. Применяя рассуждения из доказательства следствия леммы 3, убеждаемся, что $\mathcal{J}\operatorname{Lat}\{T\}'=\operatorname{Lat}\{R\}'$. $\bullet$

Замечание. В связи с леммами 3 и 4 автор считает уместным напомнить пример D. A. Herrero [12]. Именно, существует C_0-сжатие T, такое, что решетки $\operatorname{Lat}\{T\}'$ и $\operatorname{Lat}\{J\}'$, где J – жорданова модель для T, являются “простыми” и не изоморфны друг другу: $\operatorname{Lat}\{T\}'$ состоит из пяти элементов, а $\operatorname{Lat}\{J\}'$ – из четырех.

Лемма 5 (см. [7, VII.1.23]). *Пусть выполнены условия леммы 4, пусть $\mathfrak{Y}\subset\mathcal{I}(R,T)$ и*

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{Y}}:\operatorname{Lat}R\to\operatorname{Lat}T$$

– изоморфизм решеток. Тогда $\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathcal{J}_{\mathfrak{Y}}$ – взаимно обратные изоморфизмы решеток $\operatorname{Lat}\{T\}'$ и $\operatorname{Lat}\{R\}'$.

Доказательство. Пусть $E\in\operatorname{Lat}\{T\}'$, тогда E получается из элементов вида $\operatorname{Ran}\varphi(T)$ и $\operatorname{Ker}\varphi(T)$, $\varphi\in H^\infty$, под действием операций взятия верхней и нижней граней. Так как $\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}\operatorname{Ran}\varphi(T)=\operatorname{Ran}\varphi(R)$ и $\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}\operatorname{Ker}\varphi(T)=\operatorname{Ker}\varphi(R)$, $\varphi\in H^\infty$, то $\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}E$ получается из элементов такого же вида и под действием тех же операций, что и E (с заменой T на R). Аналогичное утверждение верно для $\mathcal{J}_{\mathfrak{Y}}$ и любого $F\in\operatorname{Lat}\{R\}'$. Полагая $F=\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}E$, получаем $\mathcal{J}_{\mathfrak{Y}}\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}E=E$. $\bullet$

Перейдем к гиперинвариантным подпространствам $C_{\cdot 0}$-сжатий.

Лемма 6. *Пусть $1 \leqslant \nu \leqslant \infty$, T_0 – C_0-сжатие и $T = T_0 \oplus S_\nu$. Если $\operatorname{Lat}\{T_0\}'$ – "простая" решетка, то $\operatorname{Lat}\{T\}'$ – "простая" решетка.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}_0$ пространство, в котором действует T_0, и через m – минимальный аннулятор C_0-сжатия T_0. Очевидно, что $\operatorname{Ker} m(T) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отметим, что $\operatorname{Lat}\{T\}' \subset \operatorname{Lat}\{T_0\}' \oplus \operatorname{Lat}\{S_\nu\}'$ [13] и $\operatorname{Lat}\{S_\nu\}' = \{\omega H^2_\nu,\ \omega$ – внутренняя функция$\}$. Далее, если $A \in \{T\}'$, то $A = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, где $A_0 \in \{T_0\}'$, $A_1 \in \{S_\nu\}'$ и $B \in \mathcal{I}(S_\nu, T_0)$.

Пусть $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat}\{T\}'$, тогда $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E \\ \omega H^2_\nu \end{pmatrix}$, где $E \in \operatorname{Lat}\{T_0\}'$, ω – внутренняя функция или $\omega \equiv 0$. Для любого $A \in \{T\}'$ имеем:

$$A\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \omega H^2_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 E + B\omega H^2_\nu \\ A_1 \omega H^2_\nu \end{pmatrix} \subset \mathcal{E},$$
$$B\omega H^2_\nu = B\omega(S_\nu) H^2_\nu = \omega(T_0) B H^2_\nu.$$

Так как $A_0 E \subset E$, заключаем, что $\omega(T_0) B H^2_\nu \subset E$ для любого $B \in \mathcal{I}(S_\nu, T_0)$.

Покажем, что
$$\bigvee_{B \in \mathcal{I}(S_\nu, T_0)} B H^2_\nu = \mathcal{K}_0.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – гильбертово пространство, $\Theta \in H^\infty(\mathcal{D} \to \mathcal{D})$ – характеристическая функция сжатия T_0, $K_\Theta = H^2(\mathcal{D}) \ominus \Theta H^2(\mathcal{D})$. Тогда T_0 унитарно эквивалентно своему модельному оператору T_Θ, действующему в пространстве K_Θ [6, 7], и доказываемое равенство эквивалентно равенству
$$\bigvee_{B \in \mathcal{I}(S_\nu, T_\Theta)} B H^2_\nu = K_\Theta.$$

Далее,
$$\mathcal{I}(S_\nu, T_\Theta) = \{B_\Phi, \Phi \in H^\infty(\mathbb{C}^\nu \to \mathcal{D}), \quad \text{где} \quad B_\Phi h = P_\Theta \Phi h, h \in H^2_\nu\},$$

P_Θ – ортогональный проектор из $H^2(\mathcal{D})$ на K_Θ [6, VI.3.6; 7, V.1.24]. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\nu}$ и $\{d_m\}_{m=1}^{M}$ – ортонормированные базисы пространств $\mathbb{C}^\nu$ и $\mathcal{D}$, пусть Φ_{nm} – постоянная функция, такая, что

$\Phi_{nm}e_n = d_m$, $\Phi_{nm}e_j = 0$ при $j \neq n$. Тогда $\bigvee\limits_{m=1}^{\mu} \Phi_{nm}H^2_\nu = H^2(\mathcal{D})$, поэтому

$$\bigvee_{B\in\mathcal{I}(S_\nu,T_\Theta)} BH^2_\nu \supset \bigvee_{m=1}^{\mu} B_{\Phi_{nm}}H^2_\nu = \bigvee_{m=1}^{\mu} P_\Theta\Phi_{nm}H^2_\nu = P_\Theta H^2(\mathcal{D}) = K_\Theta.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ran}\omega(T_0) &= \operatorname{clos}\omega(T_0)\mathcal{K}_0 = \operatorname{clos}\omega(T_0)\bigvee_{B\in\mathcal{I}(S_\nu,T_0)} BH^2_\nu \\ &= \bigvee_{B\in\mathcal{I}(S_\nu,T_0)} \omega(T_0)BH^2_\nu \subset E.\end{aligned}$$

Итак,

$$\operatorname{Lat}\{T\}' = \Bigg\{ \begin{pmatrix} E \\ \omega H^2_\nu \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad E \in \operatorname{Lat}\{T_0\}',$$
$$\text{функция } \omega \text{ внутренняя или } \omega \equiv 0, \quad \operatorname{Ran}\omega(T_0) \subset E \Bigg\}.$$

Поэтому, если $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat}\{T\}'$, то

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E \\ \omega H^2_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \vee \operatorname{Ran}\omega(T).$$

Далее, пусть $\varphi \in H^\infty$, тогда, очевидно, $\operatorname{Ker}\varphi(T) = \begin{pmatrix} \operatorname{Ker}\varphi(T_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Ran}\varphi(T) = \begin{pmatrix} \operatorname{Ran}\varphi(T_0) \\ \varphi H^2_\nu \end{pmatrix}$, поэтому $\begin{pmatrix} \operatorname{Ran}\varphi(T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ran}\varphi(T)\cap\begin{pmatrix} \mathcal{K}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ran}\varphi(T)\cap\operatorname{Ker} m(T)$. Таким образом, пространства вида $\begin{pmatrix} \operatorname{Ran}\varphi(T_0) \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \operatorname{Ker}\varphi(T_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \in H^\infty$, принадлежат решетке, порожденной пространствами вида $\operatorname{Ran}\varphi(T)$ и $\operatorname{Ker}\varphi(T)$, где $\varphi \in H^\infty$.

Теперь используем то, что решетка $\operatorname{Lat}\{T_0\}'$ – “простая”. Пусть $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E \\ \omega H^2_\nu \end{pmatrix} \in \operatorname{Lat}\{T\}'$, тогда $E \in \operatorname{Lat}\{T_0\}'$ и $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \vee \operatorname{Ran}\omega(T)$. Так как E получается из пространств вида $\operatorname{Ran}\varphi(T_0)$ и $\operatorname{Ker}\varphi(T_0)$, $\varphi \in H^\infty$, под действием операций взятия верхней и нижней граней, то $\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$ получается из пространств вида $\begin{pmatrix} \operatorname{Ran}\varphi(T_0) \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \operatorname{Ker}\varphi(T_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \in H^\infty$, под действием тех же операций, а эти последние пространства принадлежат решетке, порожденной пространствами вида $\operatorname{Ran}\varphi(T)$ и $\operatorname{Ker}\varphi(T)$, $\varphi \in H^\infty$. Таким образом, пространство $\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$, а с ним и пространство $\mathcal{E}$, принадлежат решетке, порожденной пространствами вида $\operatorname{Ran}\varphi(T)$ и $\operatorname{Ker}\varphi(T)$, $\varphi \in H^\infty$. $\bullet$

Теорема 2.1. *Пусть* $T \in C_{\cdot 0}(C_0, \mathrm{fin})$, T_0 *определено в* $(*)$, *и пусть* $\operatorname{Lat}\{T_0\}'$ *– "простая" решетка. Тогда* $\operatorname{Lat}\{T\}'$ *– "простая" решетка.*

Теорема 2.2. *Пусть* T, $R \in C_{\cdot 0}(C_0(\mathrm{P}), \mathrm{fin})$, $X \in \mathcal{I}(T, R)$, X *– деформация. Тогда* $\mathcal{J}_X : \operatorname{Lat}\{T\}' \to \operatorname{Lat}\{R\}'$ *– изоморфизм решеток.*

Теорема 2.1 непосредственно вытекает из теоремы 1.1, лемм 2 и 6 и следствия леммы 3, теорема 2.2 – из [7, IV.2.5 и VII.1.23], теорем 1.2 и 2.1, следствия леммы 3 и леммы 4.

§3. Изоморфизмы решеток инвариантных подпространств и сплетающие операторы

Пусть T и R – абсолютно непрерывные сжатия, $X \in \mathcal{I}(T, R)$. Хорошо известно, что если существуют оператор Y, $Y \in \mathcal{I}(R, T)$, и внешняя функция ρ, $\rho \in H^\infty$, такие, что $XY = \rho(R)$ и $YX = \rho(T)$, то отображение

$$\mathcal{J}_X : \operatorname{Lat} T \to \operatorname{Lat} R$$

является изоморфизмом решеток инвариантных подпространств сжатий T и R. Также легко видеть, что если T, R и X таковы, что существуют семейство операторов $\{Y_i\}_i \subset \mathcal{I}(R, T)$ и семейство функций $\{\delta_i\}_i \subset H^\infty$, такие, что $\bigwedge\limits_i \delta_i = 1$, $XY_i = \delta_i(R)$ и $Y_i X = \delta_i(T)$ для всех i, то $\mathcal{J}_X$ также является изоморфизмом решеток $\operatorname{Lat} T$ и $\operatorname{Lat} R$ (см. [9, 10] и ссылки там, [11]). В этом параграфе будет показано, что в некоторых случаях имеют место обратные утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть* $T \in C_{\cdot 0}(C_0(\mathrm{P}), \mathrm{fin})$, J *– жорданова модель сжатия* T, $X \in \mathcal{I}(T, J)$, X *– деформация. Тогда существуют семей-*

ство операторов $\{Y_i\}_i \subset \mathcal{I}(J,T)$ *и семейство функций* $\{\delta_i\}_i \subset H^\infty$, *такие, что* $\bigwedge\limits_i \delta_i = 1$, $XY_i = \delta_i(J)$ *и* $Y_iX = \delta_i(T)$.

Если $\mu_T < \infty$, *то семейство* $\{Y_i\}_i$ *можно выбрать состоящим из двух операторов.*

Теорема 3.2. *Пусть* T – C_0*-сжатие со свойством* (P), m – *его минимальный аннулятор,* J – *его жорданова модель,* $X \in \mathcal{I}(T,J)$, X – *деформация. Тогда существуют семейство операторов* $\{Y_i\}_i \subset \mathcal{I}(J,T)$ *и семейство функций* $\{\delta_i\}_i \subset H^\infty$ *такие, что* $\bigwedge\limits_i \delta_i \wedge m = 1$, $XY_i = \delta_i(J)$ *и* $Y_iX = \delta_i(T)$.

Если $\mu_T < \infty$, *то существует оператор* Y, $Y \in \mathcal{I}(J,T)$, *и функция* δ, $\delta \in H^\infty$, *такие, что* $\delta \wedge m = 1$, $XY = \delta(J)$ *и* $YX = \delta(T)$.

Замечание. В доказательстве теорем 3.1 и 3.2 используется то, что для любой деформации X, $X \in \mathcal{I}(T,J)$, отображение $\mathcal{J}_X : \operatorname{Lat} T \to \operatorname{Lat} J$ является изоморфизмом решеток ([7, VII.1.21] и теорема 1.2).

Доказательство теорем 3.1 и 3.2. Пусть сжатие T действует в пространстве $\mathcal{H}$, пусть $J = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus T_{\theta_n} \oplus S_k$, где $\theta_n \in H^\infty$, θ_{n+1} делит θ_n для всех n, $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \theta_n = 1$, $k < \infty$. Положим $\mathcal{H}_n = X^{-1}K_{\theta_n}$, $T_n = T|_{\mathcal{H}_n}$ для всех n, $\mathcal{H}_* = X^{-1}H^2_k$, $T_* = T|_{\mathcal{H}_*}$, $X_n = X|_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H}_n \to K_{\theta_n}$ для всех n, $X_* = X|_{\mathcal{H}_*} : \mathcal{H}_* \to H^2_k$.

Так как $\mathcal{J}_X$ является изоморфизмом решеток $\operatorname{Lat} T$ и $\operatorname{Lat} J$, то для любого $E \in \operatorname{Lat} J$ имеем $\operatorname{clos} X(X^{-1}E) = E$, поэтому X_n и X_* – деформации. Очевидно, что $X_n \in \mathcal{I}(T_n, T_{\theta_n})$ и $X_* \in \mathcal{I}(T_*, S_k)$.

Так как T_{θ_n} – C_0-сжатие, а $T_n \prec T_{\theta_n}$, то T_n и T_{θ_n} квазиподобны (см. [6, III.4.6; 7, III.2.1]), поэтому существует $\mathcal{Y}_n$ – деформация, $\mathcal{Y}_n \in \mathcal{I}(T_{\theta_n}, T_n)$. Так как $X_n\mathcal{Y}_n \in \{T_{\theta_n}\}'$ и $X_n\mathcal{Y}_n$ – деформация, то существует функция φ_n, $\varphi_n \in H^\infty$, такая, что $X_n\mathcal{Y}_n = \varphi_n(T_{\theta_n})$ и $\varphi_n \wedge \theta_n = 1$ [7, III.1]. Хорошо известно (см., например [9, 10]), что существует $t_n \in \mathbb{C}$ такое, что $(\varphi_n + t_n\theta_n) \wedge \theta_1 = 1$. Положим $\psi_n = \varphi_n + t_n\theta_n$, тогда

$$X_n\mathcal{Y}_n = \psi_n(T_{\theta_n}) \quad \text{и} \quad \psi_n \wedge \theta_1 = 1.$$

Далее, по теореме 2.4 из [4], существуют $\mathcal{Y}_* \in \mathcal{I}(S_k, T_*)$ и $\psi_* \in H^\infty$ такие, что

$$X_*\mathcal{Y}_* = \psi_*(S_k) \quad \text{и} \quad \psi_* \wedge \theta_1 = 1.$$

Пусть $1 \leqslant N < \infty$, положим $\xi_{N,n} = \theta_{N+1}\psi_* \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} \psi_n$, $n \geqslant 1$, $\xi_{N,*} = \theta_{N+1} \prod_{m=1}^{N} \psi_n$, рассмотрим оператор

$$Z_N : \sum_{n=1}^{\infty} \oplus K_{\theta_n} \oplus H^2_k \to \mathcal{H},$$

заданный следующим образом:

$$Z_N|_{K_{\theta_n}} = \mathcal{Y}_n \xi_{N,n}(T_{\theta_n}), \quad 1 \leqslant n \leqslant N,$$
$$Z_N|_{K_{\theta_n}} = \mathbb{O}, \quad n > N, \quad Z_N|_{H^2_k} = \mathcal{Y}_* \xi_{N,*}(S_k).$$

Покажем, что

$$XZ_N = (\theta_{N+1}\Delta_N)(J), \quad \text{где} \quad \Delta_N = \psi_* \prod_{n=1}^{N} \psi_n.$$

Пусть $f_n \in K_{\theta_n}$, $1 \leqslant n < \infty$, $h \in H^2_k$. Тогда

$$Z_N\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} f_n + h\biggr) = \sum_{n=1}^{N} Z_N f_n + Z_N h$$

и

$$\begin{aligned}(XZ_N)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} f_n + h\biggr) &= \sum_{n=1}^{N} X_n \mathcal{Y}_n \xi_{N,n}(T_{\theta_n}) f_n + X_* \mathcal{Y}_* \xi_{N,*}(S_k) h \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\psi_n \xi_{N,n})(T_{\theta_n}) f_n + (\psi_* \xi_{N,*})(S_k) h \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\theta_{N+1}\Delta_N)(T_{\theta_n}) f_n + (\theta_{N+1}\Delta_N)(S_k) h.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(\theta_{N+1}\Delta_N)(J)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} f_n + h\biggr) = \sum_{n=1}^{\infty} &(\theta_{N+1}\Delta_N)(T_{\theta_n}) f_n \\ &+ (\theta_{N+1}\Delta_N)(S_k) h,\end{aligned}$$

но, так как θ_n делит θ_{N+1} для $n > N$, то $(\theta_{N+1}\Delta_N)(T_{\theta_n}) = 0$ для $n > N$, и равенство $XZ_N = (\theta_{N+1}\Delta_N)(J)$ доказано.

Далее, по теореме 2.4 из [4] существуют $V_N \in \mathcal{I}(S_k, T_*)$ и $\eta_N \in H^\infty$ такие, что

$$X_* V_N = \eta_N(S_k) \quad \text{и} \quad \eta_N \wedge \Delta_N = 1.$$

Рассмотрим оператор

$$W_N : \sum_{n=1}^{\infty} \oplus K_{\theta_n} \oplus H_k^2 \to \mathcal{H},$$

заданный следующим образом:

$$W_N|_{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus K_{\theta_n}} = \mathbb{O}, \quad W_N|_{H_k^2} = V_N \theta_1(S_k).$$

Легко видеть, что $XW_N = (\eta_N \theta_1)(J)$.

Положим

$$\{Y_i\}_i = \{Z_N\}_{N=1}^{\infty} \cup \{W_N\}_{N=1}^{\infty},$$
$$\{\delta_i\}_i = \{\theta_{N+1}\Delta_N\}_{N=1}^{\infty} \cup \{\eta_N \theta_1\}_{N=1}^{\infty}.$$

Имеем: $XY_i = \delta_i(J)$, покажем, что $Y_i \in \mathcal{I}(J,T)$ и $Y_i X = \delta_i(T)$. В самом деле, $XY_i J = \delta_i(J)J = J\delta_i(J) = JXY_i = XTY_i$, откуда $X(Y_i J - TY_i) = 0$, и, так как $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, заключаем, что $Y_i J = TY_i$, то есть $Y_i \in \mathcal{I}(J,T)$. Также имеем: $XY_i X = \delta_i(J)X = X\delta_i(T)$, откуда $X(Y_i X - \delta_i(T)) = 0$ и $Y_i X = \delta_i(T)$.

Осталось проверить, что $\bigwedge\limits_i \delta_i = 1$. Для этого сначала покажем, что

$$\theta_{N+1}\Delta_N \wedge \eta_N \theta_1 = \theta_{N+1}.$$

Действительно, $\theta_{N+1}\Delta_N \wedge \eta_N\theta_1 = \theta_{N+1}(\Delta_N \wedge \eta_N(\theta_1/\theta_{N+1}))$, а так как, по построению, $\Delta_N \wedge \eta_N = 1$ и $\Delta_N \wedge \theta_1 = 1$, получаем требуемое равенство. Пусть теперь $\alpha = \bigwedge\limits_i \delta_i$, тогда α делит θ_{N+1} для всех $N \geqslant 1$, следовательно, α делит $\bigwedge\limits_{N=1}^{\infty} \theta_{N+1}$, а по условию теоремы $\bigwedge\limits_{N=1}^{\infty} \theta_{N+1} = 1$, следовательно, $\alpha = 1$. Первая часть теоремы 3.1 доказана.

Предположим теперь, что в условиях теоремы 3.1 $\mu_T < \infty$. Тогда существует $N < \infty$ такое, что $\theta_n \equiv 1$ для всех $n > N$. В качестве операторов $\{Y_i\}_i$ возьмем операторы Z_N и W_N. Как было показано, $\theta_{N+1}\Delta_N \wedge \eta_N\theta_1 = \theta_{N+1}$, а в соответствии с выбором N справедливо равенство $\theta_{N+1} = 1$.

Для доказательства теоремы 3.2 следует рассмотреть семейство операторов $\{Z_N\}_{N=1}^{\infty}$, а в случае $\mu_T < \infty$ – оператор Z_N, где $N = \mu_T$. Имеем: $\big(\bigwedge\limits_{N=1}^{\infty} \theta_{N+1}\Delta_N\big) \wedge \theta_1 = \bigwedge\limits_{N=1}^{\infty} (\theta_{N+1}\Delta_N \wedge \theta_1) = \bigwedge\limits_{N=1}^{\infty} \theta_{N+1}(\Delta_N \wedge (\theta_1/\theta_{N+1})) = \bigwedge\limits_{N=1}^{\infty} \theta_{N+1} = 1$, а в случае $\mu_T < \infty$ имеем $\theta_{N+1}\Delta_N \wedge \theta_1 = \Delta_N \wedge \theta_1 = 1$. Так как $m = \theta_1$, требуемые условия выполнены. $\bullet$

§4. Кратность спектра и характеристика disc

В этом параграфе вычисляется кратность спектра и характеристика disc для сжатий класса $C_{\cdot 0}(C_0, \mathrm{fin})$, у которых C_0-часть отлична от нуля. Случай, когда C_0-часть такого сжатия равна нулю, то есть когда сжатие является квазиаффинным преобразованием одностороннего сдвига конечной кратности, рассмотрен в [4, замечание 2.6].

Напомним определение характеристики disc (см. [5]). Пусть T – оператор в пространстве $\mathcal{H}$, символом $\operatorname{Cyc} T$ будем обозначать множество всех конечномерных воспроизводящих подпространств оператора T:

$$\operatorname{Cyc} T = \{E \subset \mathcal{H} : \dim E < \infty, \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n E = \mathcal{H}\}.$$

На множестве $\operatorname{Cyc} T$ зададим функцию f_T следующим образом:

$$f_T(\mathcal{E}) = \min\{\dim E : E \in \operatorname{Cyc} T, E \subset \mathcal{E}\}, \quad \mathcal{E} \in \operatorname{Cyc} T.$$

Тогда

$$\operatorname{disc} T \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{f_T(E) : E \in \operatorname{Cyc} T\}.$$

Если $\mu_T = \infty$, то $\operatorname{disc} T \overset{\mathrm{def}}{=} \infty$.

Очевидно, что $\mu_T \leqslant \operatorname{disc} T$.

Докажем простое, но полезное утверждение.

Лемма 7. *Пусть T и R – операторы, $X \in \mathcal{I}(T, R)$, $\mathcal{J}_X : \operatorname{Lat} T \to \operatorname{Lat} R$ – изоморфизм решеток и $\mu_T < \infty$. Тогда $\operatorname{disc} T \leqslant \operatorname{disc} R$.*

Доказательство. Обозначим пространства, в которых действуют операторы T и R, через $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$.

Покажем, что $f_T(E) = f_R(XE)$ для любого пространства $E \in \operatorname{Cyc} T$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{disc} R = \sup\{f_R(F) : F \in \operatorname{Cyc} R\} &\geqslant \sup\{f_R(XE) : E \in \operatorname{Cyc} T\} \\ &= \sup\{f_T(E) : E \in \operatorname{Cyc} T\} = \operatorname{disc} T.\end{aligned}$$

Так как X – деформация, то для любого $E \in \operatorname{Cyc} T$ имеем: $XE \in \operatorname{Cyc} R$ и $\dim E = \dim XE$; очевидно, что если $E \subset \mathcal{E}$, то $XE \subset X\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{E} \in \operatorname{Cyc} T$, $F \in \operatorname{Cyc} R$ и $F \subset X\mathcal{E}$. Положим $E = X^{-1}F$, тогда, очевидно, $E \subset \mathcal{E}$, $\dim E = \dim F$ и $XE = F$. Покажем, что $E \in \operatorname{Cyc} T$. Действительно,

$$\mathcal{J}_X\Bigl(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n E\Bigr) = \bigvee_{n=0}^{\infty} XT^nE = \bigvee_{n=0}^{\infty} R^nF = \mathcal{K},$$

с другой стороны, $\mathcal{J}_X\mathcal{H} = \mathcal{K}$, и, так как $\mathcal{J}_X$ – биекция, заключаем, что $\mathcal{H} = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} T^nE$. $\bullet$

Напомним, что для C_0-сжатия T_0 и числа ν, $1 \leqslant \nu \leqslant \infty$, верны следующие равенства: $\mu(T_0 \oplus S_\nu) = \mu(T_0) + \nu$ [8]; если $T_0 \neq \mathbb{O}$, то $\operatorname{disc}(T_0 \oplus S_\nu) = \mu(T_0) + \nu$ [5, следствие 19].

Теорема 4.1. *Пусть $T \in C_{\cdot 0}(C_0, \mathrm{fin})$, T_0 и k определены в $(*)$, и пусть $T_0 \neq \mathbb{O}$. Тогда $\mu_T = \operatorname{disc} T = \mu(T_0) + k$.*

Доказательство. Из теоремы 1.1 следует, что $\mu_T < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mu_{T_0} < \infty$. Если $\mu_{T_0} = \infty$, утверждение теоремы очевидно. Если $\mu_{T_0} < \infty$, то T_0 обладает свойством (P) и можно применить теорему 1.2 и лемму 7. Имеем: $\mu(T_0 \oplus S_k) \leqslant \mu_T \leqslant \operatorname{disc} T \leqslant \operatorname{disc}(T_0 \oplus S_k) = \mu(T_0 \oplus S_k)$. $\bullet$

Литература

1. B. Sz.-Nagy, *Diagonalization of matrices over H^∞*. — Acta Sci. Math. **38** (1976), 223–238.
2. M. Uchiyama, *Hyperinvariant subspaces for contractions of class $C_{\cdot 0}$*. — Hokkaido Math. J., **6** (1977), 260–272.
3. P. Y. Wu, *The hyperinvariant subspace lattice of a contraction of class $C_{\cdot 0}$*. — Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 527–530.
4. М. Ф. Гамаль, *$C_{\cdot 0}$-сжатия: жорданова модель и решетки инвариантных подпространств*. — Алгебра и анализ, **15**, No. 5 (2003), 198–227.
5. N. K. Nikolskii and V. I. Vasjunin, *Control subspaces of minimal dimensions, unitary and model operators*. — J. Operator Theory, **10** (1983), 307–330.

6. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* Мир, М. (1970).
7. H. Bercovici, *Operator theory and arithmetic in H^∞.* — AMS, Math. Surveys and Monographs **26** (1988).
8. P. Y. Wu, *$C_{\cdot 0}$-contractions: cyclic vectors, commutants and Jordan models.* — J. Operator Theory, **5** (1981), 53–62.
9. В. В. Капустин, *Рефлексивность операторов: общие методы и критерий для почти изометрических сжатий.* — Алгебра и анализ **4** (1992), no.2, 141–160.
10. В. В. Капустин, А. В. Липин, *Операторные алгебры и решетки инвариантных подпространств I,II.* — Записки научн. семин. ЛОМИ, **178** (1989), 23–56, **190** (1991), 110–147.
11. М. Ф. Гамаль, *Решетки инвариантных подпространств квазиаффинных преобразований одностороннего сдвига конечной кратности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **290** (2002), 27–32.
12. D. A. Herrero, *Quasisimilarity does not preserve the hyperlattice.* — Proc. Amer. Math. Soc. **65** (1977), 80–84.
13. J. B. Conway and P. Y. Wu, *The splitting of $\mathfrak{A}(T_1 \oplus T_2)$ and related questions.* — Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 41–56.

Gamal' M. F. On a class of $C_{\cdot 0}$-contractions: hyperinvariant subspaces and intertwining operators.

A class of $C_{\cdot 0}$-contractions that is a generalization of the class of $C_{\cdot 0}$-contractions with finite defect indices is considered. The results of [2,3] for $C_{\cdot 0}$-contractions with finite defect indices are generalized: the lattices of hyperinvariant subspaces of such contraction T is isomorphic to that of its Jordan model and is generated by subspaces of the form $\operatorname{Ker}\varphi(T)$ and $\operatorname{Ran}\varphi(T)$, where $\varphi \in H^\infty$. The form of the inverse to an isomorphism of the invariant subspace lattices given by an intertwining quasiaffinity is also studied. Next, for $C_{\cdot 0}$-contractions in question, the quantity disc related to the lattice of invariant subspaces is computed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 13 сентября 2004 г.