Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

Е. С. Дубцов

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ФАТУ ДЛЯ ГЛАДКИХ МЕР

1. Введение

Рассмотрим вещественную борелевскую меру μ на $\mathbb{R}^n$. Напомним, что интеграл Пуассона меры μ задается на полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ с помощью равенства

$$u(x,y) = c_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{(\|x-t\|^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, d\mu(t), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0,$$

где c_n – положительная нормировочная константа.

Классическая теорема Фату утверждает, что из дифференцируемости меры μ в точке $\xi\in\mathbb{R}^n$ можно сделать выводы о поведении функции $u(x,y)$ при $(x,y)\to(\xi,0)$. Чтобы сформулировать точные результаты, напомним соответствующие определения. Пусть $|E|$ обозначает меру Лебега множества $E\subset\mathbb{R}^n$. При $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $h>0$ равенство

$$Q_h(\xi) = \{x\in\mathbb{R}^n:\ |x_j-\xi_j|<h/2,\ j=1,2,\dots,n\}$$

задает куб с центром ξ и длиной ребра $h>0$. Символ Q_h будет использоваться для куба, центр которого не задан явно.

Производная меры μ в точке ξ и *симметричная производная* соответственно определяются равенствами

$$\mathcal{D}\mu(\xi) = \lim_{\xi\in Q_h,\, h\to 0} \frac{\mu(Q_h)}{|Q_h|},$$
$$\mathcal{D}_{sym}\mu(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(Q_h(\xi))}{|Q_h(\xi)|}$$

при условии, что указанные пределы существуют.

Напомним, что угол Штольца с вершиной $\xi\in\mathbb{R}^n$ и раствором $\alpha\in(0,+\infty)$ задается равенством $\Delta_\alpha(\xi) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ : |x-\xi| <$

Работа поддержана грантом для молодых кандидатов наук PD 02-1.1-7 Министерства образования РФ.

$\alpha y\}$. Если

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\xi,0)\\(x,y)\in\Delta_\alpha(\xi)}} u(x,y) = L$$

для всех $\alpha > 0$, то по определению в точке ξ функция u имеет некасательный предел L. В этом случае будем использовать запись $\lim_{(x,y)\longrightarrow>(\xi,0)} u(x,y) = L$.

Теорема Фату. *Пусть u обозначает интеграл Пуассона меры μ и $L \in \mathbb{R}$.*

1) *Если $\mathcal{D}\mu = L$, то $\lim_{(x,y)\longrightarrow>(\xi,0)} u(x,y) = L$.*
2) *Если $\mathcal{D}_{sym}\mu = L$, то $\lim_{y\to 0+} u(\xi,y) = L$.*

Обратная теорема Фату. Для $n = 1$ Л. Люмис [4] показал, что положительность меры μ является тауберовым условием, при котором верны утверждения, обратные к теореме Фату. В случае симметричной производной У. Рудин [5] доказал результат Л. Люмиса для нескольких переменных. Далее, Ж. Броссар и Л. Шевалье [1] получили общие условия, при которых имеет место обратная теорема Фату. В частности, указанным условиям удовлетворяют положительные меры. Наконец, Х. Кармона и Х. Донайре [2] доказали обратную теорему Фату для *мер Зигмунда* на $\mathbb{R}$. Такие меры, вообще говоря, не удовлетворяют условиям Броссара–Шевалье.

Меры Зигмунда. Кубы $Q_h(\xi)$ и $Q_h(\eta)$ называются *соседними*, если $|\xi_p - \eta_p| = h$ для некоторого индекса p и $\xi_j = \eta_j$ при $j \neq p$.

Определение. *Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется мерой Зигмунда, если существует константа $C > 0$ такая, что*

$$|\mu(Q_+) - \mu(Q_-)| \leqslant C|Q_+|$$

для всех соседних кубов $Q_+, Q_- \subset \mathbb{R}^n$.

В одномерном случае Х. Кармона и Х. Донайре [2] доказали, в частности, следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть μ – вещественная мера Зигмунда на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие свойства эквивалентны.*

(i) $\mathcal{D}_{sym}\mu(\xi) = +\infty$;
(ii) $\mathcal{D}\mu(\xi) = +\infty$;
(iii) $\lim_{y\to 0+} u(\xi,y) = +\infty$;

(iv) $\lim_{(x,y)\to>(\xi,0)} u(x,y) = +\infty$.

Ниже этот факт будет доказан для всех размерностей $n \in \mathbb{N}$.

Далее, при $n = 1$ Х. Кармона и Х. Донайре [2] доказали, что теорема Фату полностью обратима для малых мер Зигмунда. Вторая цель настоящей работы – показать, что такая теорема верна для всех размерностей $n \in \mathbb{N}$.

По определению мера Зигмунда называется малой, если

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(Q_+) - \mu(Q_-)}{|Q_+|} = 0,$$

где Q_+ и Q_- – произвольные соседние кубы с длиной ребра h.

Предложение 2. *Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$ и пусть μ — малая мера Зигмунда на $\mathbb{R}^n$. Тогда существование одной из следующих величин влечет существование остальных и их равенство.*

(1) $\mathcal{D}_{sym}\mu(\xi)$;

(2) $\mathcal{D}\mu(\xi)$;

(3) $\lim_{y\to 0+} u(\xi, y)$;

(4) $\lim_{(x,y)\to>(\xi,0)} u(x,y)$.

2. Вспомогательные результаты

Регулярной калибровочной функцией будем называть неубывающую ограниченную функцию $\omega : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такую, что функция $\omega(t)/t^{1-\varepsilon}$ убывает при некотором $\varepsilon > 0$.

По определению вещественная мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется *ω-мерой Зигмунда*, если существует положительная константа C такая, что

$$|\mu(Q_+) - \mu(Q_-)| \le C\omega\left(|Q_+|^{1/n}\right)|Q_+|$$

для всех пар соседних кубов $Q_+, Q_- \subset \mathbb{R}^n$. Одним из ключевых шагов в дальнейших рассуждениях будет импликация (а) $\Rightarrow$ (б) в следующей теореме.

Теорема 3 ([3]). *Рассмотрим вещественную меру μ на $\mathbb{R}^n$ и регулярную калибровочную функцию ω. Пусть u обозначает гармоническое продолжение меры μ. Тогда следующие свойства равносильны.*

(а) *μ является ω-мерой Зигмунда.*

(б) *Существует положительная константа $C > 0$ такая, что*

$$y|\nabla u(x,y)| \le C\omega(y) \quad \text{для всех точек } (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Безусловно, сформулированный результат примени́м к мерам Зигмунда. Следующее наблюдение показывает, что теорема 3 также может быть использована при изучении *малых* мер Зигмунда.

Лемма 4. *Предположим, что функция $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ограничена и $\varphi(0+) = 0$. Тогда существует регулярная калибровочная функция $\omega : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такая, что $\omega(0+) = 0$ и $\omega(x) \geqslant \varphi(x)$ для всех $x > 0$.*

Доказательство. 1. Построение ступенчатой мажоранты. Обозначим $I_0 = [1,\infty)$ и $I_j = [2^{-j}, 2^{-j+1})$, $j \in \mathbb{N}$. При $x \in I_j$ положим $\Phi(x) = \sup\{\varphi(t) : t \in I_j\}$. Таким образом, $\Phi(0+) = 0$ и $\Phi(x) \geqslant \varphi(x)$ при $x > 0$. Введем вспомогательное обозначение

$$J = \{j \geqslant 0 : \text{ функция } \Phi \text{ имеет разрыв в точке } 2^{-j}\}.$$

2. Регуляризация. Положим $\omega(x) = \Phi(x)$ при $x \geqslant 2^{-j_1}$, где j_1 – минимальный элемент множества J. Дальнейшие построения выполним по индукции.

На $(k+1)$-м шаге предположим, что для некоторого $j_k \in J$ функция $\omega(x)$ уже определена при $x \geqslant 2^{-j_k}$ и $\omega(2^{-j_k}) = \Phi(2^{-j_k})$. Выберем константу c_k такую, что $\Phi(2^{-j_k}) = c_k 2^{-j_k/2}$. Продолжим график функции $\omega(x)$ влево от точки 2^{-j_k}, двигаясь по графику функции $c_k\sqrt{x}$. Если $\Phi(x) \leqslant c_k\sqrt{x}$ для всех $x \in (0, 2^{-j_k}]$, то построение функции ω завершено. Иначе движение по графику функции $c_k\sqrt{x}$ завершается в ближайшей точке пересечения с графиком функции $\Phi(x)$. С этого момента и до ближайшей (слева) точки вида 2^{-j}, $j \in J$, по определению $\omega(x)$ совпадает с $\Phi(x)$. Наконец, положим $j_{k+1} = j$. Индукционный переход завершен.

Для завершения рассуждения отметим, что частное $\omega(x)/\sqrt{x}$ убывает, так как последовательность c_k возрастает. □

3. Доказательства

Доказательство предложения 1. Импликации (ii) ⇒ (i) и (iv) ⇒ (iii) очевидны. Докажем импликацию (iii) ⇒ (ii).

Зафиксируем точку $\xi \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим куб $Q = Q_h \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\xi \in Q$. Применим формулу Грина к гармоническим функциям $u(x,y)$ и y в параллелепипеде $Q\times[\varepsilon,h]\subset\mathbb{R}^{n+1}_{+}$. Получаем

$$\left|\int\limits_Q u(x,\varepsilon)\,dx-\int\limits_Q u(x,h)\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_Q h\frac{\partial u}{\partial n}(x,h)\,dx\right|+\left|\int\limits_Q \varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(x,\varepsilon)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\partial Q\times[\varepsilon,h]} y\frac{\partial u}{\partial n}(x',y)\,d\Sigma(x',y)\right|, \tag{Г}$$

где $x'\in\partial Q$ и $d\Sigma$ обозначает соответствующую поверхностную меру.

Устремляя ε к нулю, с помощью теоремы 3 находим

$$\left|\mu(Q)-\int\limits_Q u(x,h)\,dx\right|\leqslant Ch^n.$$

Далее, свойство (б) из теоремы 3 гарантирует, что

$$|u(x,h)-u(\xi,h)|\leqslant C$$

при $x\in Q$. Следовательно, $|\mu(Q)-u(\xi,h)h^n|\leqslant Ch^n$, иными словами,

$$\left|\frac{\mu(Q)}{|Q|}-u(\xi,h)\right|\leqslant C.$$

Таким образом, (iii) $\Rightarrow$ (ii). Отметим, что изложенное рассуждение также показывает, что (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Наконец, докажем импликацию (i) $\Rightarrow$ (iv). Зафиксируем $\alpha>0$ и куб $Q=Q_h(\xi)\subset\mathbb{R}^n$. Предположим, что $|x-\xi|<\alpha h$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве импликации (iii) $\Rightarrow$ (ii), получаем

$$\left|\frac{\mu(Q)}{|Q|}-u(x,h)\right|\leqslant C(\alpha).$$

Таким образом, (i) $\Leftrightarrow$ (iv). □

Доказательство предложения 2. В силу предложения 1 можно предполагать, что рассматриваемые пределы конечны. Импликации (2) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (3) очевидны, а свойства (1) $\Rightarrow$ (3) и (2) $\Rightarrow$ (4) выполнены в силу теоремы Фату. Итак, докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (2).

Зафиксируем точку $\xi \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим куб $Q = Q_h \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\xi \in Q$. Устремляя ε к нулю в оценке (Г), с помощью леммы 4 и теоремы 3 получаем

$$\mu(Q) - \int\limits_Q u(x,h)\,dx = \circ(h^n)$$

при $h \to 0$. Для $x \in Q$ в силу свойства (б) имеем

$$u(x,h) - u(\xi,h) = \circ(1)$$

при $h \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\mu(Q)}{|Q|} - u(\xi,h)\right) = 0,$$

что завершает доказательство предложения. □

Литература

1. J. Brossard et L. Chevalier, *Problème de Fatou ponctuel et dérivabilité des mesures.* — Acta Math. **164**, No. 3–4 (1990), 237–263.
2. J. J. Carmona and J. J. Donaire, *The converse of Fatou's theorem for Zygmund measures.* — Pacific J. Math. **191**, No. 2 (1999), 207–222.
3. E. Doubtsov and A. Nicolau, *Symmetric and Zygmund measures in several variables.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, No. 1 (2002), 153–177.
4. L. H. Loomis, *The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 239–250.
5. W. Rudin, *Tauberian theorems for positive harmonic functions.* — Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **40**, No. 3 (1978), 376–384.

Dubtsov E. S. The converse of the Fatou theorem for smooth measures.

We prove the converse of the Fatou theorem for small Zygmund measures defined on the Euclidean space.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: ed@ED8307.spb.edu

Поступило 1 сентября 2004 г.