Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

Е. Коротяев, А. Куценко

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

1. Введение

В работе изучаются изоспектральные множества для дискретного $(N+1)$-периодического оператора Шрёдингера. При малых нечётных потенциалах изоспектральные множества в основном состоят из $2^{\frac{N+1}{2}}$ элементов, а при больших потенциалах из $(N+1)!$ элементов. Более того, в работе дана асимптотика краёв зон спектра этого оператора в случае больших по норме потенциалов и в случае малых по норме нечётных потенциалов.

Рассмотрим периодический оператор Шрёдингера

$$(Ly)_n = y_{n-1} + y_{n+1} + q_n y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y \in l^2(\mathbb{Z}).$$

Здесь потенциал $\{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть вещественная $(N+1)$-периодическая последовательность, $q_{n+N+1} = q_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Введём пространство потенциалов

$$q \equiv \{q_n\}_1^{N+1} \in \mathcal{Q} \equiv \Big\{ q \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_1^{N+1} q_n = 0 \Big\}, \qquad \|q\|^2 = \sum_{n=1}^{N+1} q_n^2. \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что спектр оператора L абсолютно непрерывен и состоит из $(N+1)$-й зоны $\sigma_n = \sigma_n(q) = [\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^-]$, $n = 0, 1, \ldots, N$, где $\lambda_n^\pm = \lambda_n^\pm(q)$ края зон и $\lambda_0^+ < \lambda_1^- \leqslant \lambda_1^+ < \ldots < \lambda_N^- \leqslant \lambda_N^+ < \lambda_{N+1}^-$. Эти зоны отделены друг от друга лакунами $\gamma_n = \gamma_n(q) = (\lambda_n^-, \lambda_n^+)$ длины $|\gamma_n| \geqslant 0$. Лакуны могут быть вырожденными: $|\gamma_n| = 0$.

Введём фундаментальные решения $\varphi_n(\lambda, q)$ и $\vartheta_n(\lambda, q)$, $n \in \mathbb{Z}$, уравнения

$$y_{n-1} + y_{n+1} + q_n y_n = \lambda y_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

с начальными условиями

$$\varphi_0(\lambda, q) \equiv \vartheta_1(\lambda, q) \equiv 0, \quad \varphi_1(\lambda, q) \equiv \vartheta_0(\lambda, q) \equiv 1.$$

Функция $\Delta(\lambda, q) = \varphi_{N+2}(\lambda, q) + \vartheta_{N+1}(\lambda, q)$ называется функцией Ляпунова для оператора L. Видно, что Δ, φ_n и $\vartheta_n, n \geqslant 1$, являются полиномами от $(\lambda, q) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Спектр оператора L находится по формуле $\sigma(q) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda, q)| \leqslant 2\}$, и заметим что $(-1)^{N+1-n}\Delta(\lambda_n^{\pm}, q) = 2$, $n = 0, \dots, N+1$.

Введём параметры, которые оказываются очень удобными для описания поведения спектра при различных потенциалах. Для каждого $n = 1, \dots, N$ найдётся точка $\lambda_n = \lambda_n(q) \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$ такая, что

$$\Delta'(\lambda_n, q) = 0, \quad \Delta''(\lambda_n, q) \neq 0, \quad (-1)^{N+1-n}\Delta(\lambda_n, q) \geqslant 2. \tag{1.3}$$

Здесь и ниже мы будем использовать обозначение $(') = \partial/\partial\lambda$. Определим отображение $h : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^N$, $h(q) = \{h_n(q)\}_1^N$ по формуле

$$\Delta(\lambda_n, q) = 2(-1)^{N+1-n}\cosh h_n, \quad h_n \geqslant 0. \tag{1.4}$$

По данным h однозначно восстанавливается функция Ляпунова Δ, которая определяет спектр σ. Это значит, что h, Δ, σ находятся друг с другом во взаимно однозначном соответствии, то есть

$$\sigma(q) = \sigma(p) \quad \Leftrightarrow \quad h(q) = h(p) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(\cdot, q) \equiv \Delta(\cdot, p). \tag{1.5}$$

Отображение h есть некоторый аналог отображения Марченко–Островского в случае непрерывного оператора Шрёдингера (см. [1]). Ввиду такой тесной связи со спектром, важным вопросом представляется изучение "особенностей" и областей локального и глобального изоморфизма отображения h.

Полином Δ имеет разложение

$$\begin{aligned} &\Phi(q) = \{\phi_n(q)\}_1^N, \\ &\Delta(\lambda, q) = \lambda^{N+1} + \phi_1(q)\lambda^{N-1} + \phi_2(q)\lambda^{N-2} + \ldots + \phi_N(q) \end{aligned} \tag{1.6}$$

для некоторых полиномов $\phi_n(q)$, $q \in \mathcal{Q}$. Тогда определитель производной Фреше $\det d_q\Phi(q)$ – тоже полином. Введём множество

$$\mathcal{S} = \{q \in \mathcal{Q} : \quad \det d_q\Phi(q) = 0\}. \tag{1.7}$$

Оказывается, что поверхность S состоит из "особенностей" отображения h.

Предложение 1.1. *Определитель* $\det d_q h$ *не равен нулю тогда и только тогда, когда* $q \notin \mathcal{S}$. *Более того, если* $q \notin \mathcal{S}$, *то* $h_n(q) > 0$ *для всех* n.

Большие по норме потенциалы. Первая теорема будет показывать поведение границ зон спектра и асимптотику длин этих зон при больших по норме потенциалах. Обозначим через $\mathcal{M}_n$ представление группы перестановок S_n размерности n в пространстве $(n \times n)$-матриц:

$$\mathcal{M}_n = \{M_\omega : \ M_\omega q = \{q_{\omega(j)}\}_{j=1}^n, \ \omega \in S_n, \ q \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $p \in \mathcal{Q}$ *и* $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_{N+1}$. *Предположим, что* $p_{n-1} < p_n < p_{n+1}$ *для некоторого* n, $2 \leqslant n \leqslant N$ *или* $p_1 < p_2$, $n = 1$, *или* $p_N < p_{N+1}$, $n = N+1$. *Тогда при* $q = Mp$, $M \in \mathcal{M}_n$ *верны следующие асимптотики при* $t \to +\infty$:

$$\begin{aligned} &\lambda_{n-1}^+(tq) = p_n t - \left(\frac{1}{p_n - q_{m-1}} + \frac{1}{p_n - q_{m+1}}\right) t^{-1} + O(t^{-2}), \\ &p_n = q_m, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$|\sigma_n(tq)| = \lambda_n^-(tq) - \lambda_{n-1}^+(tq) = 4t^{-N} \prod_{j \neq n} |p_j - p_n|^{-1} + O(t^{-N-1}). \tag{1.10}$$

Теперь посмотрим на поведение поверхности S при больших по норме потенциалах.

Теорема 1.3. *Предположим, что* $\varepsilon = \inf\limits_{n \neq m} |q_m - q_n| > 0$ *для некоторого* $q \in \mathcal{Q}$. *Тогда* $tq \notin S$ *для любого* $t > \frac{4}{N!}\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^N$.

Далее будем искать области глобального изоморфизма для отображения h. Введём множества

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\varepsilon &= \{q \in \mathcal{Q} \colon \|q\| < 1, \ \inf_{n \neq m} |q_n - q_m| > \varepsilon\}, \\ \mathcal{Z}_\varepsilon^0 &= \{q \in \mathcal{Z}_\varepsilon : q_1 < \ldots < q_{N+1}\}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Тогда $\mathcal{Z}_\varepsilon = \bigcup\limits_{\omega \in S_{N+1}} \mathcal{Z}_\varepsilon(\omega)$, где $\mathcal{Z}_\varepsilon(\omega) = M_\omega \mathcal{Z}_\varepsilon^0$, $M_\omega \in \mathcal{M}_{N+1}$ (см. (1.8)). Множества $\mathcal{Z}_\varepsilon(\omega)$ открыты, выпуклы и непусты при $0 < \varepsilon < N^{-\frac{3}{2}}$. Также введём множество

$$\mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega) = \{p = sq : \ q \in \mathcal{Z}_\varepsilon(\omega), \ s > t\}. \tag{1.12}$$

Теорема 1.4. (i) *Для любого* $\omega \in S_{N+1}$, *любого* $0 < \varepsilon < N^{-\frac{3}{2}}$ *существует такое* $t > 0$, *что отображение* $h : \mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega) \to h(\mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega))$ *является вещественным аналитическим изоморфизмом.*

(ii) *Для любого* $h^* \in \mathbb{R}^N$ *существует такое* $t > 0$, *что полупрямая* $\{h^* + s \cdot 1_0,\ s > t\}$ *содержится в* $h(\mathcal{Q})$ *и каждая точка этой полупрямой имеет в точности* $(N+1)!$ *прообразов в* $\mathcal{Q}$. *Здесь* $1_0 = (1, \ldots, 1)$.

На основании изложенных фактов и их доказательств можно показать, что при больших потенциалах вся поверхность S асимптотически сосредоточена в конической окрестности каждой из плоскостей $\{q \in \mathcal{Q} :\ q_i = q_j,\ i \neq j\}$. На бесконечности эти окрестности разбивают $\mathcal{Q}$ на $(N+1)!$ областей глобального изоморфизма для отображения h. При этом образ каждой из этих областей примерно один и тот же, в том смысле что $\sigma(q) \approx \sigma(Mq)$, $M \in \mathcal{M}_{N+1}$ для $q \in \mathcal{Z}_{t,\varepsilon}(\omega)$, $\omega \in S_{N+1}$ при больших t. В пункте (ii) последней теоремы даётся частичное описание образа.

Малые по норме нечётные потенциалы. Определим пространство нечётных потенциалов

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}^{\text{odd}} = \{q \in \mathbb{R}^{N+1} :\ q_{N+2-n} = -q_n,\ n = 1, \ldots, N\}, \\ &N + 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Введём ортонормированный базис e_m и координаты $\hat{q}_m$ в пространстве $\mathcal{Q}^{\text{odd}}$:

$$\begin{aligned} e_m &= \frac{2^{-\frac{\delta_{k,m}}{2}}}{\sqrt{k}} \left\{ \sin \frac{(2n-1)m\pi}{2k} \right\}_{n=1}^{2k}, \\ q &= \sum_{m=1}^{k} \hat{q}_m e_m, \quad q \in \mathcal{Q}^{\text{odd}}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

здесь δ – символ Кронекера. В случае $q \in \mathcal{Q}^{\text{odd}}$ мы имеем $h_{k-n}(q) = h_{k+n}(q)$, $n = 1, \ldots, k-1$. Поэтому можно считать, что $h : \mathcal{Q}^{\text{odd}} \to \mathbb{R}^k$, взяв $h = \{h_n\}_1^k$. Далее при $q \in \mathcal{Q}^{\text{odd}}$ все ϕ_{2n} тождественно равны нулю, и можно считать, что $\Phi : \mathcal{Q}^{\text{odd}} \to \mathbb{R}^k$ (см. (1.6)). Взяв производную Фреше такого отображения $d_q\Phi$, положим $\mathcal{S} = \{q \in \mathcal{Q}^{\text{odd}} :\ \det d_q\Phi(q) = 0\}$ (см. (1.7)). В итоге для новых h и $\mathcal{S}$ в случае $q \in \mathcal{Q}^{\text{odd}}$ остаются верными утверждение (1.5) и предложение 1.1.

Первая теорема даёт асимптотику h и границ спектральных лакун оператора L при малых $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$. Результат записан для первых k лакун, для остальных же $\lambda_{k-n}^{\pm}(q) = -\lambda_{k+n}^{\pm}(q)$, $1 \leqslant n \leqslant k-1$, $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$.

Теорема 1.5. *При $1 \leqslant n \leqslant k$ имеет место асимптотика*

$$(\lambda_n^{\pm}(q) + 2\cos\frac{\pi n}{2k})^2 = \frac{2^{\delta_{k,n}}}{4k}\hat{q}_n^2 + O(\|q\|^3), \quad \|q\| \to 0, \tag{1.15}$$

$$h_n^2(q) = \frac{2^{\delta_{k,n}} k}{4\sin^2\frac{\pi n}{2k}}\hat{q}_n^2 + O(\|q\|^4), \quad \|q\| \to 0, \tag{1.16}$$

здесь δ – символ Кронекера.

Замечательно то, что каждая координата спектральных данных в отдельности асимптотически ведёт себя независимо и позволяет примерно "найти" соответствующую координату потенциала.

Введём множество потенциалов с одинаковым спектром

$$\mathrm{Iso}(q) = \{p \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}: \quad \sigma(q) = \sigma(p)\}. \tag{1.17}$$

Теорема 1.6. *Пусть $q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}}$ и $\hat{q}_n \neq 0$ для всех $n = 1, \dots, k$. Тогда существует такое $t_0 = t_0(q) > 0$, что $p \notin \mathcal{S}$ и $\#\mathrm{Iso}(p) = 2^k$ для каждого $p \in (0, t_0 q)$.*

То есть можно показать, что около точки 0 листы поверхности S асимптотически ведут себя как ортогональные друг другу плоскости $\{q \in \mathcal{Q}^{\mathrm{odd}} : \hat{q}_n = 0\}$, $n = 1, \dots, k$. На бесконечности же в случае нечётных потенциалов верны результаты, аналогичные теореме 1.4. Различие в поведении наблюдается и в количестве элементов множества Iso, около точки 0 оно в основном состоит из 2^k элементов, а на ∞ в основном из $2^k k!$ элементов.

Литература

1. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Наукова думка, Киев (1977).
2. P. van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi matrices.* — Invent. Math. **37**, No. 1 (1976), 45–81.
3. Y. Last, *On the measure of gaps and spectra for discrete 1D Schrodinger operators.* — Comm. Math. Phys. **149**, No. 2 (1992), 347–360.
4. E. Korotyaev, I. Krasovsky, *Spectral estimates for periodic Jacobi matrices.* — Comm. Math. Phys. **234**, No. 3 (2003), 517–532.
5. L. Perkolab, *An inverse problem for a periodic Jacobi matrix.* — Teor. Funk. Funk. Anal. Prilozh. **42** (1984), 107–121.

Korotyaev E., Kutsenko A. Inverse problem for the discrete periodic Schrödinger operator.

We study the isospectral sets for the discrete 1D Schrödinger operator on $\mathbb{Z}$ with a N+1 periodic potential. We show that for small odd potentials the isospectral set consists of $2^{(N+1)/2}$ elements, while for the large potentials the isospectral set consists of $(N+1)!$ elements. Moreover, the asymptotics of the end of the spectrum of the Schrödinger operator for small (and large) potentials are determined.

Institut für Mathematik,
Humboldt Universität zu Berlin, Germany

E-mail: ek@mathematik.hu-berlin.de

Поступило 20 апреля 2004 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Institut für Mathematik,
Universität Potsdam

E-mail: kucenko@math.uni-potsdam.de