Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

А. А. Меклер

О ПОЛУГРУППЕ МОДУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ С ОПЕРАЦИЕЙ ИНВОЛЮЦИИ

Заметка посвящена некоторым свойствам квазивыпуклых функций и их композиций. Функции предполагаются заданными на некотором отрезке I, содержащем 0 или ∞; в частности, I может быть положительной полуосью $\mathcal{R}_+$.

Определение 1. *Положительная функция $\phi(t)$, $t \in I$, называется квазивогнутой, если и она и двойственная с ней функция $\phi^{\perp}(t) := t/\phi(t)$ возрастают.*

Квазивогнутые функции играют важную роль в теории аппроксимации (модули непрерывности), в интерполяции линейных операторов (конструкция Кальдерона–Лозановского), в теории операторов (норма операторов растяжения и индексы Бойда) и в изучении геометрических свойств симметричных (перестановочно инвариантных) пространств измеримых функций, заданных на одном и том же отрезке I с обычной мерой Лебега.

Так как вдали от 0 и ∞ все такие функции эквивалентны, интересно лишь их поведение вблизи этих крайних точек. Более того, вводя преобразование $\phi \longmapsto \psi$ с помощью формулы $\psi(u) = u\phi(1/u)$, мы всегда можем свести изучение свойств функции ϕ вблизи ∞ к изучению соответствующих свойств функции ψ вблизи нуля (или наоборот). Поэтому в дальнейшем мы занимаемся лишь квазивогнутыми функциями на отрезке $I = [0, 1]$.

Напомним, что две функции F и G называются *эквивалентными* (запись $F \sim G$), если они определены на одном множестве Q и существует постоянная $c \geq 1$ такая, что $c^{-1}G(t) \leq F(t) \leq cG(t)$ при всех $t \in Q$.

Всякая положительная возрастающая вогнутая функция на интервале I будет и квазивогнутой. С другой стороны, хорошо известно (см., например, [1]), что всякая квазивогнутая функция ϕ эквивалентна возрастающей вогнутой, например, своей наименьшей вогнутой мажоранте $\widehat{\phi}$,

$$\widehat{\phi}(t) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(t_i) : \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n; \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot t_i = t, \ n \geq 1 \right\}.$$

Можно доказать (см. [1]), что $\phi(t) \leqslant \widehat{\phi}(t) \leqslant 2\phi(t)$, $t \in I$.

Во многих симметричных пространствах E (например, в пространствах Орлича, Лоренца или Марцинкевича, см. [1]) вычисление нормы оператора растяжения $D_s f(t) = f(t/s)$ сводится к анализу норм функций $D_s \chi_{[0,u]}$ (где $\chi_{[0,u]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[0, u]$), а точнее, – к оценкам величины $\sup_{u \in I} \frac{\phi(s \cdot u)}{\phi(u)}$ как функции от s. Здесь $\phi(t) = \phi_E(u) = \|\chi_{[0,u]}\|_E$ – так называемая *фундаментальная функция* симметричного пространства E (см. [1]). Фундаментальная функция всегда квазивогнута [1]; работая над статьей, автор прежде всего имел в виду внести некоторый вклад в изучение поведения вблизи нуля таких неубывающих функций.

Все рассмотренные ниже типы такого поведения очевидным образом будут устойчивы относительно эквивалентности $\sim$. Поэтому без потери общности мы в дальнейшем ограничимся функциями с дополнительными свойствами, делающими работу с ними удобной.

Определение 2. *Вогнутая функция ψ, $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, называется модулярной функций Марцинкевича (кратко, M-функцией), если как ψ, так и функция $\psi^{\perp}(t) := \frac{t}{\psi(t)}$, $0 < t \leq 1$, $\psi^{\perp}(0) = 0$, строго возрастают и непрерывны в нуле.*

Обозначим множество всех M-функций через $\mathbf{M}$. Следует подчеркнуть, что всякая функция $\psi \in \mathbf{M}$ удовлетворяет неравенствам

$$r \cdot \psi(t) \leq \psi(r \cdot t); \quad 0 \leq t, \quad r \leq 1 \tag{1}$$

(см., например, [1]), которые важны для дальнейшего.

Введем классы

$$\mathcal{P}_r = \left\{ \psi \in \mathbf{M} : \lim_{s \to 0} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{\psi(s \cdot t)}{\psi(t)} < 1 \right\},$$

$$\mathcal{P}^r = \left\{ \psi \in \mathbf{M} : \lim_{s\to 0} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{s\cdot\psi(t)}{\psi(s\cdot t)} < 1 \right\},$$

$$\mathcal{P}^{(0)} = \left\{ \psi \in \mathbf{M} : \lim_{n\to\infty} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(t)}{\psi(t/n)} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{P}^{(1)} = \left\{ \psi \in \mathbf{M} : \lim_{n\to\infty} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{n\psi(t/n)}{\psi(t)} < \infty \right\},$$

а также, имея в виду пример $\psi(t) = t^\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, рассмотрим семейство

$$\mathcal{P}_\alpha = \left\{ \psi \in \mathbf{M} : \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(s\cdot t)}{\psi(t)} \sim s^\alpha \right\}, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

(В случае $\alpha = 0$ полагаем $0^0 = 0$.)

Замечание. Все эти классы важны, например, по следующим причинам.

1. Хорошо известно (см., например, [1]), что $\psi \in \mathcal{P}_r$ ($\psi \in \mathcal{P}^r$) *тогда и только тогда*, когда пространство Марцинкевича M_ψ (пространство Лоренца Λ_ψ), порожденное функцией ψ, обладает важным для интерполяции *свойством Харди–Литтлвуда* (его можно выразить так: $\frac{\psi(t)}{t} \in M_\psi$; соответственно, $\frac{\psi(t)}{t} \in \Lambda_\psi$).

2. Из [2, 3] следует, что $\psi \in \mathcal{P}^{(1)}$ *тогда и только тогда*, когда сингулярная часть пространства, двойственного с M_ψ, изоморфна пространству с аддитивной нормой.

3. **Теорема A** (см. [4]). *Пусть φ – M-функция, а $\alpha \in [0,1]$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\varphi \in \mathcal{P}_\alpha$.

(ii) *Существует M-функция $\psi \sim \varphi$, которая регулярно изменяется в нуле с показателем α (см., например, [5]). Последнее означает, что $\lim_{t\downarrow 0} \psi(s\cdot t)/\psi(t) = s^\alpha$ при всех $s \in [0,1]$.*

Нам понадобятся несколько простых утверждений.

Лемма 1. *Если ψ – M-функция, то $\psi \in \mathcal{P}_r$ ($\psi \in \mathcal{P}^r$) тогда и только тогда, когда $\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$ (соответственно, $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} < 2$).*

Доказательство. Это немедленно вытекает из соотношений

$$\frac{\psi(st)}{\psi(t)} = \frac{\psi(st)}{\psi(\frac{st}{2})} \cdot \frac{\psi(\frac{st}{2})}{\psi(t)} \le \frac{\psi(st)}{\psi(\frac{st}{2})} \cdot \frac{\psi(\frac{t}{2})}{\psi(t)},$$

выполняющихся для любых $s, t \in (0,1]$. □

Лемма 2. *Верны равенства* $\mathcal{P}^{(i)} = \mathcal{P}_i$, $i = 0, 1$.

Доказательство. Пусть $c > 1$ – такая постоянная, что $c^{-1}s \le \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} \le cs$, $0 \le s \le 1$. Для заданного $n \ge 1$ возьмем $s \ge n$. Тогда в силу (1) имеем

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{n\psi(t/n)}{\psi(t)} \le \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(s^{-1}t)}{s^{-1}\psi(t)} \le c,$$

откуда $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}^{(1)}$. Обратное включение справедливо по тем же причинам. □

Полугрупповая структура на множестве M

Пусть $U(x,y)$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ – неотрицательная однородная функция, вогнутая по отдельности относительно x и y. Тогда $U(x,y) = yU(x/y, 1)$, где функция $U(t,1)$ вогнута и, следовательно, квазивогнута. Следуя А. П. Кальдерону [6] и Г. Я. Лозановскому [7], для подходящей банаховой пары (E_0, E_1) решеток можно определить промежуточное пространство $U(E_0, E_1)$, которое можно снабдить нормой банаховой решетки:

$$U(E_0,E_1) = \Big\{x \in E_0 + E_1 : \|x\| =$$

$$= \inf\{\lambda, |x| \leqslant \lambda U(x_0, x_1),\ x_i \in E_i, \|x_i\|_{E_i} \leqslant 1,\ i = 0,1\}\Big\}.$$

Для пары (L_1, L_∞) пространство $E := U(L_1, L_\infty)$ будет симметричным с фундаментальной функцией $\phi_E(t) = U(t,1)$.

Применив конструкцию Кальдерона–Лозановского еще раз к паре (E, L_∞) с другой функцией $V(x,y)$ того же типа, получим новое симметричное пространство $F = V(E, L_\infty) = V(U(L_1, L_\infty), L_\infty) = W(L_1, L_\infty)$. Здесь $W(x,y) = V(U(x,y),y)$ и $W(t,1) = V(U(t,1),1)$. Следовательно, фундаментальная функция $\phi_F(t)$ совпадает с $\phi_V(\phi_U(t))$.

Это замечание оправдывает изучение следующей полугрупповой операции на $\mathbf{M}$:

$$\psi \circ \varphi(t) = \psi(\varphi(t)), \quad t \in I.$$

Понятно, что $(\mathbf{M}, \circ)$ – действительно полугруппа. В дальнейшем через ψ, φ обозначаются ее элементы.

Теорема 3. I. *$\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_r$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathcal{P}_r$, $\varphi \in \mathcal{P}_r$.*

II. *$\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_1$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathcal{P}_1$, $\varphi \in \mathcal{P}_1$.*

Доказательство. I. Предположим, что $\psi \in \mathcal{P}_r$, $\varphi \in \mathcal{P}_r$. Тогда найдутся числа $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1/2]$ такие, что $\psi(2t) \geq (1+\varepsilon)\psi(t)$ и $\varphi(2t) \geq (1+\varepsilon)\varphi(t)$ при $0 \leq t \leq \delta$. Применяя (1) к ψ, видим, что

$$\psi\Big(\varphi(2t)\Big) \geq \psi\Big((1+\varepsilon)\varphi(t)\Big) \geq (1+\varepsilon)^2\psi\Big(\varphi(t)\Big)$$

при $t \in [0,\delta]$, так что $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_r$ по лемме 1.

Обратно, пусть $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_r$. Предположим, что $\frac{\varphi(2t_n)}{\varphi(t_n)} \downarrow 1$ для некоторой последовательности $\{t_n\} \subset (0,1/2]$, $t_n \downarrow 0$. Тогда из (1) получаем следующее соотношение для ψ:

$$1 \leq \frac{(\psi\circ\varphi)(2t_n)}{(\psi\circ\varphi)(t_n)} = \frac{\psi\Big(\frac{\varphi(2t_n)}{\varphi(t_n)}\cdot\varphi(t_n)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t_n)\Big)} \leq \frac{\varphi(2t_n)}{\varphi(t_n)} \downarrow 1,$$

а это противоречит лемме 1. Предположим теперь, что $\frac{\psi(2t_n)}{\psi(t_n)} \downarrow 1$ для некоторой последовательности $\{t_n\} \subset (0,1/2]$, $t_n \downarrow 0$. Так как M-функция φ строго возрастает, то существует обратная функция φ^{-1}, которая при этом выпукла на $[0,1]$. Поэтому, если положить $s_n = \varphi^{-1}(2t_n)/2$, то в силу монотонности обеих функций ψ и φ для каждого $n \geq 1$ имеем

$$1 \leq \frac{(\psi\circ\varphi)(2s_n)}{(\psi\circ\varphi)(s_n)} = \frac{\psi(2t_n)}{\psi\Big(\varphi(\frac{\varphi^{-1}(2t_n)}{2})\Big)} \leq \frac{\psi(2t_n)}{\psi\Big(\varphi(\varphi^{-1}(t_n))\Big)} = \frac{\psi(2t_n)}{\psi(t_n)} \downarrow 1.$$

Это снова противоречит лемме 1. Тем самым доказано первое утверждение.

II. В силу (1), здесь нуждается в проверке лишь правое неравенство в соотношении эквивалентности, определяющем класс $\mathcal{P}_1$. Предположим, что ψ, $\varphi \in \mathcal{P}_1$, т.е. $\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\psi(st)}{\psi(t)} \leq c\cdot s$, $\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} \leq c\cdot s$, $s \in [0,1]$, $c > 1$. Тогда для каждого фиксированного $s \in [0,1]$ и каждого $\varepsilon \in (0,1)$ существует число $\delta = \delta(s,\varepsilon) > 0$ такое, что $\frac{\psi(st)}{\psi(t)} \leq c\cdot(1+\varepsilon)\cdot s$, $\frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} \leq c\cdot(1+\varepsilon)\cdot s$ при $0 < t \leq \delta$. Поскольку функция φ непрерывна в нуле, неравенства

$0 < \varphi(t) \le \delta$ тоже выполняются при любом t, $0 < t \le \delta_0 \le \delta$, так что из (1) и монотонности функции ψ получается

$$(\psi \circ \varphi)(st) =$$
$$\psi\Big(\frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}\varphi(t)\Big) \le c \cdot (1+\varepsilon) \cdot \psi\Big(s \cdot \varphi(t)\Big) \le c^2 \cdot (1+\varepsilon)^2 \cdot s \cdot (\psi \circ \varphi)(t)$$

всякий раз, когда $0 < t \le \delta_0$. Отсюда

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{(\psi \circ \varphi)(st)}{(\psi \circ \varphi)(t)} \le c \cdot (1+\varepsilon)^2 \cdot s.$$

Значит, $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_1$.

Предположим теперь, что $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_1$. Тогда для некоторой постоянной $c > 1$ выполняется следующее: для каждого $s \in (0,1]$ существует число $\delta = \delta(s)$ такое, что неравенства $\psi\Big(\varphi(s \cdot t)\Big) \le c \cdot s \cdot \psi\Big(\varphi(t)\Big)$ выполняются для всякого t, $0 \le t \le \delta(s)$.

Если предположить, что $\varphi \notin \mathcal{P}_1$, то можно последовательно выбрать числа s_o, $t_o \in (0,1]$ так, чтобы $s_o \le c^{-2}$, $t_o \le \delta(s_o)$ и $\varphi(s_o \cdot t_o) > c^2 \cdot s_o \cdot \varphi(t_o)$. Поскольку функция ψ строго монотонна, неравенство (1) дает в этом случае

$$cs_o\psi\Big(\varphi(t_o)\Big) \ge \psi\Big(\varphi(s_o t_o)\Big) =$$
$$= \psi\Big(\frac{\varphi(s_o t_o)}{\varphi(t_o)}\varphi(t_o)\Big) > \psi\Big(c^2 s_o \varphi(t_o)\Big) \ge c^2 s_o \psi\Big(\varphi(t_o)\Big).$$

Противоречие.

Если же $\psi \notin \mathcal{P}_1$, то существует число $s_o \in (0,1)$ такое, что $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(s_o \cdot t)}{s_o \cdot \psi(t)} > c$. Выберем $t_o \in (0, \delta(s_o))$ так, чтобы $\frac{\psi(s_o \cdot t_o)}{s_o \cdot \psi(t_o)} > c$. Строгая монотонность непрерывной и вогнутой функции φ позволяет нам положить $t_1 = \frac{\varphi^{-1}(s_o \cdot t_o)}{s_o}$. Так как для M-функции φ неравенство $\frac{\varphi(t)}{t} \ge 1$ очевидным образом выполняется для всякого $t \in [0,1]$, то

$$t_1 = \frac{s_o \cdot t_1}{s_o} \le \frac{\varphi(s_o \cdot t_1)}{s_o} = \frac{s_o \cdot t_o}{s_o} = t_o,$$

так что $t_1 \in (0, \delta(s_o))$. Но так как обе M-функции ψ и φ монотонны, получаем

$$c \geq \frac{\psi\Big(\varphi(s_o t_1)\Big)}{s_o \cdot \psi\Big(\varphi(t_1)\Big)} = \frac{\psi(s_o \cdot t_o)}{s_o \cdot \psi\Big(\varphi(t_1)\Big)} \geq \frac{\psi(s_o \cdot t_o)}{s_o \cdot \psi\Big(\varphi(t_o)\Big)} > c$$

– противоречие. □

Следствие 4. *Обозначим $\overline{\mathcal{P}_r} = \mathbf{M}\backslash\mathcal{P}_r$, $\overline{\mathcal{P}_1} = \mathbf{M}\backslash\mathcal{P}_1$. Тогда $\psi\circ\varphi \in \overline{\mathcal{P}_r}$ ($\psi\circ\varphi \in \overline{\mathcal{P}_1}$) в том и только том случае, если по крайней мере одна из M-функций ψ или φ содержится в $\overline{\mathcal{P}_r}$ (соответственно, в $\overline{\mathcal{P}_1}$).*

Замечание. Следствие 4 интересно с точки зрения статьи [8], в которой было доказано, что на пространстве Марцинкевича M_ψ существует сингулярный симметричный функционал тогда и только тогда, когда $\psi \in \overline{\mathcal{P}_r}$.

Теорема 5. I. *Включение $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}^r$ выполнено, если по крайней мере одна из M-функций ψ и φ содержится в $\mathcal{P}^r$.*

II. *$\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_0$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из M-функций ψ и φ содержится в $\mathcal{P}_0$.*

Доказательство. I. Предположим, что $\psi \in \mathcal{P}^r$, а φ – произвольная M-функция, и покажем, что $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}^r$. Поскольку строго возрастающая и непрерывная M-функция φ обратима и $\varphi(0) = 0$, мы можем положить $\varphi^{-1}(s) = 2t$. Неравенства (1) для φ и монотонность M-функции ψ дают

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi\Big(\varphi(2t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)} = \limsup_{s\downarrow 0} \frac{\psi(s)}{\psi\Big(\varphi(\frac{\varphi^{-1}(s)}{2})\Big)} \leq$$

$$\leq \limsup_{s\downarrow 0} \frac{\psi(s)}{\psi\Big(\frac{\varphi(\varphi^{-1}(s))}{2}\Big)} = \limsup_{s\downarrow 0} \frac{\psi(s)}{\psi(\frac{s}{2})} < 2.$$

Таким образом, $\psi\circ\varphi \in \mathcal{P}^r$ в силу леммы 1. Теперь предположим, что $\varphi \in \mathcal{P}^r$, а ψ – произвольная M-функция, и докажем, что $\psi\circ\varphi \in \mathcal{P}^r$. Из леммы 1 выводим, что $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} := a \in [1, 2)$. Если ε таково, что $a + \varepsilon < 2$, то существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, $0 < \delta < 1/2$, для которого при $0 < t < \delta$ верны оценки

$$\frac{(\psi\circ\varphi)(2t)}{(\psi\circ\varphi)(t)} = \frac{\psi\Big(\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}\varphi(t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)} \leq \frac{\psi\Big((a+\varepsilon)\varphi(t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)} \leq (a+\varepsilon),$$

откуда $\limsup_{t\downarrow 0}\frac{(\psi\circ\varphi)(2t)}{(\psi\circ\varphi)(t)}<2$. Снова применима лемма 1.

Замечание. Бывает так, что $\psi\circ\varphi\in\mathcal{P}^r$ и, тем не менее, $\psi\notin\mathcal{P}^r$, $\varphi\notin\mathcal{P}^r$.

II. В силу монотонности M-функций нам надо проверить лишь левое неравенство в отношении эквивалентности, определяющем класс $\mathcal{P}_0$. Пусть $\psi\in\mathcal{P}_0$, т.е. существует постоянная $c>1$ такая, что $\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\psi(st)}{\psi(t)}\geq c^{-1}$. Так как M-функция φ непрерывна в нуле, в силу формулы (1) для φ и монотонности функции ψ получаем

$$c^{-1}\leq\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\psi\Big(s\cdot\varphi(t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)}\leq\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\psi\Big(\varphi(s\cdot t)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t)\Big)},$$

т.е. $\psi\circ\varphi\in\mathcal{P}_0$. Пусть теперь $\varphi\in\mathcal{P}_0$, т.е. для некоторой постоянной $c>1$ и любого числа $s\in(0,1)$ найдется последовательность $\{t_n=t_n(s)\}\downarrow 0$ такая, что $\frac{\varphi(st_n)}{\varphi(t_n)}\geq c^{-1}$, $n\geq 1$. Зафиксируем число s, $0<s<1$. Из монотонности и из формулы (1) для ψ получаем

$$\frac{(\psi\circ\varphi)(st_n)}{(\psi\circ\varphi)(t_n)}=\frac{\psi\Big(\frac{\varphi(st_n)}{\varphi(t_n)}\varphi(t_n)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t_n)\Big)}\geq$$

$$\geq\frac{\psi\Big(c^{-1}\varphi(t_n)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t_n)\Big)}\geq c^{-1}\frac{\psi\Big(\varphi(t_n)\Big)}{\psi\Big(\varphi(t_n)\Big)}=c^{-1},\ n\geq 1,$$

т.е. $\psi\circ\varphi\in\mathcal{P}_0$.

Обратно, предположим, что $\psi\circ\varphi\in\mathcal{P}_0$. Если верны оба соотношения $\psi\notin\mathcal{P}_0$, $\varphi\notin\mathcal{P}_0$, то существуют последовательности $u_n\downarrow 0$ и $v_n\downarrow 0$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\psi(u_nt)}{\psi(t)}=\lim_{n\to\infty}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(v_nt)}{\varphi(t)}=0.$$

Более того, можно написать

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\psi(s_nt)}{\psi(t)}=\lim_{n\to\infty}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(s_nt)}{\varphi(t)}=0=\lim_{n\to\infty}s_n,$$

где $s_n:=\min(u_n,v_n)$, $n\geq 1$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и зафиксируем последовательно s_{n_ε} и v_ε так, чтобы при $n \geq n_\varepsilon$, $0 < v \leq v_\varepsilon$ выполнялось неравенство $\frac{\psi(s_n \cdot v)}{\psi(v)} \leq \varepsilon$. Поскольку M-функция φ непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 0$, можно выбрать $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ и $u_\varepsilon < v_\varepsilon$ так, чтобы при $m \geq m_\varepsilon$ и $0 < u \leq u_\varepsilon$ выполнялись неравенства $\frac{\varphi(s_m \cdot u)}{\varphi(u)} \leq s_{n_\varepsilon}$, $\varphi(u) \leq v_\varepsilon$. В силу монотонности функции ψ, при этих m и u имеем

$$\frac{(\psi \circ \varphi)(s_m u)}{(\psi \circ \varphi)(u)} = \frac{\psi\Big(\frac{\varphi(s_m u)}{\varphi(u)}\varphi(u)\Big)}{\psi\Big(\varphi(u)\Big)} \leq \frac{\psi\Big(s_{n_\varepsilon}\varphi(u)\Big)}{\psi\Big(\varphi(u)\Big)} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{(\psi\circ\varphi)(s_n t)}{(\psi\circ\varphi)(t)} = 0$ вопреки условию $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_0$. □

Композиция и двойственность для классов эквивалентности

Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{M}$ пространства $\mathbf{M}$ по отношению эквивалентности $\sim$. Класс эквивалентности, содержащий M-функцию ψ, обозначим через Ψ. Очевидно, что композиции двух попарно эквивалентных функций сами эквивалентны, поэтому на $\mathcal{M}$ можно ввести структуру полугруппы: если Ψ, $\Phi \in \mathcal{M}$, обозначим через $\Psi \circ \Phi$ (единственный) элемент множества $\mathcal{M}$, содержащий $\psi \circ \varphi$ для некоторых $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Phi$.

Для произвольной квазивогнутой функции ξ обозначим через ξ_* наименьшую вогнутую мажоранту $\widehat{\xi^\perp}$ для $\xi^\perp$. Очевидно, что $\xi_{**} := (\xi_*)_* \sim \xi$; очевидно также , что $\psi_* \in \mathbf{M}$ всякий раз, когда $\psi \in \mathbf{M}$. Функцию ψ_* будем называть M-функцией, *двойственной* с ψ.

Пусть Ψ – произвольный элемент множества $\mathcal{M}$ и пусть $\psi \in \Psi$. Поскольку $\psi_{**} \sim \psi$, отображение $\psi \mapsto \psi_*$ очевидным образом продолжается до отображения $\Psi \mapsto \Psi_*$ на множестве $\mathcal{M}$, где через Ψ_* обозначим класс эквивалентности, содержащий ψ_*, для произвольной функции $\psi \in \Psi$. Класс Ψ_* называется *двойственным* для Ψ (в $\mathcal{M}$). Отображение $\Psi \longmapsto \Psi_*$, разумеется, является инволюцией на $\mathcal{M}$.

Подмножество $\mathcal{P} \subset \mathbf{M}$ называется *M-свойством*, если $\mathcal{P} = \bigcup_{\psi\in\mathcal{P}} \Psi$ (в $\mathbf{M}$). M-свойство $\mathcal{P}_* = \bigcup_{\psi\in\mathcal{P}} \Psi_*$ называется *двойственным* с $\mathcal{P}$. Ясно, что $\mathcal{P}_{**} = \mathcal{P}$.

Теорема 6. *Множества* $\mathcal{P}_r$ *и* $\mathcal{P}^r$, *а также множества* $\mathcal{P}_\alpha$ *и* $\mathcal{P}_{1-\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$ – *двойственные по отношению друг к другу* M-*свойства. Более того, для всякого* α, $0 \le \alpha \le 1$, *справедливы включения* $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}_r$ (*при* $\alpha \ne 0$) *и* $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}^r$ (*при* $\alpha \ne 1$).

Доказательство. Двойственность между $\mathcal{P}_r$ и $\mathcal{P}^r$ хорошо известна (см., например, [1]). Если $\psi \sim \varphi$, то пространства Марцинкевича, порожденные этими M-функциями, совпадают по составу элементов: $M_\psi = M_\varphi$. Так как свойство $\mathcal{P}_r$ для ψ эквивалентно включению $\frac{\psi(t)}{t} \in M_\psi$, видим, что функции ψ и φ могут принадлежать или нет множеству $\mathcal{P}_r$ только вместе. Таким образом, $\mathcal{P}_r$ является M-свойством; из двойственности между $\mathcal{P}_r$ и $\mathcal{P}^r$ вытекает, что и $\mathcal{P}^r$ – M-свойство.

Все множества $\mathcal{P}_\alpha$, $0 \le \alpha \le 1$, являются M-свойствами, поскольку, очевидным образом, они замкнуты относительно эквивалентности.

Если $\psi \in \mathcal{P}_\alpha$ для некоторого α, $0 \le \alpha \le 1$, то функция φ, регулярно меняющаяся в нуле с показателем α, существование которой гарантируется теоремой A, эквивалентна функции ψ, так что $\varphi^\perp \sim \psi^\perp$. С другой стороны,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\varphi^\perp(s \cdot t)}{\varphi^\perp(t)} = s \cdot \lim_{t \downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{\varphi(s \cdot t)} = s^{1-\alpha},$$

так что верны эквивалентности $\psi^\perp \sim \psi_* \sim \varphi_* \sim \varphi^\perp$. Следовательно, $\psi_* \in \mathcal{P}_{1-\alpha}$.

Теперь в силу определений M-свойств $\mathcal{P}_r$, $\mathcal{P}^r$ и $\mathcal{P}_\alpha$, $0 \le \alpha \le 1$, включения $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}_r$ (при $\alpha \ne 0$) и $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}^r$ (при $\alpha \ne 1$) сразу следуют из теоремы A. □

Замечание. Включение $\mathcal{P}^{(1)} \subset \mathcal{P}_r$ (эквивалентное включению $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_r$ в силу леммы 2) было отмечено в [3].

Было бы интересно напрямую (с помощью какой-нибудь формулы) связать композицию и двойственность в $\mathcal{M}$.

Литература

1. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*. М. Наука, 1978.
2. Г. Я. Лозановский, *О представлении линейных функционалов в пространствах Марцинкевича*. — Известия ВУЗов, Математика **1** (1978), 43–53.

3. Ю. А. Абрамович, *О полу-M-пространствах де Йонга и их применении к пространствам Марцинкевича.* — Функц. анализ, Межвуз. сборник научн. трудов, Ульяновск (1979), 3–10.
4. E. V. Abakumov, A. A. Mekler, *A concave regularly varying leader for equiconcave functions.* — J. Math. Anal. Appl. **187** (1994), 943–951.
5. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variations.* Cambridge University Press, Cambridge (1987).
6. A. P. Calderon, *Spaces between L_1 and L_∞, and the theorem of Marcinkiewicz.* — Studia Math. **26** (1966), 273–295.
7. Г. Я. Лозановский, *О банаховых структурах Кальдерона.* — Докл. АН СССР **172**, No. 5 (1967), 1018–1020.
8. P. G. Dodds, B. de Pagter, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, *Symmetric functionals and singular traces.* — Positivity **2** (1998), 47–75.

Mekler A. A. On a semigroup of Marcinkiewicz modulars with involution.

The set $\mathbf{M}$ of all concave Marcinkiewicz modulars on $[0,1]$ is a semigroup with respect to the usual composition of functions. It is established that some properties of modulars (which are of importance in interpolation and in general Banach space theory) distinguish subsets of $\mathbf{M}$ that form ideals of the semigroup. These ideals turn out to be in a natural duality relation, which is also studied.

Johnsbacher Weg 18,
01279, Dresden, FRG
E-mail: alexandre.mekler@freenet.de

Поступило 20 ноября 2004 г.