Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

А. А. Рахимов

ДЕЙСТВИЕ ГРУПП НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФАКТОРАХ ТИПА III$_\lambda$, $\lambda \neq 1$

1. Введение

В настоящее время, благодаря теории действия (конечных) групп на операторных алгебрах, структура алгебр фон Неймана (W^*-алгебр) изучена достаточно хорошо. В частности, получена полная классификация инъективных (или, что эквивалентно, гиперфинитных) W^*-факторов. В связи с этим активно продолжается изучение действия специальных групп на операторных алгебрах, в частности, на W^*-алгебрах. Несмотря на то, что теория вещественных W^*-алгебр и йордановых банаховых алгебр (JW-алгебр) в основном построена на основе перехода к комплексной обертывающей W^*-алгебре, результаты П. Стейси [1] и Ш. Усманова [2, 3] о дискретном и непрерывном разложении вещественных факторов типа III$_\lambda$ показывают, что изучение и описание действия групп на вещественных W^*-алгебрах также является актуальной темой. Поэтому в последнее время, наряду с теорией действия групп на W^*-алгебрах (см. [4–9]), развивается и теория действия групп на вещественных W^*-алгебрах. Изучены и описаны действия конечных (циклических) групп на конечных вещественных факторах (см. [10–12]) и действие компактной абелевой группы на полуконечном инъективном вещественном факторе [13]. В настоящей работе мы рассматриваем действие групп на чисто бесконечных вещественных факторах. Получена классификация (по модулю сопряженности с точностью до коцикла) действий счетной аменабельной группы G на инъективном вещественном факторе $\mathcal{R}$ типа III$_\lambda$ ($\lambda \neq 1$), у которого порождающий инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\alpha_{\mathcal{R}}$ имеет модуль, равный 1. А именно, для данного действия θ группы G на $\mathcal{R}$, по аналогии с комплексным случаем, определены четыре инварианта: групповой $N(\theta)$, характеристический χ_θ и модулярные $\mathrm{mod}\,(\theta)$ и ν_θ, и доказано, что действия θ и β группы G на $\mathcal{R}$ сопряжены с точностью до коцикла тогда и только тогда, когда соответствующие инварианты совпадают. Для факторов типа III_1 – как комплексных, так и вещественных – нет дискретного разложения по скрещенному произведению, поэтому классификация действий групп на факторах имеет совершенно иную природу (см. [14]). В данной работе мы не будем рассматривать случаи типа III_1.

2. Предварительные сведения

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на комплексном гильбертовом пространстве H. Слабо замкнутая комплексная $*$-подалгебра M с единицией $\mathbb{I}$ в $B(H)$ называется *W^*-алгеброй*. Вещественная $*$-подалгебра $\mathfrak{R}$ с единицей $\mathbb{I}$ в $B(H)$ называется *вещественной W^*-алгеброй*, если она замкнута в слабой операторной топологии и $\mathfrak{R} \bigcap i\mathfrak{R} = \{0\}$. Вещественная W^*-алгебра $\mathfrak{R}$ называется (вещественным) *фактором*, если в ее центре $Z(\mathfrak{R})$ лежат только элементы вида $\lambda\mathbb{I}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Скажем, что вещественная W^*-алгебра $\mathfrak{R}$ имеет *тип* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, I_∞, II_1, II_∞, III_λ $(0 \le \lambda \le 1)$, если обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(\mathfrak{R})$ (т.е. наименьшая W^*-алгебра, содержащая $\mathfrak{R}$) имеет соответствующий тип в обычной классификации W^* -алгебр.

Пусть R комплеснкая или вещественная W^*-алгебра в $B(H)$. Алгебра R называется *инъективной*, если существует проекция P из $B(H)$ на R, удовлетворяющая условиям $\|P\| = 1, P(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$. Это эквивалентно тому, что проекция R гиперфинитна, т.е. существует возрастающая последовательность $\{R_n\}$ матричных подалгебр алгебры R, содержащих $\mathbb{I}$, такая, что объединение $\bigcup_n R_n$ слабо плотно в R. Линейное отображение α алгебры R в себя называется *$*$-автоморфизмом* (соответственно, *$*$-антиавтоморфизмом*), если $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ и $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ (соответственно, $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$) для всех $x, y \in R$. Отображение α называется *инволютивным*, если $\alpha^2 = \mathrm{id}$. $*$-Автоморфизм α называется: *внутренним*, если существует унитарный элемент $u \in R$ такой, что $\alpha(x) = \mathrm{Ad}\, u(x) = uxu^*$ для всех $x \in R$; *центрально тривиальным*, если $\alpha(x_n) - x_n \to 0$ $*$-сильно при $n \to \infty$ для любой центральной последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Пусть $\mathrm{Aut}(R)$ – группа всех $*$-автоморфизмов алгебры R, $\mathrm{Int}(R)$ – подгруппа всех внутренних ее $*$-автоморфизмов и $Ct(R)$ – подгруппа всех центрально тривиальных $*$-автоморфизмов. Линейный функционал ω на R называется *положительным*, если $\omega(x^*x) \ge 0$ для всех $x \in R$. Положительный линейный функционал ω на R с $\|\omega\| = 1$ называется *состоянием*. Пусть R_+ - положительная часть алгебры R. *Весом* на R называется положительно однородная аддтивная функция $\omega : R_+ \to [0, \infty]$.

Вес ω называется:

точным, если для любого $x \in R_+$ из $\omega(x) = 0$ следует, что $x = 0$;

нормальным, если для любой сети $\{x_\alpha\}$ в R, возрастающей к элементу x, имеет место равенство $\omega(x) = \sup_\alpha \omega(x_\alpha)$;

конечным, если $\omega(x) < \infty$ для всех $x \in R_+$;

полуконечным, если для любого $x \in R_+$ существует сеть элементов $\{y_\alpha\} \subset R_+$ таких, что $\omega(y_\alpha) < \infty$ и $y_\alpha \to x$ в σ-слабой топологии;

следом, если $\omega(xy) = \omega(yx)$ для $x, y \in R_+$.

Пусть G – группа. *Действием* группы G на алгебре R называется гомоморфизм $\theta : G \to \mathrm{Aut}(R)$. Действия θ и θ' группы G на R называются *сопряженными*, если существует $*$-автоморфизм σ такой, что $\sigma\theta_g\sigma^{-1} = \theta'_g$ для всех $g \in G$. Отображение $w : G \to U(R)$ называется *унитарным θ-коциклом*, если $w_g\theta_g(w_h) = w_{gh}$, $g, h \in G$. Действия θ и θ' называются *сопряженными с точностью до коцикла*, если существуют $*$-автоморфизм σ и унитарный θ'-коцикл $w = \{w_g\}$ такие, что $\sigma\theta_g\sigma^{-1} = \mathrm{Ad}\, w_g \cdot \theta'_g$ для всех $g \in G$.

Пусть N – нормальная подгруппа в G, A – G-модуль, который действует на N тождественно. Пусть $Z(G, N, A)$ – абелева группа всех пар (λ, μ), $\lambda : G \times N \to A$, $\mu : N \times N \to A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\lambda(g, hk) - \lambda(g, h) - \lambda(g, k) = \mu(h, k) - g\mu(g^{-1}hg, g^{-1}kg)$,

2) $\lambda(gg', h) = \lambda(g, h) + g\lambda(g', g^{-1}hg)$,

3) $\lambda(h, k) = \mu(h, h^{-1}kh) - \mu(k, h)$,

4) $\mu(f, h) + \mu(fh, k) = \mu(h, k) + \mu(f, hk)$,

5) $\lambda(\mathbf{1}, h) = \lambda(g, \mathbf{1}) = \mu(\mathbf{1}, h) = \mu(h, \mathbf{1}) = 0$, $g, g' \in G$, $f, h, k \in N$.

Рассмотрим $C_l(G, A)$ – пространство l-коцепей отображений из $G^l = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{l}$ в A. Определим дифференцирование $\delta : C_l(G, A) \to C_{l+1}(G, A)$ формулой

$$(\delta c)(g_1, g_2, \ldots, g_l, g_{l+1}) = g_1 c(g_2, g_3, \ldots, g_l, g_{l+1}) - c(g_1 \cdot g_2, \ldots, g_l, g_{l+1})$$

$$+c(g_1, g_2 \cdot g_3, \dots, g_l, g_{l+1}) - \dots + (-1)^l c(g_1, g_2, \dots, g_l \cdot g_{l+1})$$
$$-(-1)^l c(g_1, g_2, \dots, g_l).$$

Если подгруппа $N \subset G$ действует на A тождественно и f – 2-коцикл, т.е. $f \in C_2(G, A)$ и $\delta f = 0$, то функции

$$\lambda(g, n) = f\left(g, g^{-1}ng\right) - f(n, g) \ (g \in G,\ n \in N),$$
$$\mu(n, m) = f(n, m) \ (n, m \in N)$$

удовлетворяют соотношениям 1)–5). Пусть $B(G, N, A)$ – множество всех таких пар (λ, μ). Тогда $B(G, N, A)$ является подгруппой в $Z(G, N, A)$. Положим $\Lambda(G, N, A) = Z(G, N, A)/B(G, N, A)$.

Пусть $\Re$ – вещественная W^*-алгебра с центром $Z(\Re)$, а θ – действие, $\theta : G \to \mathrm{Aut}(\Re)$. Положим $N(\theta) = \{g \in G : \theta_g \in \mathrm{Int}(\Re)\}$. Легко видеть, что $N(\theta)$ является нормальной подгруппой в G. Поскольку $N(\theta)$ действует тождественно на группе $U(Z(\Re))$ унитарных элементов в $Z(\Re)$, мы можем рассматривать группу $\Lambda(G, N(\theta), U(Z(\Re)))$. Для каждого $h \in N(\theta)$ пусть u_h – унитарный элемент, порождающий θ_h, т.е. $\theta_h(x) = \mathrm{Ad}\, u_h(x) = u_h x u_h^*$, $x \in \Re$. Легко видеть [12], что существуют функции $\mu(h, k)$: $N(\theta) \times N(\theta) \to U(Z(\Re))$ и $\lambda(g, h)$: $G \times N(\theta) \to U(Z(\Re))$ такие, что

$$\theta_g\left(u_{g^{-1}hg}\right) = \lambda(g, h) u_h, \quad u_h u_k = \mu(h, k) u_{hk}$$

для $g \in G$, $h, k \in N(\theta)$. Класс $[(\lambda, \mu)]$ из $\Lambda(G, N(\theta), U(Z(\Re)))$ называется *характеристическим инвариантом* действия θ и обозначается через χ_θ.

3. Действия групп на вещественном факторе

Пусть $\Re$ – вещественный фактор и $\mathcal{A}$ – абелева вещественная W^*-алгебра. Рассматривается пара $(\mathcal{A}\overline{\otimes}\Re, \omega)$, где ω состояние на $\mathcal{A}\overline{\otimes}\Re$. Пусть G – отделимая локально компактная группа и θ – действие группы G на $\mathcal{A}\overline{\otimes}\Re$. Докажем следующий вспомогательный результат.

Предложение 1. *Существуют отделимый G-компакт X с квазиинвариантной мерой m (с барицентром ω), борелевский гомоморфизм $\theta' : G \times X \to \mathrm{Aut}(\Re)$ и изоморфизм $\kappa : \mathcal{A}\overline{\otimes}\Re \to \int\limits_X \Re dm(x)$ такие, что для любых $T \in \mathcal{A}\overline{\otimes}\Re$ и $g \in G$ имеет место равенство*

$$\kappa(\theta_g(T)) = \int\limits_X \theta'_{(g, g^{-1}x)}(\kappa(T)(g^{-1}x)) dm(x). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть A – σ-слабо плотная унитально сепарабельная вещественная C^*-подалгебра алгебры $\mathcal{A}\overline{\otimes}\Re$ такая, что

(i) $\theta_g(A) = A$, $g \in G$,

(ii) действие θ группы G на A непрерывно по норме,

(iii) $\mathbf{A} := A \cap (\mathcal{A} \otimes \mathbf{R})$ σ-плотно в $\mathcal{A} \otimes \mathbf{R}$, здесь множество вещественных чисел $\mathbf{R}$ рассматривается как абелева вещественная W^*-алгебра.

Пусть X – спектр алгебры $\mathbf{A}$. Тогда для $g \in G$ действие $\theta_g|_{\mathbf{A}}$ естественно индуцирует действие на X. Таким образом, X есть отделимое компактное G-пространство с квази-инвариантной мерой m (с барицентром ω) такой, что $L^\infty(X, m) \cong \mathcal{A}$. При этом само-представление $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ можно выразить так: $\int\limits_X \pi_x dm(x)$ (см. [15, теорема 4.8.25]). Из этого представления получаем, что для каждой пары $(g, x) \in G \times X$ существует изоморфизм $\theta'_{(g,x)} : \pi_x(A) \to \pi_{gx}(A)$ такой, что

$$\theta'_{(g,x)} \cdot \pi_x(a) = \pi_{gx}(\theta_g(a)) \quad \text{для} \quad a \in A.$$

Так как для почти всех $x \in X$ вещественная W^*-алгебра $\pi_x(A)''$ изоморфна $\Re$ (этот изоморфизм обозначим через σ_x), то для почти всех $(g, x) \in G \times X$ отображение $\sigma_{gx}^{-1}\theta'_{(g,x)}\sigma_x$ продолжается до автоморфизма алгебры $\Re$. Таким образом, гомоморфизму $\theta : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A}\overline{\otimes}\Re)$ соответствует определенный борелевский гомоморфизм $\theta' : G \times X \to \mathrm{Aut}(\Re)$, кроме того, отображение

$$\kappa(a) = \int\limits_X \sigma_x(\pi_x(a))dm(x) \quad (a \in A)$$

отождествляет алгебры $\mathcal{A}\overline{\otimes}\Re$ и $\int\limits_X \Re dm(x)$ и удовлетворяет условию (1). $\square$

Пусть N – нормальная подгруппа группы G и θ – действие группы G на $\mathcal{A}$. Аналогично группе $\Lambda(G, N(\theta), A)$ (см. §2) определим группу $\Lambda_\theta(G, N, U(\mathcal{A}))$ следующим образом. Обозначим через $Z_\theta(G, N, U(\mathcal{A}))$ группу всех пар (λ, μ) борелевских гомоморфизмов $\lambda : N \times G \to U(\mathcal{A})$, $\mu : N \times N \to U(\mathcal{A})$, удовлетворяющих следующим условиям:

1′) $\quad \theta_g(\lambda(g^{-1}ng, g'))\lambda(n, g) = \lambda(n, gg')$, 2′) $\lambda(m,g)\theta_m(\lambda(n,g))\lambda(mn,g)^* = \theta_g(\mu(g^{-1}mg, g^{-1}ng))\mu(m,n)^*$,

3′) $\lambda(n,m) = \mu(m, m^{-1}nm)\mu(n,m)^*$,

4′) $\mu(m,n)\mu(mn,k) = \theta_m(\mu(n,k))\mu(m,nk)$,

5′) $\lambda(1,g) = \lambda(m,1) = \mu(1,n) = \mu(m,1) = 0$

для всех $g, g' \in G$, $n, m, k \in N$.

Пусть $B_\theta(G,N,U(\mathcal{A}))$ – множество пар $(\delta_1\gamma, \delta_2\gamma)$ таких, что борелевское отображение $\gamma : N \times G \to U(\mathcal{A})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(\delta_1\gamma)(m,n) = \gamma(m)\theta_m(\gamma(n))\gamma(mn)^*, \quad (\delta_2\gamma)(n,g) = \theta_g(\gamma(g^{-1}ng))\gamma(n)^*$$

для всех $g \in G$, $n, m \in N$. Тогда $B_\theta(G,N,U(\mathcal{A}))$ является подгруппой группы $Z_\theta(G,N,U(\mathcal{A}))$. Положим $\Lambda_\theta(G,N,U(\mathcal{A})) = Z_\theta(G,N,U(\mathcal{A}))/B_\theta(G,N,U(\mathcal{A}))$.

Далее, предположим, что N – дискретная подгруппа группы G, действующая тождественно на $\mathcal{A}$. Пусть $\{T_g : g \in G\}$ – точечная реализация тройки $\{\mathcal{A}, G, \theta\}$ на компактном G-пространстве (X,m), полученная в предложении 1. Пусть $Z_G(N)$ – центр $N(\theta)$ в G. Для $x \in X$ выберем $h(x) \in Z_G(N)$ таким образом, что $T^{-1}_{h(x)}x = \pi_x$ и отображения $x \to h(x)$ и $x \to \pi_x$ измеримы (более подробно см. в [16, 17]). Определим гомоморфизм $p : G \times_T X \to G \times X$ так:

$$p(g,x) = (h(T_g x)^{-1} g h(x), \quad \pi_x).$$

Далее, для каждого класса $[(\lambda,\mu)] \in \Lambda(G \times X, N, \mathbf{T})$ определим класс $[(\overline{\lambda}, \overline{\mu})] \in \Lambda_\theta(G,N,U(\mathcal{A}))$ следующим образом. Для $(n,g) \in N \times G$ и $(l,k) \in N \times N$, унитарный элемент $\overline{\lambda} \in \mathcal{A} = L^\infty(X,m)$ определяется по формуле $x \mapsto \lambda(p(n, T_g x), p(g,x))$, а унитарный элемент $\overline{\mu}$ – по формуле $x \mapsto \mu(p(l,x), p(k,x))$. Нетрудно показать[1], что отображение $\overline{p} : (\lambda,\mu) \to (\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ является изоморфизмом между $\Lambda(G \times X, N, \mathbf{T})$ и $\Lambda_\theta(G,N,U(\mathcal{A}))$, т.е.

$$\Lambda(G \times X, N, \mathbf{T}) \cong \Lambda_\theta(G,N,U(\mathcal{A})). \tag{2}$$

Пусть теперь G – счетная дискретная аменабельная группа, $\mathcal{R}_{0,1}$ – единственный (с точностью до изоморфизма) вещественный инъективный фактор типа II_∞.

[1] Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.3 в [9].

Пусть в дальнейшем θ – действие группы $G \times \mathbf{R}$ на $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{R}_{0,1}$, удовлетворяющее следующим условиям:
(a) $\{\theta_t : t \in \mathbf{R}\}$ является эргодическим на $\mathcal{A}$;
(b) существует точный нормальный полуконечный след tr на $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{R}_{0,1}$ такой, что

$$\operatorname{tr} \cdot \theta_g = \operatorname{tr} \quad \text{для} \quad g \in G,$$

$$\operatorname{tr} \cdot \theta_t = e^{-t} \operatorname{tr} \quad \text{для} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть β – действие группы $G \times \mathbf{R}$ на $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{R}_{0,1}$, удовлетворяющее условиям* (a), (b). *Если действия θ и β сопряжены на абелевой части алгебры (т.е. на $\mathcal{A}$) и эквивалентны их характеристические инварианты, то они сопряжены с точностью до коцикла на $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{R}_{0,1}$.*

Доказательство. Положим $H = G \times \mathbf{R}$. Пусть θ' и $\beta' : H \times X \to \operatorname{Aut}(\mathcal{R}_{0,1})$ – борелевские гомоморфизмы, построенные в предложении 1. Пусть $\overline{\theta}$ (соответственно, $\overline{\beta}$) – сужение действия θ' (соответственно, β') на $H \times X|_B$, где B – база для $\mathbf{R}$-действия на X. В силу (2) и условия теоремы действия $\overline{\theta}$ и $\overline{\beta}$ имеют одинаковые характеристические инварианты.

Теперь определим[2] модулярный инвариант $\overline{\theta}$ (модулярный инвариант $\overline{\beta}$ определяется аналогично). Выберем борелевское поле точных нормальных полуконечных следов на $\mathcal{R}_{0,1}$, т.е. выберем элемент $b \in B$, для которого $b \to \operatorname{tr}_b$ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{R}_{0,1}$. Положим

$$\delta_{\overline{\theta}}(g,b) \operatorname{tr}_b = \operatorname{tr}_{gb} \cdot \overline{\theta}_{(g,b)}, \quad (g,b) \in H \times X|_B.$$

Для $x \in X$ определим также $\operatorname{tr}_x = \operatorname{tr}_{\pi_x} \cdot \theta'^{-1}_{(h(x),\pi_x)}$. Для каждого $x \in X$ выберем положительное число $n(x)$ таким, чтобы для следа tr из (b) выполнялось равенство

$$\operatorname{tr} = \int\limits_X \operatorname{tr}_x n(x) dm(x). \tag{3}$$

Непсредственно проверяется, что

$$\operatorname{tr}_{gx} \cdot \theta'_{(g,x)} = \delta_{\overline{\theta}}(p(g,x)) \operatorname{tr}_x, \quad g \in H$$

[2] После леммы 3 мы дадим общее определение модулярного инварианта.

(ср. с предложением 4.9 из [18]). Определим $\psi : G \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ формулой $\psi(g,s) = e^{-s}$, $g \in G$, $s \in \mathbf{R}$. В силу (b) справедливо равенство $\operatorname{tr} \cdot \theta_g = \psi(g) \operatorname{tr}$, $g \in H$. Отсюда, используя (3), получаем

$$\psi(g) \int\limits_X n(x) \operatorname{tr}_x dm(x) = \operatorname{tr} \cdot \theta_g = \int\limits_X k(gx) \operatorname{tr}_{gx} \theta'_{(g,x)} dm(gx)$$

$$= \int\limits_X n(gx) \delta_{\overline{\theta}}(p(g,x)) n(x)^{-1} \rho'(g,x) n(x) \operatorname{tr}_x dm(x),$$

где $\rho'(g,x) = (dm \cdot g/dm)(x)$ – коцикл Радона–Никодима группы $G \times \mathbf{R}$ на (X,m). Следовательно,

$$\psi(g) = k(gx) \delta_{\overline{\theta}}(p(g,x)) n(x)^{-1} \rho'(g,x) n(x), \quad g \in H, \quad x \in X.$$

Имея аналогичное равенство для $\overline{\beta}$, находим, что $\delta_{\overline{\theta}} = \delta_{\overline{\beta}}$ в $H^1(H \times \mathbf{R}|_B, \mathbf{R}_+)$.

Теперь, так как $\xi_{\overline{\theta}} = \xi_{\overline{\beta}}$ и $\delta_{\overline{\theta}} = \delta_{\overline{\beta}}$, то в силу вещественного аналога результата Окнеану [19, Теорема 2], получаем сопряженность этих действий с точностью до коцикла; иными словами, существуют отображение $\overline{\sigma} : B \to \operatorname{Aut}(\mathcal{R}_{0,1})$ и унитарный $\overline{\beta}$-коцикл $\overline{v} \in Z^1_{\overline{\theta}}(H \times X|_B, U(\mathcal{R}_{0,1}))$ такие, что

$$\overline{\sigma}_{gb} \cdot \overline{\theta}_{(g,b)} \cdot \overline{\sigma}_b^{-1} = \operatorname{Ad} \overline{v}_{(g,b)} \cdot \overline{\beta}_{(g,b)}, \quad (g,b) \in H \times X|_B. \tag{4}$$

Определим отображение $\sigma' : X \to \operatorname{Aut}(\mathcal{R}_{0,1})$ и унитарный β'-коцикл v' формулами

$$\sigma'_x = \overline{\beta}_{(h(x),\pi_x)} \cdot \overline{\sigma}_{\pi_x} \cdot \overline{\theta}^{-1}_{(h(x),\pi_x)}, \quad v'_{(g,x)} = \beta_{h(gx),\pi_{gx}}(\overline{v}(p(g,x))).$$

В силу (4) имеем

$$\sigma'_{gx} \cdot \theta'_{(g,x)} \cdot {\sigma'}_x^{-1} = \operatorname{Ad} v'_{(g,x)} \cdot \beta'_{(g,x)}. \tag{5}$$

Положим

$$\sigma = \int\limits_X \sigma'_x dm(x) \quad i \quad v_g = \int\limits_X v'_{(g,x)} dm(x), \quad g \in G \times \mathbf{R}.$$

Из (5) получаем, что $\sigma \cdot \theta_g \cdot \sigma^{-1} = \operatorname{Ad} v_g \cdot \beta_g$. Непосредственно показывается, что $\{v_g\}$ является унитарным β-коциклом. □

Напомним [20], что всякая непрерывная вещественная W^*-алгебра $\Re$ порождает естественный инволютивный $*$-антиавтоморфизм α обертывающей W^*-алгебры $\mathcal{U}(\Re)$, обладающий тем свойством, что $\Re = \{x \in \mathcal{U}(\Re) : \alpha(x) = x^*\}$, и обратно, если на некоторой W^*-алгебре M задан некоторый инволютивный $*$-антиавтоморфизм α, то множество $(M, \alpha) = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$ является вещественной W^*-алгеброй. Поэтому для удобства в некоторых случаях вещественную W^*-алгебру $\Re$ обозначаем через (M, α).

Пусть M – W^*-алгебра, α – инволютивный $*$-антиавтоморфизм алгебры M и $G = N \times_\gamma F$ – полупрямое произведение локально компактной группы N с группой F по действию $\gamma : F \to \mathrm{Aut}(N)$. Пусть $\theta : G \to \mathrm{Aut}(M, \alpha)$ – сильно непрерывное действие группы G на (M, α) и пусть

$$(\pi_\theta(x)\xi)(n) = \theta_n^{-1}(x)\xi(n), \quad x \in (M, \alpha),$$
$$(\lambda_\theta(k)\xi)(l) = \xi(k^{-1}l), \quad k, l \in N, \quad \xi \in L_2(N, H) \text{ —}$$

операторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(N, H)$ и порождающие скрещенное произведение $(M, \alpha) \times_\theta N$. Имея действие θ, построим естественное действие θ' группы F на $(M, \alpha) \times_\theta N$ следующим образом:

$$\theta'_f(\pi_\theta(x)) = \pi_\theta(\theta_f(x)), \quad x \in (M, \alpha), \quad f \in F;$$
$$\theta'_f(\lambda_\theta(n)) = \lambda_\theta(\gamma_f(n)) = \lambda_\theta(fnf^{-1}), \quad n \in N. \tag{6}$$

Пусть действия θ и β группы G на (M, α) вещественно сопряжены с точностью до коцикла, т.е. существуют α-инвариантный $*$-автоморфизм σ (т.е. $\sigma \cdot \alpha = \alpha \cdot \sigma$) алгебры M и унитарный β-коцикл $u = \{u_g\}_{g \in G}$ такие, что

$$\alpha(u_g) = u_g^*, \quad \sigma \cdot \theta_g \cdot \sigma^{-1} = \mathrm{Ad}\, u_g \cdot \beta_g, \quad g \in G. \tag{7}$$

Определим унитарный оператор U в пространстве $L_2(N, H)$ равенством

$$(U\xi)(n) = u(n^{-1})^*\xi(n), \quad \xi \in L_2(N, H), \quad n \in N,$$

и положим $\sigma' = \mathrm{Ad}\, U$. Непосредственно проверяется, что σ' является изоморфизмом между алгебрами $(M, \alpha) \times_\theta N$ и $(M, \alpha) \times_\beta N$ и выполняются соотношения

$$\sigma'(\pi_\theta(x)) = \pi_\beta(x), \qquad x \in (M, \alpha)$$
$$\sigma'(\lambda_\theta(n)) = \pi_\beta(u(n))\lambda_\beta(n), \qquad n \in N.$$

Для $f \in F$ положим $v_f = \pi_\beta(u(f))$. Используя (6) и (7), легко показать, что элемент v_f является вещественным унитарным β'-коциклом и выполняется условие $\sigma' \cdot \theta'_f \cdot {\sigma'}^{-1} = \mathrm{Ad}\, v_f \cdot \beta'_f$. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 2. *Если действия θ и β группы $G = N \times_\gamma F$ на (M, α) вещественно сопряжены с точностью до коцикла, то действия θ' и β' группы F на вещественных W^*-алгебрах $(M, \alpha) \times_\theta N$ и $(M, \alpha) \times_\beta N$ соответственно также вещественно сопряжены с точностью до коцикла.*

Теперь напомним понятия потока весов и фундаментального гомоморфизма бесконечного фактора (см. [21]). Пусть M – W^*-алгебра типа II или III с сепарабельным M_*, $W(M)$ – множество весов на M^+, $W_{nsf}(M)$ – множество всех точных нормальных полуконечных весов на M^+. Носителем $s(\varphi)$ веса φ называется проектор $\sigma(\varphi) = \cap\{p \in M : p^2 = p, \varphi(\mathbb{1} - p) = 0\}$. Два веса φ и ψ *эквивалентны*, если существует унитарный оператор или частичная изометрия $u \in M$ такая, что

$$u^* u = s(\varphi), \quad u u^* = s(\psi), \quad \varphi(x) = \psi(u x u^*), \quad x \in M^+.$$

Если профакторизовать $W(M)$ по этому отношению эквивалентности, то множество классов эквивалентности будет изоморфно булевой алгебре всех σ-конечных проекторов некоторой коммутативной W^*-алгебры $\mathcal{P}_M$, то есть существует отображение p_M из $W(M)$ в σ-конечные проекторы из $\mathcal{P}_M$ такое, что:

$p_M(\varphi + \psi) = p_M(\varphi) \cup p_M(\psi)$, если $s(\varphi) \cdot s(\psi) = 0$,

$p_M(\varphi) = p_M(\psi)$, если φ и ψ эквивалентны.

Для всякого $\lambda \in \mathbf{R}^+$ определим $*$-автоморфизм $\mathcal{F}^M_\lambda$ на $\mathcal{P}_M$ формулой $p_M(\lambda\varphi) = \mathcal{F}^M_\lambda p_M(\varphi)$ для всех $\varphi \in W(M)$. Пара $\{\mathcal{P}_M; \mathcal{F}^M\}$, где $\mathcal{F}^M = \{\mathcal{F}^M_t\}_{t \in \mathbf{R}^+}$, называется *потоком весов* на M [21].

Вес φ называется весом *бесконечной кратности*, если его централизатор

$$M_\varphi = \{x \in M : \sigma^\varphi_t(x) = x, \forall t \in \mathbf{R}\}$$

является собственно бесконечной W^*-алгеброй, где σ^φ_t – группа модулярных $*$-автоморфизмов Конна–Томита–Такесаки [22], ассоциированная с φ. Вес называется *интегрируемым*, если множество

$$\left\{x \in s(\varphi)Ms(\varphi) : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_t^{\varphi}(x^*x)dt < +\infty\right\}$$

плотно в $s(\varphi)Ms(\varphi)$ в ультраслабой топологии. Вес называется *доминантным*, если он точен, бесконечной кратности и эквивалентен $\lambda\varphi$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}^+$. По теореме II.1.1 из [21], на собственно бесконечной W^*-алгебре (в частности, на факторах типов II и III) доминантный вес всегда существует. Пусть $d_M = p_M(\overline{\omega})$ – проектор из $\mathcal{P}_M$, соответствующий доминантному весу $\overline{\omega}$ на M^+. *Гладким потоком весов* назовем пару (P_M, F^M), где $P_M = d_M\mathcal{P}_M d_M$, а F^M - сужение действия $*$-автоморфизмов из $\mathcal{F}^M$ на P_M. Обозначим через $W_{\text{int}}(M)$ множество всех нормальных полуконечных интегрируемых весов на M^+, а через $\text{Aut}(F^M)$ – множество $\{\sigma \in \text{Aut}(P^M) : \sigma{\cdot}F_\lambda^M = F_\lambda^M \cdot \sigma\}$. Пусть $\alpha \in \text{Aut}(M) \cup \text{Ant}(M)$, где $\text{Ant}(M)$ - группа всех $*$-антиавтоморфизмов алгебры M. Как показано в работе [18], элементу α соответствует единственный элемент $\text{mod}(\alpha) \in \text{Aut}(F^M)$, который определяется равенством

$$\text{mod}(\alpha)p_M(\varphi) = p_M(\varphi \cdot \alpha^{-1}), \quad \forall\ \varphi \in W_{\text{int}}(M),$$

и называется *фундаментальным гомоморфизмом* Конна–Такесаки–Джиордано.

Пусть в дальнейшем M – инъективный фактор типа III_λ $(\lambda \neq 1)$, α - инволютивный $*$-антиавтоморфизм фактора M, $\text{mod}(\alpha) = 1$, а θ – α-инвариантное действие счетной аменабельной группы G на M. Докажем следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Существует α-инвариантное действие θ' группы G на M, обладающее инвариантным доминантным весом и вещественно сопряженное действию θ с точностью до коцикла.*

Доказательство. Пусть φ – точный нормальный полуконечный α-инвариантный вес на M, $\hat{\hat{\varphi}}$ – второй дуальный вес на $((M,\alpha) \times_\theta G) \times_{\hat{\theta}} \widehat{G}$ ı $(M,\alpha) \otimes B(L_2(G))_r$ (по поводу определения дуального действия локально компактной (необязательно абелевой) группы и теоремы двойственности см. [23–26]). По теореме двойственности Такесаки для вещественных W^*-алгебр ([25]) вес $\hat{\hat{\varphi}}$ $\hat{\hat{\theta}}$-инвариантен.

Рассмотрим на $L_2(\mathbf{R})$ антилинейную инволюцию J, действующую следующим образом:

$$Jf(s) = \overline{f(s)}, \qquad f(s) \in L_2(\mathbf{R}).$$

Очевидно, что если разложить произвольный элемент $f(s)$ из $L_2(\mathbf{R})$ в сумму $f(s) = f_1(s) + if_2(s)$, $f_1(s), f_2(s) \in L_2(\mathbf{R})_r$, то $J(f_1 + if_2) = f_1 - if_2$. Определим на $B(L_2(\mathbf{R}))$ инволютивный $*$-антиавтоморфизм β формулой $\beta(x) = Jx^*J$, $x \in B(L_2(\mathbf{R}))$. Пусть $\{u_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ - семейство унитарных операторов, действующих следующим образом:

$$u_t(f(s)) = f(s+t), \quad f \in L_2(\mathbf{R}).$$

По теореме Стоуна существует положительный элемент h, присоединенный к $B(L_2(\mathbf{R}))$ и такой, что $u_t = h^{it}$, $t \in \mathbf{R}$. Пусть tr – канонический точный нормальный полуконечный след на $B(L_2(\mathbf{R}))$; рассмотрим точный нормальный полуконечный вес ω вида $\omega(x) = \mathrm{tr}(hx)$. Тогда, как было показано в доказательстве теоремы 1.12 из [27], $\omega \cdot \beta = \omega$, т.е. этот вес β-инвариантен. По теореме II.1.3.(2) из [21] вес $\hat{\hat{\varphi}} \otimes \omega$ является доминантным весом, а по построению он $\alpha \otimes \beta$-инвариантен и $\hat{\hat{\theta}} \otimes \mathrm{id}$-инвариантен. По предложению 2 из [13] θ и $\hat{\hat{\theta}} \otimes \mathrm{id}$ сопряжены с точностью до коцикла.

Лемма 2. *Существуют α-инвариантное действие θ' группы G на M и α-инвариантный доминантный вес φ на M такие, что*

(i) *действие θ' вещественно сопряжено действию θ с точностью до коцикла;*

(ii) *вес φ θ'-инвариантен;*

(iii) *существует однопараметрическая группа унитарных элементов $\{u_s : s \in \mathbf{R}\} \subset (M, \alpha)$ такая, что*

  (a) $\sigma_t^{\varphi}(u_s) = e^{\mathrm{ist}} u_s$, $s, t \in \mathbf{R}$;

  (b) $\theta_g(u_s) = u_s$, $g \in G$.

Доказательство. Доказательства утверждений (i) и (ii) вытекают из леммы 1. В работе [26, §1.3] показано существование группы унитарных элементов $\{v_s : s \in \mathbf{R}\}$ с $\sigma_t^{\varphi}(v_s) = e^{-ist} v_s$ и $\alpha(v_s) = v_s^*$ (т.е. $v_s \in (M, \alpha)$), $s \in \mathbf{R}$. Так как действие θ является

α-инвариантным и φ-инвариантным (следовательно, оно коммутирует с σ_t^φ), то

$$\theta_g(v_s)v_s^* \in \Re_\varphi = (M_\varphi, \alpha).$$

Продолжение доказательства леммы проводится аналогично доказательству леммы 5.11 из [9] с использованием алгебры $\Re_\varphi$ вместо алгебры M_φ. $\square$

Пусть $Z^1(F^M)$ – унитарный 1-коцикл на потоке F^M. Обобщенная модулярная группа автоморфизмов $\overline{\sigma}_c^\varphi$, ассоциированная с весом φ, на унитарном 1-коцикле определяется следующим образом (см. [21, стр. 549]):

$$\overline{\sigma}_c^\varphi(x) = P_M^{-1}(c_\lambda p_M(\varphi))(x), \quad x \in M(\sigma^\varphi, \{\lambda\}),$$

где P_M, p_M – отображения из определения потока весов, c_λ – унитарный 1-коцикл на потоке (т.е. $c_\lambda \in Z^1(F^M)$) и $M(\sigma^\varphi, \{\lambda\}) = \{x : \sigma_t^\varphi(x) = \lambda^{it}x, \forall t \in \mathbf{R}\}$.

Сформулируем один результат работы [28].

Теорема 3 ([28]). *Пусть M – фактор типа III_λ, $\lambda \neq 1$, $\theta \in Cnt(M)$. Тогда существуют $c \in Z^1(F^M)$ и унитарный элемент u такие, что $\theta = \operatorname{Ad} u \cdot \overline{\sigma}_c^\psi$ для некоторого веса ψ.*

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $N(\theta) = \theta^{-1}(Cnt(M, \alpha)) = \{g \in G : \theta_g \in Cnt(M, \alpha)\}$ и действие $\theta' : H = G \times \mathbf{R} \to \operatorname{Aut}(M_\varphi, \alpha)$ задается формулой*

$$\theta'_{(g,t)} = \theta_g \cdot \operatorname{Ad} u_t, \quad (g, t) \in H.$$

Для $n \in N(\theta)$ пусть (v_n, c_n) – соответствующая пара из $((M_\varphi, \alpha), Z^1(F^M))$ такая, что $\theta_n = \operatorname{Ad} v_n \cdot \overline{\sigma}_{c_n}^\varphi$. Тогда

(i) *автоморфизм $\theta'_{(g,t)}$ внутренний тогда и только тогда, когда $(g, t) \in N(\theta) \times \{0\}$;*

(ii) *для $n \in N(\theta)$ имеем: $\theta'_n = \operatorname{Ad} v_n$;*

(iii) *$\chi_{\theta'|_{G \times \{0\}}} = \chi_\theta$;*

(iv) *$\theta'_t(v_n) = c_{n,t}v_n$, где $t \in \mathbf{R}$, $c_{n,t}$ – значение коцикла c_n в t.*

Доказательство. Пусть tr – точный нормальный полуконечный след на $\Re_\varphi = (M_\varphi, \alpha)$ с $\operatorname{tr} \cdot \operatorname{Ad} u_t = e^{-t} \operatorname{tr}$, для которого вес φ является дуальным. Такой след существует (см. [26]) и является α-инвариантным, так как таковым является вес φ. Кроме того, θ-инвариантность веса φ влечет θ'-инвариантность следа. Поэтому, если автоморфизм $\theta'_{(g,t)}$ внутренний, т.е. существует унитарный $u_{g,t}\in\Re_\varphi$ с $\theta_g\cdot\operatorname{Ad}u_t=\operatorname{Ad}u_{g,t}$, то так как автоморфизм θ_g также внутренний, т.е. $\theta_g=\operatorname{Ad}v_g$, получаем

$$\mathrm{tr}\cdot\operatorname{Ad}u_{g,t}=\mathrm{tr}\cdot(\operatorname{Ad}v_g\cdot\operatorname{Ad}u_t)=e^{-t}\,\mathrm{tr}=\mathrm{tr}\,.$$

Отсюда $t=0$. Поскольку автоморфизм $\operatorname{Ad}v_g^*\cdot\theta_g$ тождественно действует на $\Re_\varphi$, видим, что $\theta_g=\operatorname{Ad}v_g\cdot\overline{\sigma}^\varphi_{c_g}$ на M для некоторого коцикла $c_g\in Z^1(F^M)$ (см. [21]). Так как $\varphi\cdot\theta_g=\varphi$, то $v_g\in(M_\varphi,\alpha)$, а значит $g\in N(\theta)$. Обратная импликация очевидна. В случае $t=0$, по определению, действия θ' и θ совпадают, следовательно, утверждение (iii) очевидно. Так как по лемме 2 (b) $\theta_n(u_t)=u_t$ и в силу условия леммы $\theta_n=\operatorname{Ad}v_n\cdot\overline{\sigma}^\varphi_{c_n}$, то

$$u_t=v_n\overline{\sigma}^\varphi_{c_n}(u_t)v_t^*=v_nc_{n,t}u_tv_n^*.$$

Поэтому

$$\theta'_t(v_n)=\operatorname{Ad}u_t(v_n)=u_tv_nu_t^*=v_nc_{n,t}u_tv_n^*v_nu_t=v_nc_{n,t},$$

что и доказывает утверждение (iv). □

Пусть $N(\theta)=\theta^{-1}(Cnt(M,\alpha))$ и $h\in N(\theta)$. Так как $\theta_h\in Cnt(M,\alpha)$, то $\theta_h\in Cnt(M)$ (см. [20, стр. 135]). По теореме 3 существуют $c_h\in Z^1(F^M)$ и унитарный элемент u_h такие, что $\theta_h=\operatorname{Ad}u_h\cdot\overline{\sigma}^\varphi_{c_h}$ для некоторого веса φ. Гомоморфизм $\nu_\theta:h\to c_h$ называется *модулярным инвариантом* действия θ, а фундаментальный гомоморфизм $\mathrm{mod}(\theta):G\to\mathrm{Aut}(F^M))$ называется *модулем* θ.

По определению централизатора M_φ имеем $\theta_h|_{M_\varphi}=\operatorname{Ad}u_h$. Так как автоморфизм θ_h α-инвариантный, то для каждого $h\in N(\theta)$ существует вещественный унитарный элемент v_h (т.е. $v_h\in(M,\alpha)$) такой, что

$$\theta_h|_{M_\varphi}=\operatorname{Ad}u_h=\operatorname{Ad}v_h. \tag{8}$$

Пусть χ_θ – характеристический инвариант действия θ, соответствующий семейству $\{v_h,h\in N(\theta)\}$ (см. §2).

Теперь сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть M – инъективный фактор типа III_λ ($\lambda\neq1$), α – инволютивный $*$-антиавтоморфизм M с $\mathrm{mod}(\alpha)=1$. Пусть θ и β α-инвариантные действия счетной аменабельной группы G на M. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *θ и β – вещественно сопряжены с точностью до коцикла;*

(ii) $N(\theta) = N(\beta)$, *и с точностью до автоморфизма потока* F^M *имеет место равенство*

$$(\mathrm{mod}\,(\theta), \chi_\theta, \nu_\theta) = (\mathrm{mod}\,(\beta), \chi_\beta, \nu_\beta).$$

Доказательство. Импликация (i)⇒(ii) очевидна. Докажем обратное утверждение. В силу лемм 1 и 2 мы можем предполагать, что для действий θ и β имеет место следующие условия:

(i) оба действия θ и β имеют α-инвариантные доминантные веса φ и ψ на M, соответственно;

(ii) в (M, α) существуют однопараметрические группы унитарных элементов $\{u_s\}_{s\in\mathbf{R}}$ и $\{v_s\}_{s\in\mathbf{R}}$ такие, что

$$\sigma_t^\varphi(u_s) = e^{ist}u_s, \qquad \sigma_t^\psi(v_s) = e^{ist}v_s, \theta_g(u_s) = u_s, \quad \beta_g(v_s) = v_s,$$

$g \in G,\ s, t \in \mathbf{R}$.

Пусть θ' (соответственно, β') α-инвариантное действие группы $H = G \times \mathbf{R}$ на M_φ (соответственно на M_ψ), построенное в лемме 2. В силу леммы 3 действия θ' и β' удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда в силу теоремы 1 действия θ' и β' вещественно сопряжены с точностью до коцикла. По теореме 2 соответствующие им действия $\overline{\theta}'$ и $\overline{\beta}'$ группы G на скрещенных произведениях $(M_\varphi, \alpha) \times \mathbf{R}$ и $(M_\psi, \alpha) \times \mathbf{R}$, соответственно, также вещественно сопряжены с точностью до коцикла. Однако действие $\overline{\theta}'$ (соответственно, $\overline{\beta}'$) есть не что иное, как действие θ (соответственно, β) группы G на (M, α), так как алгебры $(M_\varphi, \alpha) \times \mathbf{R}$ и $(M_\psi, \alpha) \times \mathbf{R}$ изоморфны алгебре (M, α). □

Замечание. В теореме 4 сопрягающий унитарный коцикл является вещественным, поэтому в силу (8) характеристический инвариант χ_θ вещественный. Как известно [18, предложение 4.9], модуль автоморфизма $\mathrm{mod}(\cdot)$ можно отождествить с некоторым положительным числом, следовательно, этот инвариант также является вещественным. Однако модулярный инвариант ν_θ определяется через комплексный поток весов F^M, так как вещественный аналог теории потока весов пока, к сожалению, не построен.

Литература

1. P. J. Stacey, *Real structure in σ-finite factors of type III_λ where* $0 < \lambda < 1$. — Proc. London Math. Soc. 3 **47** (1983) 275–284.

2. Ш. М. Усманов, *Классификация вещественных W^*-факторов типа III_λ, $\lambda \in (0,1)$.* — Функциональный анализ и его приложения **19**, вып. 3 (1985) 94–95.
3. Sh. M. Usmanov, *Continuous decomposition of real von Neumann algebras of type III.* — Algebra and Operator Theory. Proc. Coll., Kluwer Acad. Pub. (1998), 111–116.
4. A. Connes, *Classification of automorphisms of hyperfinite factors of type II_1 and II_∞, and application to type III factors.* — Bull. Amer. Math. Soc. **81**, No. 6 (1975), 1090–1092.
5. A. Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors.* — Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e serie **8** (1975), 383–420.
6. V. Jones, *Actions of finite groups on the hyperfinite type II_1 factor.* — Mem. Amer. Math. Soc. **28**, No. 237 (1980), 70p.
7. V. Jones, M. Takesaki, *Actions of compact abelian groups on semifinite injective factors.* — Acta Math. **153** (1984), 213–258.
8. A. Ocneanu, *Actions of discrete amenable groups on factors.* — Lect. Notes Math. **1138**, Springer, Berlin (1985).
9. C. E. Sutherland, M. Takesaki, *Actions of discrete amenable groups on injective factors of type III_λ, $\lambda \neq 1$.* — Pacific J. Math. **137**, No. 2 (1989), 405–444.
10. А. А. Рахимов, Ш. М. Усманов, *Периодические $*$-автоморфизмы и $*$-антиавтоморфизмы инъективных факторов.* — Функциональный анализ и его приложения **29**, вып. 1 (1995) 87–89.
11. A. A. Rakhimov, Sh. M. Usmanov, *Outer conjugacy classes of automorphisms and antiautomorphisms of real and complex injective factors.* — J. Funct. Anal. **144** (1997), 475–485.
12. A. A. Rakhimov, *Actions of finite groups on the hyperfinite real type II_1 factor.* — Methods of Functional Analysis and Topology **4**, No. 3 (1998), 72–88.
13. A. A. Rakhimov, *Classification for actions of compact abelian group on semifinite real W^*-algebra.* — Siberian Advances in Mathematics **11**, No. 2 (2001), 83–93.
14. Katayama, C. E. Sutherland, M. Takesaki, *Actions of discrete amenable groups on injective factors of type III_1.* — Invent. Math. **132** (1998), 331–380.
15. M. Takesaki, *Theory of operator algebras, I.* — Berlin, Springer-Verlag (1979) VIII+415p.
16. J. Feldman, P. Hahn, C. C. Moore, *Orbit structure and countable sections for action of continuous groups.* — J. Funct. Anal. **28**, No. 3 (1978), 186–230.
17. A. Ramsay, *Topologies on measured groupoids.* — J. Funct. Anal. **47**, No. 3 (1982), 314–343.
18. T. Giordano, *Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs.* — These, Universite de Neuchatel (1981), 106 p.
19. А. А. Рахимов, *О действи дискретной аменабельной группы на вещественных факторах* — в печати Докл. АН РУз.
20. Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, Sh. M. Usmanov, *Jordan, Real, and Lie structures in operator algebras.* — Kluwer Academic Publishers, MAIA **418** (1997), 235p.
21. A. Connes, M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type III.* — Thoku Math. J. Ser. **29**, No. 2 (1977), 473–575.

22. A. Connes, *Une classification des facteurs de type III.* — Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **6** (1973), 133–252.
23. Y. Nakagami, *Dual action on a von Neumann algebras and Takesaki duality theorem for a locally compact group.* — Publ. R. I. M. S., Kyoto Univ. **12** (1977), 727–775.
24. Y. Nakagami, M. Takesaki, *Duality for crossed products of von Neumann algebras.* — Springer Lect. Notes Math. **731** (1979).
25. M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type* III. — Acta Math. **131** (1973), 249–310.
26. Ш. М. Усманов, *Непрерывное и дискретное разложения вещественных W^*-алгебр и их условные ожидания и операторнозначные веса.* — Докторская диссер., Ташкент (1999).
27. T. Giordano, *Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs. II.* — J. Funct. Anal. **51**, No. 3 (1983), 326–360.
28. U. Haagerup, E. Stormer, *Pointwise inner automorphisms of von Neumann algebras, with an appendix by C. Sutherland.* — J. Funct. Anal. **92** (1990), 177–201.

Rakhimov A. A. Action of groups on real factors of type III_λ, $\lambda \neq 1$.

Actions of groups on pure infinite real factors are considered. Actions of discrete amenable group on an injective real factor of type III_λ ($\lambda \neq 1$) are classified up to cocycle conjugacy.

Национальный Университет
Узбекистана, г. Ташкент
Karadeniz Teknik University,
The Department of Mathematics,
Trabzon, Turkey
E-mail: rakhimov@ktu.edu.tr

Поступило 20 ноября 2004 г.