Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

Н. А. Широков

ЗАМЕЧАНИЕ О МАКСИМУМЕ МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦЕ

Для функции f, непрерывной на единичной окружности $\mathbb{T}$, и дуги $I \subset \mathbb{T}$ положим $M_f(I) = \max\limits_I |f|$. В данной заметке мы находим, что между величинами $M_f(I)$ и $M_f(J)$ при $I \subset J \subset \mathbb{T}$ для некоторых классов аналитических функций имеется зависимость.

Прежде всего заметим, что для многих классов функций никакой зависимости нет. Например, если $I \subsetneq J$, то в диск-алгебре C_A всех аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывных в замыкании $\overline{\mathbb{D}}$ функций можно найти такие функции f_0, что величина $M_{f_0}(I)$ сколь угодно мала, а $M_{f_0}(J) = \|f_0\|_{C_A}$. Если мы рассматриваем на $\mathbb{T}$ двусторонние классы Гёльдера $H^\alpha(\mathbb{T})$, то ясно, что имеются функции $f_1 \in H^\alpha(\mathbb{T})$, для которых $f_1|_I \equiv 0$, $M_{f_1}(J) > 0$. Единственное, что можно утверждать для двусторонних классов Гёльдера, например, при $|J_0| = 2|I_0|$, $|I|$ – длина дуги I, I_0 и J_0 имеют общую середину, что

$$M_{f_1}(J_0) \leqslant M_{f_1}(I_0) + C_{f_1}|I_0|^\alpha.$$

Если $M_f(I_0) \leqslant C_f|I_0|^\alpha$ (например, если $0 < \alpha < 1$) и $f(z_0) = 0$, то $M_f(J_0) \leqslant C_f|I_0|^\alpha$, и это единственное ограничение на $M_f(J_0)$.

Ситуация меняется, когда мы рассматриваем аналитические классы Гёльдера. Положим

$$v_f(I) = \log^\alpha\left(\frac{|I|^\alpha}{M_f(I)} + 2\right), \quad f \in C(\mathbb{T}), \quad I \subset \mathbb{T}. \tag{1}$$

Характеристика $v_f(I)$ велика при $M_f(I)$ малом в сравнении с $|I|^\alpha$.

Обозначим аналитический класс Гёльдера через Λ^α. Далее для краткости для дуг J и I, $|J| = C|I|$, имеющих общую середину, будем использовать обозначение $J = CI$.

Теорема 1. *Пусть $f \in \Lambda^\alpha$, $\|f\|_{\Lambda^\alpha} = 1$. Существует постоянная*

$C_0(\alpha)$, зависящая лишь от α такая, что

$$M_f(2I) \leqslant C_0(\alpha)\frac{|I|^\alpha + M_f(I)}{v_f(I)}. \tag{2}$$

Из определения (1) видно, что при $M_f(I) \geqslant |I_0|^\alpha$ величина $v_f(I)$ ограничена и тогда оценка (2) не улучшает оценки в двухстороннем классе $H^\alpha(\mathbb{T})$. Если же, например, $M_f(I_0) \leqslant \exp(-1/|I_0|^t)$, $0 < t < 1$, то с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\alpha, f)$, выполнено $M_f(2I_0) \leqslant c_1|I_0|^{(1+t)\alpha}$. Оказывается, далее, что оценка (2) в определенном смысле неулучшаема.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 0$, $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ – произвольная последовательность, $V_n > 0$, $V_n \to +\infty$, $g(t)$ – положительная убывающая функция на $(0, 2\pi]$ такая, что*

$$\varlimsup_{t\to+0} t^\alpha g(t) = 0. \tag{*}$$

Тогда существуют функция $f_0 \in \Lambda^\alpha$, постоянные $c_2 > 0$ и множество дизъюнктных дуг $\{I_{n,l}\}_{n,l=0}^\infty$ окружности $\mathbb{T}$ такие, что

$$v_{f_0}(I_{n,l}) = V_n g(|I_{n,l}|), \quad n, l = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

и

$$M_{f_0}(2I_{n,l}) \geqslant c_2\frac{|I_{n,l}|^\alpha}{v_{f_0}(I_{n,l})}, \quad n, l = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Замечание. Суммируемость функции $\log|f_0|$ на окружности $\mathbb{T}$ влечет, что может существовать лишь конечное количество дизъюнктных дуг $I_{n,l}$ таких, что $\max\limits_{I_{n,l}}|f_0| \leqslant \exp(-c_3/|I_{n,l}|)$, что влекло бы $v_{f_0}(I_{n,l}) \geqslant c_4/|I_{n,l}|^\alpha$, поэтому условие $(*)$, наложенное на функцию g, неулучшаемо при построении примера со свойствами (3) и (4).

Доказательство теоремы 1. Применим теорему 1 из [1, гл. 1]. Из нее следует, что существует постоянная $c_5(\alpha)$, не зависящая от функции f и точки z и такая, что если $f \in \Lambda^\alpha$, $\|f\|_{\Lambda^\alpha} = 1$, $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, $I(z) = \{e^{i\theta} : |\theta - \arg z| \leqslant \pi(1 - |z|)\}$, $M_f(z) = \max\limits_{I(z)}|f|$ и $M_f(z) \geqslant (1 - |z|)^\alpha$, то

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left|\log\left|\frac{M_f(z)}{f(\xi)}\right|\right| \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2}|d\xi| \leqslant c_5(\alpha). \tag{5}$$

Возьмем точку $z_0 \in 2I$ такую, что $|f(z_0)| = \max_{2I}|f| \overset{\text{def}}{=} M$, и пусть $z_1 = (1 - M^{1/\alpha})z_0$. Тогда $(1-|z_1|)^\alpha = M \leqslant M_f(z_1)$, поэтому (5) влечет неравенство

$$\int\limits_I \log\left(\frac{2M}{|f(\xi)|}\right) \cdot \frac{M^{1/\alpha}}{|\xi - z_1|^2}|d\xi| \leqslant c'(\alpha). \tag{6}$$

Пусть $\max\limits_I |f| = m$, тогда $\frac{M}{|f(\xi)|} \geqslant \frac{M}{m}$ при $\xi \in I$, $|\xi - z_1| \leqslant 2|I| + M^{1/\alpha}$, и из (6) находим

$$\log\frac{2M}{m} \cdot \frac{M^{1/\alpha}\cdot|I|}{(M^{1/\alpha}+2|I|)^2} \leqslant c_6(\alpha). \tag{7}$$

Если $M \geqslant c_7(\alpha)|I|^\alpha$ с некоторой постоянной $c_7(\alpha)$ (скажем, при $0 < \alpha \leqslant 1$ можно взять $c_7(\alpha) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha$), то $m \geqslant c_8(\alpha)\cdot|I|^\alpha$ в силу того, что $\|f\|_{\Lambda^\alpha} = 1$, и тогда соотношение (2) выполнено. Если же $M < c_7(\alpha)\cdot|I|^\alpha$, то (7) влечет неравенство

$$\log\frac{2M}{m}\cdot M^{1/\alpha} \leqslant c_8(\alpha)|I|$$

или

$$\log\frac{2M}{m}\cdot\Big(\frac{M}{m}\Big)^{1/\alpha} \leqslant c_8(\alpha)\Big(\frac{|I|^\alpha}{m}\Big)^{1/\alpha}, \quad \frac{M}{m}\Big(\log\frac{2M}{m}\Big)^\alpha \leqslant c_9(\alpha)\cdot\frac{|I|^\alpha}{m}. \tag{8}$$

Пусть $t = \frac{M}{m} \geqslant 1$. Тогда рассмотрение функции $x\cdot(\log 2x)^\alpha$ приводит к заключению, что из оценки $t\cdot(\log 2t)^\alpha \leqslant B$ при $t \geqslant 1$ следует, что $t \leqslant c''(\alpha)B/\log^\alpha(B+2)$, поэтому (8) влечет

$$\frac{M}{m} \leqslant c_{10}(\alpha)\cdot\frac{|I|^\alpha/m}{\log^\alpha(2+|I|^\alpha/m)}$$

что и дает (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Выберем числа $\varepsilon_{n,l} > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{n,l=0}^{\infty} V_n^{1/\alpha} g^{1/\alpha}(\varepsilon_{n,l})\cdot\varepsilon_{n,l} < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{n,l=0}^{\infty} \varepsilon_{n,l}^{1/2} < \frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

$$\sum_{n,l=0}^{\infty} \varepsilon_{n,l}^{1/2}\log\varepsilon_{n,l} < \infty\,. \tag{11}$$

Это возможно в силу условия $(*)$ в условии теоремы 2. Поместим, пользуясь соотношением (10), на дуге $\{e^{i\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ такие дизъюнктные дуги $2J_{n,l}$, что

$$|J_{n,l}| = \varepsilon_{n,l}^{1/2} \tag{12}$$

и точка $\{1\}$ является их единственной точкой сгущения.

Пусть дуги $I_{n,l}$ имеют ту же середину, что и $J_{n,l}$, и $|I_{n,l}| = \varepsilon_{n,l}$.

В дальнейшем построении будем полагать $0 < \alpha < 1$; случай $\alpha \geqslant 1$ требует несколько более трудных технических деталей, однако не отличается принципиально.

Определим следующую неотрицательную функцию $\varphi(z)$ при $z \in \mathbb{T}$. Если $2J = \{e^{i\theta} : \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1\}$ – ближайшая из дуг $\{2J_{n,l}\}$ к точке $\{-1\}$, то полагаем $\Gamma = \{e^{i\theta} : 2\pi \geqslant \theta \geqslant \theta_1\}$ и

$$\varphi(z) = (\theta - \theta_0)^{2\alpha}(2\pi - \theta)^{2\alpha}, \quad \text{если} \quad z \in \Gamma; \tag{13}$$

если $z \in I_{n,l}$, то полагаем

$$\varphi(z) = m_{n,l}, \quad \text{где} \quad \log^\alpha\left(\frac{\varepsilon_{n,l}^\alpha}{m_{n,l}} + 2\right) = V_n g(\varepsilon_{n,l}); \tag{14}$$

если $I_{n,l} = \{e^{i\theta} : s_1 \leqslant \theta \leqslant s_2\}$, $J_{n,l} = \{e^{i\theta} : \sigma_1 \leqslant \theta \leqslant \sigma_2\}$, то при $z = e^{i\theta} \in J_{n,l} \setminus I_{n,l}$ пусть

$$\varphi(z) = \log^\alpha 2 \frac{y^\alpha + m}{\log^\alpha\left(\frac{y^\alpha}{m} + 2\right)}, \tag{15}$$

где

$$y = \min(|\theta - s_1|, |\theta - s_2|), \quad m = m_{n,l}. \tag{16}$$

Наконец, если $\gamma = \{e^{i\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0\}$, то множество $\gamma \setminus \bigcup\limits_{n,l=0}^{\infty} J_{n,l}$ состоит из дизъюнктивных дуг λ_ν, причем функция φ определена на концах всех дуг λ_ν. Полагаем теперь

$$\begin{gathered}\varphi(z) - \text{линейная функция от} \quad \theta, z = e^{i\theta}, \quad \text{при} \quad z \in \lambda_\nu \\ \text{интерполирующая значения функции} \quad \varphi \quad \text{на концах} \quad \lambda_\nu\,.\end{gathered} \tag{17}$$

Теперь из условий (9)–(12) и построения (13)–(17) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \log\varphi(z)|dz| > -\infty. \tag{18}$$

Кроме того, $\varphi \in H^\alpha(\mathbb{T})$ (именно в этом месте используется предположение $0 < \alpha < 1$; для $\alpha \geqslant 1$ функцию φ требуется определить с гладкостью H^α вне дуг $I_{n,\alpha}$, что носит технический характер). Поэтому по теореме 1 в [1, глава 1], внешняя в $\mathbb{D}$ функция f_0, для которой

$$|f_0(z)| = \varphi(z), \quad z \in \mathbb{T}, \tag{19}$$

существующая в силу (18), будет принадлежать классу Λ^α, если для нее будет проверено выполнение с некоторой постоянной $c_5(\alpha)$ условия (5) для всякой точки $z \in \mathbb{D}$, такой, что $M_f(z) \geqslant (1-|z|)^\alpha$. Проверка нетривиальных случаев этого условия в силу предположения (11) и пунктов (13) и (17) построения функции $\varphi(z)$ сведется к рассмотрению случая $z \in J_{n,l}$; при этом наиболее существенный вклад в интеграл (5) вновь в силу (11) даст интегрирование по той же дуге $J_{n,l}$.

Далее, определение (15) и элементарные действия с интегралами по дугам $J_{n,l} \setminus I_{n,l}$ дадут оценку (5) без принципиальных трудностей. Основное обстоятельство, в котором учитывается соотношение между $M(CI_{n,l})$ и $M(I_{n,l})$, связано с интегралом по дуге $I_{n,l} \overset{\mathrm{def}}{=} \{e^{i\theta} : \tau_0 \leqslant \theta \leqslant \tau_1\}$ в предположении, что

$$1 - |z| = (\max_{\tau_0 - y \leqslant \theta \leqslant \tau_1 + y} \varphi(e^{i\theta}))^{1/\alpha} = c_{11}(\alpha) \frac{y}{\log\left(\frac{y^\alpha}{m_{n,l}} + 2\right)} \overset{\mathrm{def}}{=} \nu(y), \tag{20}$$

$$\arg z = \tau_0 - y \quad \text{или} \quad \arg z = \tau_1 + y,\ y^\alpha \geqslant m_{n,l}. \tag{21}$$

Пусть $m_{n,l} = m$, $\varepsilon_{n,l} = \varepsilon$. В предположениях (20), (21) при $y \geqslant \varepsilon$ находим

$$\int_{I_{n,l}} \left|\log\left|\frac{M_{f_0}(z)}{f_0(\zeta)}\right|\right| \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leqslant c \cdot \log\frac{\nu^\alpha(y)}{m} \cdot \frac{\nu(y)\,\varepsilon}{y^2}, \tag{22}$$

а при $\varepsilon \geqslant y \geqslant m^{1/\alpha}$, соответственно,

$$\int_{I_{n,l}} \left|\log\left|\frac{M_{f_0}(z)}{f_0(\zeta)}\right|\right| \cdot \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leqslant c \log\frac{\nu^\alpha(y)}{m} \cdot \frac{\nu(y)}{y}. \tag{23}$$

Поскольку $\nu(y) \leqslant cy$, $\frac{\nu(y)}{y} \leqslant c/\log\left(\frac{y^\alpha}{m}\right)$, из (22) следует, что

$$\log\frac{\nu^\alpha(y)}{m} \cdot \frac{\nu(y)}{y} \cdot \frac{\varepsilon}{y} \leqslant c \log\frac{y^\alpha}{m} \cdot \frac{1}{\log\frac{y^\alpha}{m}} \cdot \frac{\varepsilon}{y} \leqslant c, \tag{24}$$

а из (23) – что

$$\log\frac{\nu^\alpha(y)}{m}\cdot\frac{\nu(y)}{y}\leqslant c\log\frac{y^\alpha}{m}\cdot\frac{1}{\log\frac{y^\alpha}{m}}=c. \tag{25}$$

Оценки (24) и (25) показывают ограниченность основного вклада в интеграл (5) для $|f_0(z)|=\varphi(z)$, что и доказывает теорему 2.

Литература

1. N. A. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary.* — Lecture Notes in Mathematics, **1312** (1988).

N. A. Shirokov. Remark about the maximum of the modulus of an analytic function on the boundary.

Let Λ^α be the analytic Hölder class in the unit disc $\mathbb{D}$. For $f\in\Lambda^\alpha$ and $I\subset\partial\mathbb{D}$, let $M_f(I)=\max_I|f|$. Assume that I, J are arcs such that $|J|=2|I|$, J and I have common middle point. Then

$$M_f(J)\leqslant C(\alpha,f)\frac{|I|^\alpha+M_f(I)}{\log^\alpha\left(\frac{|I|^\alpha}{M_f(I)}+2\right)}.$$

It is proved that this estimate cannot be improved.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 6 сентября 2004 г.