Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 316, 2004 г.

В. Баргачев

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕЗАВИСИМЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО МИНИМУМА СЕМЕЙСТВ И ГРУПП ПЕРЕСТАНОВОК

1. Введение

Понятие независимых относительно минимума семейств перестановок было введено и изучалось в работах [1], [2] и [4]. Его появление было мотивировано тем фактом, что такие множества необходимы для построения эффективного алгоритма фильтрации "почти одинаковых" страниц среди огромного числа документов в сети интернет.

Подобные понятия немного в другом контексте также появлялись в других работах (ссылки можно найти в [4]). Позднее, независимости относительно минимума было найдено применение при дерандомизации алгоритмов решения NP-полных задач ([3], [11]).

Напомним основные определения из [2]. В этой статье мы будем использовать следующие обозначения: $[n]$ обозначает множество $\{1, \ldots, n\}$; S_n обозначает симметрическую группу действующую на $[n]$. Для перестановки $\pi \in S_n$ и множеств $X, Y \subseteq [n]$ будем писать $\pi(X) < \pi(Y)$ если неравенство $\pi(x) < \pi(y)$ выполняется для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Для множества $X \subseteq [n]$ определим ранг элемента $x \in X$ следующим образом:

$$\operatorname{rank}(x, X) := |\{x' \in X : \ x' \leqslant x\}|.$$

Для события A, $\operatorname{ind}(A)$ означает индикатор этого события, то есть $\operatorname{ind}(A) = 1$ если A выполняется и $\operatorname{ind}(A) = 0$ в противном случае.

Определение ([2], [4]). *Семейство перестановок $\mathcal{F} \subseteq S_n$ называется независимым по k относительно минимума (сокращенно k-НОМ) если для любого непустого $X \subseteq [n]$, такого что $|X| \leqslant k$,*

Работа частично поддержана фондом INTAS (грант No. 2000-447).

и для любого $x \in X$ при случайном выборе перестановки $\pi \in \mathcal{F}$ в соответствии с заданным вероятностным распределением $\Pr_{\mathcal{F}}$ выполняется

$$\Pr_{\mathcal{F}}(\min(\pi(X)) = \pi(x)) = \frac{1}{|X|}. \tag{1}$$

Если заданное на $\mathcal{F}$ распределение равномерно, то семейство называется несмещенным. В противном случае семейство называется смещенным.

Ясно, что условие $\min(\pi(X)) = \pi(x)$ может быть переписано как:

$$\operatorname{rank}(\pi(x), \pi(X)) = 1.$$

Возникает естественный вопрос о свойствах семейств $\mathcal{F}$, удовлетворяющих

$$\operatorname{rank}(\pi(x), \pi(X)) = l$$

для какого-то l. Во втором параграфе подробно изучается этот вопрос. В частности, показываеся, что такое обобщенное понятие эквивалентно исходному. В третьем параграфе приводится конструкция, позволяющая получить $(k+1)$-НОМ семейства из k-НОМ семейств для любого нечетного k. Как следствие, мы улучшаем известную верхнюю оценку на минимальный размер 4-НОМ семейств. Случай k-НОМ групп представляет отдельный интерес (см., например, [10], [7], [6], [5]). В четвертом параграфе мы продолжаем изучение свойств назависмых относительно минимума групп, улучшая некоторые результаты из [7].

2. Независимость относительно минимума и l-ый минимум

Следующая лемма независимо появилась в работах [12] и [8]:

Лемма 2.1 ([12], [8])**.** *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является k-НОМ семейством. Пусть*

$$X, Y \subseteq [n], \quad X \cap Y = \emptyset, \quad |X| + |Y| \leqslant k-1 \quad \text{и} \quad z \in [n] \setminus (X \cup Y).$$

Тогда

$$\Pr_{\mathcal{F}}(\pi(X) < \pi(z) < \pi(Y)) = \frac{|X|! \cdot |Y|!}{(|X| + |Y| + 1)!}.$$

Простым следствием этой леммы является тот факт, что независимость относительно минимума эквивалентна независимости относительно максимума. На самом деле, верно более общее утверждение:

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является k-НОМ семейством, $X \subseteq [n]$, $|X| \leqslant k$, $x \in X$ и $l \in [|X|]$. Тогда*

$$\Pr_{\mathcal{F}}(\operatorname{rank}(\pi(x), \pi(X)) = l) = \frac{1}{|X|}. \tag{2}$$

Доказательство. Из леммы 2.1 немедленно следует

$$\begin{aligned}
&\Pr_{\mathcal{F}}(\operatorname{rank}(\pi(x), \pi(X)) = l) = \\
&\quad = \sum_{Y \subseteq X \setminus \{x\}, |Y| = l-1} \Pr_{\mathcal{F}}(\pi(Y) < \pi(x) < \pi((X \setminus Y) \setminus \{x\})) = \\
&\quad = \sum_{Y \subseteq X \setminus \{x\}, |Y| = l-1} \frac{(l-1)!(|X|-l)!}{|X|!} = \frac{1}{|X|}.
\end{aligned}$$

□

В частности, положив $l = |X|$, мы получаем, что независимость относительно минимума влечет независимость относительно максимума. Частный случай предыдущей леммы для $k = n$ был опубликован в [4].

Теперь покажем, что лемма 2.2 может быть обращена в следующем смысле:

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ и $k \in [n]$. Предположим, что для любого непустого $X \subseteq [n]$, такого что $|X| \leqslant k$, и любого $x \in X$ существует $l = l(x, X) \leqslant |X|$, такой что выполняется (2). Тогда $\mathcal{F}$ является k-НОМ семейством.*

Мы доказываем эту теорему индукцией по k. Случай $k = 1$ очевиден, потому что любое семейство является 1-НОМ. Индукционный переход осуществляется в лемме 2.3.

Лемма 2.3. *Пусть $k > 1$ и $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является $(k-1)$-НОМ семейством. Предположим, что для любого $X \subseteq [n]$, такого что $|X| = k$, и любого $x \in X$ существует $l = l(x, X) \leqslant k$, такой что выполняется (2). Тогда $\mathcal{F}$ является k-НОМ семейством.*

Доказательство. Зафиксируем множество $X \subseteq [n]$, такое что $|X| = k$. Применяя лемму 2.4 (доказываемую ниже), получим, что

$$p_i = \Pr_{\mathcal{F}}\left(\operatorname{rank}\left(\pi(x), \pi(X)\right) = i\right) = \frac{1}{k} + c(-1)^{i+1}\binom{k-1}{i-1}$$

для некоторого $c \in \mathbb{R}$. По предположению леммы $p_l = \frac{1}{k}$, следовательно, $c = 0$ и $p_1 = \frac{1}{k}$, а значит, $\mathcal{F}$ является k-НОМ семейством. Лемма 2.3 и теорема 2.1 доказаны. □

Лемма 2.4. *Пусть $k > 1$, а $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является $(k-1)$-НОМ семейством. Зафиксируем множество $X \subseteq [n]$, такое что $|X| = k$, а также $x \in X$. Определим*

$$p_i := \Pr_{\mathcal{F}}\left(\operatorname{rank}\left(\pi(x), \pi(X)\right) = i\right)$$

для каждого $i \in [k]$. Тогда существует константа $c \in \mathbb{R}$, такая что

$$p_i = \frac{1}{k} + c(-1)^{i+1}\binom{k-1}{i-1}$$

для всех $i \in [k]$.

Доказательство. Сперва для каждого $i \in [k]$ определим случайную переменную $M_i : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ следующим образом:

$$M_i(\pi) \; := \; \operatorname{ind}(\operatorname{rank}(\pi(x), \pi(X)) = i).$$

Следовательно, p_i есть математическое ожидание $\mathrm{E}(M_i)$. Для каждого $t \in [k]$ определим другую случайную переменную $S_t : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$:

$$S_t(\pi) \; := \sum_{\substack{Y \subseteq X \setminus \{x\}, \\ |Y| = t-1}} \operatorname{ind}(\pi(x) = \min \pi(X \setminus Y)).$$

Зафиксируем $\pi \in \mathcal{F}$ и выберем число $j \in [k]$, такое что $j = \operatorname{rank}(\pi(x), \pi(X))$, то есть

$$M_j(\pi) = 1 \text{ и } M_i(\pi) = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{3}$$

Положим $Z = \{z \in X : \; \pi(z) < \pi(x)\}$. Заметим, что $|Z| = j - 1$. Легко видеть, что для произвольного множества $Y \subseteq X \setminus \{x\}$

равенство $\pi(x) = \min(\pi(X \setminus Y))$ выполняется тогда и только тогда, когда $Z \subseteq Y$. Из этого следует, что для любого t

$$S_t(\pi) = \sum_{\substack{Y \subseteq X \setminus \{x\}, \\ |Y| = t-1}} \operatorname{ind}(Z \subseteq Y) = \binom{k-j}{t-j}. \tag{4}$$

Здесь мы считаем, что $\binom{k-j}{t-j} = 0$ при $t < j$.

Используя (3), перепишем уравнение (4) в следующем виде:

$$S_t(\pi) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-i}{t-i} M_i(\pi).$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}(S_t) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-i}{t-i} p_i. \tag{5}$$

С другой стороны, по определению S_t, при $t > 1$ выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S_t) &= \sum_{\substack{Y \subseteq X \setminus \{x\}, \\ |Y| = t-1}} \mathrm{E}(\operatorname{ind}(\pi(x) = \min \pi(X \setminus Y))) = \\ &= \sum_{\substack{Y \subseteq X \setminus \{x\}, \\ |Y| = t-1}} \Pr(\pi(x) = \min \pi(X \setminus Y)) = \binom{k-1}{t-1} \frac{1}{k-t+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

потому что $|X \setminus Y| = k - t + 1 \leqslant k - 1$ и $\mathcal{F}$ является $(k-1)$-НОМ семейством. Комбинируя (5) и (6), получим следующую систему из $(k-1)$ линейных уравнений с k (вещественными) неизвестными:

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k-i}{t-i} p_i = \binom{k-1}{t-1} \frac{1}{k-t+1}, \quad t = 2, \ldots, k. \tag{7}$$

Непосредственным вычислением, можно убедиться, что $p_i = \frac{1}{k}$ является решением системы (7). Аналогично проверяется, что $p_i = (-1)^{i+1}\binom{k-1}{i-1}$ является решением однородной системы соответствующей (7).

Заметим, что при удалении первого столбца из матрицы коэффициентов системы (7) получается нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали. Отсюда следует, что пространство решений системы (7) одномерно, а значит, каждое решение системы может быть представлено в виде $p_i = \frac{1}{k} + c(-1)^{i+1}\binom{k-1}{i-1}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать. $\square$

3. Независимость по k относительно минимума и независимость по $k+1$ относительно минимума

В этом параграфе мы устанавливаем связь между k-НОМ семействами и $(k+1)$-НОМ семействами для нечетных k.

Теорема 3.1. *Пусть k нечетно, а $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является k-НОМ семейством. Тогда $\mathcal{F}$ является $(k+1)$-НОМ семейством тогда и только тогда, когда для всех $X \subseteq [n]$, таких что $|X| = k+1$, и для каждого $x \in X$ выполняется равенство*

$$\Pr_{\mathcal{F}}\left(\pi(x) = \min \pi(X)\right) = \Pr_{\mathcal{F}}\left(\pi(x) = \max \pi(X)\right). \tag{8}$$

Доказательство. Ясно, что если $\mathcal{F}$ является $(k+1)$-НОМ семейством, то равенство (8) выполняется, так как независимость относительно минимума эквивалентна независимости относительно максимума. Таким образом, вторая часть теоремы (“только тогда”) доказана. Теперь зафиксируем множество X, такое что $|X| = k+1$, $x \in X$ и положим:

$$p_{\min} = \Pr_{\mathcal{F}}\left(\pi(x) = \min \pi(X)\right),\ p_{\max} = \Pr_{\mathcal{F}}\left(\pi(x) = \max \pi(X)\right).$$

Поскольку k нечетно, из леммы 2.4 следует, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$p_{\min} = \frac{1}{k+1} + c\binom{k}{0} = \frac{1}{k+1} + c$$

$$p_{\max} = \frac{1}{k+1} - c\binom{k}{k} = \frac{1}{k+1} - c.$$

По условию теоремы, $p_{\min} = p_{\max}$, а значит, $c = 0$ и $p_{\min} = \frac{1}{k+1}$. Теорема доказана. $\square$

Для семейства $\mathcal{F} \subseteq S_n$ и перестановки $\sigma \in S_n$ определим семейство

$$\sigma\mathcal{F} = \{\pi \in S_n :\ \exists \tau \in \mathcal{F}\ \pi = \sigma\tau\}.$$

Здесь мы считаем, что $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Для вероятностного распределения $\Pr_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}$, определим распределение на $\sigma\mathcal{F}$ следующим образом:

$$\Pr_{\sigma\mathcal{F}}(\pi) = \Pr_{\mathcal{F}}(\sigma^{-1}\pi).$$

Пусть $\sigma^\star \in S_n$ является перестановкой, переворачивающей порядок: $\sigma^\star(i) = n + 1 - i$ для каждого $i \in [n]$. Заметим, что если $\mathcal{F}$ является независимым по k относительно минимума семейством, то $\sigma^\star\mathcal{F}$ является независимым по k относительно максимума (а значит и минимума) семейством.

Пусть на семействах $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in S_n$ заданы вероятностные распределения $\Pr_{\mathcal{F}_1}$ и $\Pr_{\mathcal{F}_2}$. Определим вероятностное распределение на объединении $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ следующим образом:

$$\Pr_{\mathcal{F}}(\pi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}_1}(\pi), & \text{если } \pi \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2; \\ \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}_2}(\pi), & \text{если } \pi \in \mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_1; \\ \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}_1}(\pi) + \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}_2}(\pi), & \text{если } \pi \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2. \end{cases} \tag{9}$$

Легко показать, что семейство $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ с заданным выше распределением является k-НОМ, если оба семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ являются k-НОМ. Сформулируем основной результат этого параграфа:

Теорема 3.2. *Пусть k нечетно и пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является k-НОМ семейством. Тогда семейство $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \sigma^\star F$ с вероятностным распределением (9) является $(k+1)$-НОМ.*

Доказательство. Для любого $X \in [n]$ и любого $x \in X$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\Pr_{\mathcal{F}'}(\pi(x) = \min \pi(X)) = \\ &= \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}}(\pi(x) = \min \pi(X)) + \frac{1}{2}\Pr_{\sigma^\star\mathcal{F}}(\pi(x) = \min \pi(X)) = \\ &= \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}}(\pi(x) = \min \pi(X)) + \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}}(\pi(x) = \max \pi(X)) = \\ &= \frac{1}{2}\Pr_{\sigma^\star\mathcal{F}}(\pi(x) = \max \pi(X)) + \frac{1}{2}\Pr_{\mathcal{F}}(\pi(x) = \max \pi(X)) = \\ &= \Pr_{\mathcal{F}'}(\pi(x) = \max \pi(X)). \end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 3.1. □

В работе [9] появились две следующие теоремы, которые доказывали наилучшие существующие на тот момент верхние оценки на минимальный размер 3-НОМ и 4-НОМ семейств соответственно.

Теорема 3.3 ([9]). *Для любого целого $n \geqslant 3$, существует 3-НОМ семейство $\mathcal{F}$ (возможно смещенное), такое что*

$$|\mathcal{F}| \leqslant 12\sqrt{e}(1+o(1)) \cdot n \log_2^2 n.$$

Теорема 3.4 ([9]). *Для любого целого $n \geqslant 4$, существует 4-НОМ семейство $\mathcal{F}$ (возможно смещенное), такое что*

$$|\mathcal{F}| \leqslant 12\sqrt{e}(1+o(1)) \cdot n \log_2^3 n.$$

Применяя теорему 3.2, мы можем построить 4-НОМ семейство из 3-НОМ семейства за счет удвоения размера последнего. Это дает возможность применить теорему 3.2 к теореме 3.3 и улучшить приведенную выше верхнюю оценку для случая 4-НОМ:

Следствие 3.1. *Для любого целого $n \geqslant 4$, существует 4-НОМ семейство $\mathcal{F}$ (возможно смещенное), такое что*

$$|\mathcal{F}| \leqslant 24\sqrt{e}(1+o(1)) \cdot n \log_2^2 n.$$

4. Независимые относительно минимума группы

Случай k-НОМ семейств, являющихся также группами, привлек особый интерес (например, см. [10], [7], [6], [5]). В работе [5], исследуются группы обладающие свойством k-НОМ для любого линейного упорядочивания их области определения. Используя теорему о классификации конечных простых групп, авторы находят все такие группы в явном виде.

В этом параграфе мы изучаем дальнейшие свойства независимых относительно минимума групп и улучшаем некоторые результаты, полученные в [7]. В частности, мы устанавливаем связь между несмещенными и смещенными k-НОМ группами.

Для семейства $\mathcal{F} \subseteq S_n$ и перестановки $\sigma \in S_n$ определим семейство

$$\mathcal{F}\sigma = \{\pi \in S_n : \exists \tau \in \mathcal{F} \ \pi = \tau\sigma\}.$$

Для вероятностного распределения $\Pr_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}$ зададим распределение на $\mathcal{F}\sigma$ следующим образом:

$$\Pr_{\mathcal{F}\sigma}(\pi) = \Pr_{\mathcal{F}}(\pi\sigma^{-1}). \tag{10}$$

Следующие две леммы немедленно следуют из определения k-НОМ семейств.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является k-НОМ семейством по отношению к вероятностному распределению $\Pr_{\mathcal{F}}$. Тогда для любой перестановки $\sigma \in S_n$, множество $\mathcal{F}\sigma$ является k-НОМ семейством по отношению к индуцированному вероятностному распределению* (10).

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является семейством перестановок и $\Pr_i$, $i = 1, \ldots, l$, являются вероятностными распределениями на $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ является k-НОМ по отношению к каждому $\Pr_i$, $i = 1, \ldots, l$, то $\mathcal{F}$ также является k-НОМ по отношению к любой выпуклой комбинации распределений $\Pr_1, \ldots, \Pr_l$. В частности, $\mathcal{F}$ является k-НОМ семейством по отношению к распределению $\Pr^*$, где*

$$\Pr^*(\pi) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \Pr_i(\pi). \tag{11}$$

Следующая теорема утверждает, что любая смещенная k-НОМ группа является также несмещенной.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является смещенной k-НОМ группой по отношению к вероятностному распределению $\Pr$. Тогда $\mathcal{F}$ является также несмещенной k-НОМ группой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$. Поскольку $\mathcal{F}$ — группа, для каждого $i = 1, \ldots, m$ мы можем определить следующее вероятностное распределение на $\mathcal{F}$:

$$\Pr_i(\pi) = \Pr(\pi\tau_i^{-1}).$$

По лемме 4.1, $\mathcal{F}$ является k-НОМ группой по отношению к каждому $\Pr_i$. В свою очередь, лемма 4.2 влечет, что $\mathcal{F}$ является k-НОМ группой по отношению к распределению $\Pr^*$, определенному в (11). Однако, для каждой перестановки $\pi \in \mathcal{F}$ выполняется

$$\Pr^*(\pi) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \Pr_i(\pi) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \Pr(\pi\tau_i^{-1}) = \frac{1}{m} \sum_{\tau \in \mathcal{F}} \Pr(\tau) = \frac{1}{m},$$

то есть распределение $\Pr^*$ равномерно, что и требовалось показать. □

Следствие 4.1. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является k-НОМ семейством (смещенным или несмещенным) и пусть $\mathcal{G} \subseteq S_n$ является группой, содержащей $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{G}$ является несмещенной k-НОМ группой. В* *частности, группа порожденная k-НОМ семейством (смещенным или несмещенным), является несмещенной k-НОМ группой.*

Доказательство. Заметим, что можно рассматривать группу $\mathcal{G}$ как смещенную k-НОМ группу по отношению к распределению $\Pr_{\mathcal{G}}$, где $\Pr_{\mathcal{G}}(\pi) = \Pr_{\mathcal{F}}(\pi)$ если $\pi \in \mathcal{F}$, и $\Pr_{\mathcal{G}}(\pi) = 0$ если $\pi \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Теперь утверждение следует из теоремы 4.1. □

В работе [7] изучалась связь между независимостью относительно минимума и транзитивностью. В частности, была доказана следующая теорема:

Теорема 4.2 ([7])**.** *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является несмещенной k-НОМ группой. Если либо $n \geqslant 6$ и $k \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, либо $n \neq 3$ и $k > \frac{n}{2}$, тогда $\mathcal{F}$ транзитивна.*

Для смещенных k-НОМ групп известен существенно более слабый результат. А именно, в [7] был доказан аналог теоремы 4.2 при условии, что $k \geqslant n - \sqrt{n} + 1$. Теперь мы можем улучшить этот результат:

Теорема 4.3. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является смещенной k-НОМ группой. Если либо $n \geqslant 6$ и $k \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, либо $n \neq 3$ и $k > \frac{n}{2}$, тогда $\mathcal{F}$ транзитивна.*

В самом деле, если $\mathcal{F}$ является смещенной k-НОМ группой, то по теореме 4.1 она же является несмещенной, а значит мы можем применить теорему 4.2. Покажем, что похожее утверждение выполняется и для семейств перестановок.

Определение 4.1. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$. Множество $X \subseteq [n]$ называется $\mathcal{F}$-инвариантным, если $\pi(X) = X$ для всех $\pi \in \mathcal{F}$. Эквивалентным образом, множество $\mathcal{F}$-инвариантно, если оно является объединением орбит группы, порожденной семейством $\mathcal{F}$.*

Всегда существует по крайней мере два инвариантных множества, которые называются тривиальными, а именно $\emptyset$ и $[n]$. Заметим, что если $\mathcal{F}$ — группа, то $\mathcal{F}$ транзитивна тогда и только тогда, когда все $\mathcal{F}$-инвариантные множества тривиальны.

Теорема 4.4. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq S_n$ является смещенным k-НОМ семейством. Если либо $n \geqslant 6$ и $k \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, либо $n \neq 3$ и $k > \frac{n}{2}$, то все $\mathcal{F}$-инвариантные множества тривиальны.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq [n]$ является $\mathcal{F}$-инвариантным множеством. Определим группу $\mathcal{G} = \{\pi \in S_n : \ \pi(X) = X\}$. Ясно, что $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, а значит, по следствию 4.1, $\mathcal{G}$ является несмещенной k-НОМ группой. По теореме 4.2, $\mathcal{G}$ транзитивна на $[n]$. Отсюда следует, что либо $X = [n]$, либо $X = \emptyset$, так как X является $\mathcal{G}$-инвариантным множеством. $\square$

Литература

1. A. Z. Broder, *On the resemblance and containment of documents.* — Proc. of Compression and Complexity of Sequences (1998), 21–29.
2. A. Z. Broder, M. Charikar, A. M. Frieze, and M. Mitzenmacher, *Min-wise independent permutations.* — J. Comput. Syst. **60**, No. 3 (2000), 630–659.
3. A. Z. Broder, M. Charikar, M. Mitzenmacher, *A Derandomization using min-wise independent permutations.* — Proc. of RANDOM'98, Lecture Notes in Computer Science 1518, Springer (1998), 15–24.
4. A. Z. Broder, M. Mitzenmacher, *Completeness and robustness properties of min-wise independent permutations.* — Random Structures and Algorithms **18**, No. 1 (2001), 18–30.
5. P. J. Cameron, P. Spiga, *Min-wise independent groups with respect to any linear order.* Preprint. Available at `http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/preprints/kMWI.pdf`.
6. C. Franchi. *Multiple transitivity and min-wise indendence in permutation groups.* — Quaderni del Seminario Matematico di Brescia No. 7 (2003), 1–9.
7. C. Franchi, M. Vsemirnov, *Min-wise independent groups.* — European J. Combinatorics **24**, No. 7 (2003), 855–875.
8. J. Matoušek, M. Stojaković, *On restricted min-wise independence of permutations.* — Random Struct. Algorithms **23** (2003), 397–408.
9. J. Tarui, T. Itoh, Y. Takei, *A nearly linear size 4-min-wise independent permutation family by finite geometries.* — RANDOM-APPROX (2003), 396–408.
10. M. Vsemirnov, *Automorphisms of projective spaces and min-wise independent sets of permutations.* — Quaderni del Seminario Matematico di Brescia No. 53 (2002), 1–16. To appear in J. Discrete Math.
11. М. А. Всемирнов, Э. А. Гирш, Е. Я. Данцин, С. В. Иванов, *Алгоритмы для пропозициональной выполнимости и верхние оценки их сложности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **277** (2001), 14–46.
12. С. А. Норин, *Полиномиальная нижняя оценка для размера независимого по k относительно минимума множества перестановок.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **277** (2001), 104–116.

Bargachev V. On some properties of min-wise independent families and groups of permutations.

Informally, a family $\mathcal{F} \subseteq S_n$ of permutations is k-restricted min-wise independent if for any $X \subseteq [n]$ with $|X| \leqslant k$, each $x \in X$ has an equal chance of being mapped to the minimum among $\pi(X)$. In the second section of this paper, the connection of min-wise independent families of permutations and independence on l-th minimum is studied. In the third section we present a way to construct $(k+1)$-restricted min-wise independent family from k-restricted min-wise independent family when k is odd. As a corollary, we improve the existing upper bound on the minimal size of 4-restricted min-wise independent family. In the last section we consider min-wise indepenent groups of permutations.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 29 сентября 2004 г.