Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 316, 2004 г.

В. П. Оревков

НОВЫЙ РАЗРЕШИМЫЙ ХОРНОВСКИЙ ФРАГМЕНТ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

В теории доказательств описаны широкие подклассы чистого исчисления предикатов, для которых существуют алгорифмы, распознающие выводимость формул из этих подклассов. К сожалению, в интересных для приложений в информатике (логическое программирование, дедуктивный синтез алгорифмов и тому подобные случаи) такие разрешающие алгорифмы имеют большую (экспоненциальную и выше) сложность вычисления. Однако, подобрав удачную сложностную характеристику формул, в некоторых случаях удается разбить такой класс, зафиксировав значение характеристики, на подклассы, для которых разрешающие алгорифмы имеют полиномиальную сложность.

Бернайс и Шенфинкель в работе [1] ещё в 1928 году доказали разрешимость проблемы распознавания выводимости в исчислении предикатов (без функциональных знаков) замкнутых формул из класса ($\forall\exists$). Формулы этого класса имеют вид

$$\forall x_1 \dots x_n \exists y_1 \dots y_m M,$$

где формула M не содержит кванторов. Следует заметить, что в этих формулах кванторы всеобщности можно заменить 0-местными функциональными знаками (константами).[1] Льюис в работе [4] показал, что проблема разрешимости класса формул ($\forall\exists$) принадлежит NTIME(2^{cl}), где l — длина записи исходной формулы или секвенции. Даже в хорновском случае эта проблема является EXPTIME-трудной (см. [2, теорема 2.2.52]).

В настоящей работе будет описан класс секвенций $\mathfrak{A}$, который является расширением класса ($\forall\exists$). Основное внимание в этой ра-

Работа выполнена при финансовой поддержке *Intel Corporation* (грант CRDF GAP RM0-1373-ST-03) и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант RM1-2409-ST-02).

[1]Полученная в результате такой замены формула будет выводима тогда и только тогда, когда выводима исходная формула.

боте будет уделено доказательству алгорифмической разрешимости проблемы распознавания выводимости секвенций из класса $\mathfrak{A}$ в интуиционистском исчислении предикатов. В результате, получим также разрешающий алгорифм и для проблемы выводимости в классическом исчислении, так как секвенции из класса $\mathfrak{A}$ доказуемы в интуиционистском исчислении предикатов тогда и только тогда, когда они доказуемы в классическом исчислении.

Будут указаны сложностные характеристики секвенций, одновременная фиксация которых разбивает класс $\mathfrak{A}$ на полиномиально разрешимые подклассы.

1.

Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений отрицания и импликации. Заметим, что позитивная формула A может содержать любые сочетания кванторов $\forall$ и $\exists$.

Будем говорить, что секвенция S принадлежит классу $\mathfrak{A}$, если выполняются условия:

(1) сукцедент секвенции S пуст или является позитивной формулой;

(2) в S нет функциональных знаков (за исключением констант);

(3) посылки входящих в S импликаций являются позитивными формулами;

(4) отрицания могут входить в S только перед позитивными формулами;

(5) вхождения дизъюнкции в антецедент S управляются вхождением отрицания или находятся в посылке импликации;

(6) вхождения квантора существования в антецедент S управляются вхождением отрицания или находятся в посылке импликации.

Этот класс шире хорновского варианта класса формул $(\forall\exists)$, так как некоторые вхождения квантора $\forall$ в сукцедент могут управляться вхождениями квантора $\exists$.

Класс $\mathfrak{A}$ специально описывается в терминах вхождений логических связок и кванторов, так как введение сколемовских функций может излишне расширить фрагмент, сделав его неразрешимым.

Примером секвенции из класса $\mathfrak{A}$ может служить любая секвенция

$$\Gamma, \Sigma, \Pi \longrightarrow A,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

(1) в этой секвенции нет функциональных знаков (за исключением констант);
(2) A — замкнутая позитивная формула;
(3) Γ — список замыканий элементарных формул;
(4) Π — список замкнутых отрицаний позитивных формул;
(5) Σ — список замкнутых формул вида

$$\forall x_1 \dots x_n (B \supset E),$$

где E — элементарная формула, а B — позитивная формула.

Теорема 1. *Проблема распознавания выводимости в исчислении предикатов секвенций из класса $\mathfrak{A}$ алгорифмически разрешима.*

Следующие три параграфа содержат доказательство этой теоремы.

2.

Проблему распознавания выводимости в исчислении предикатов секвенций из класса $\mathfrak{A}$ сведем к проблеме распознавания выводимости таких секвенций в интуиционистском исчислении предикатов. Нам также потребуется одна специализация формы доказательств в интуиционистском секвенциальном исчислении.

Класс $\mathfrak{A}$ содержится в одном из вполне гливенковских σ-классов, перечисленных в теореме 4.1 работы [10]. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Секвенция из класса $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда выводима в классическом исчислении предикатов, когда она выводима в интуиционистском исчислении.*

В дальнейшем мы будем использовать интуиционистское секвенциальное исчисление, которое отличается от традиционного. Это исчисление обозначим $\mathbf{IGL}^-$. В этом исчислении будут выводиться секвенции, в сукцеденте которых содержится не более одной формулы. Будем отождествлять секвенции, отличающиеся друг от друга перестановками формул в антецеденте.

Аксиомами исчисления $\mathbf{IGL^-}$ являются секвенции вида

$$\Gamma, E \longrightarrow E,$$

где E — элементарная формула. (Здесь и далее Γ и Δ — списки формул, Δ содержит не более одной формулы.)

Правила $\neg\rightarrow$ и $\supset\rightarrow$ имеют вид

$$\frac{\Gamma, \neg A \longrightarrow A}{\Gamma, \Sigma, \neg A \longrightarrow \Delta}\neg\rightarrow, \qquad \frac{\Gamma, (A \supset B) \longrightarrow A; \qquad \Gamma, \Sigma, B \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Sigma, (A \supset B) \longrightarrow \Delta}\supset\rightarrow .$$

Правило $\& \rightarrow$ имеет два варианта:

$$\frac{\Gamma, (A\&B), A \longrightarrow \Delta}{\Gamma, (A\&B) \longrightarrow \Delta}\& \rightarrow \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma, (A\&B), B \longrightarrow \Delta}{\Gamma, (A\&B) \longrightarrow \Delta}\& \rightarrow .$$

Правила $\forall \rightarrow, \rightarrow \forall, \rightarrow \exists, \rightarrow \vee$ и $\rightarrow \&$ не отличаются от соответствующих правил традиционного односукцедентного интуиционистского исчисления предикатов без структурных правил.

Правила $\vee \rightarrow, \exists \rightarrow, \rightarrow \neg$ и $\rightarrow\supset$ не применяются в доказательствах секвенций из класса $\mathfrak{A}$.

В исчислении $\mathbf{IGL^-}$ нет правила сечения.

Исчисление $\mathbf{IGL^-}$ является модификацией исчисления $\mathbf{IGL}$ из книги [7]. Главными формулами аксиом исчисления $\mathbf{IGL}$ могут быть произвольные формулы, а не только элементарные, как в исчислении $\mathbf{IGL^-}$.

Используя допустимость структурных правил сокращения повторений и утончения, легко также доказать равнообъемность исчисления $\mathbf{IGL^-}$ исчислению $\mathbf{IGL}$ и более известным вариантам интуиционистского исчисления предикатов (например, исчислению $\mathbf{G}$ из работы [3] или исчислению $\mathbf{LJ}$ из книги [5]).

Доказательства в исчислении $\mathbf{IGL^-}$ будем записывать в древовидной форме. Следуя работе [3], будем говорить, что вхождение формулы в секвенцию из доказательства *прослеживаемо до аксиом*, если главное вхождение некоторой аксиомы является предком данного вхождения формулы.

Пусть D — доказательство в исчислении $\mathbf{IGL^-}$ секвенции из класса $\mathfrak{A}$. Доказательство D будем называть $(-)$-*регулярным*, если для любого применения L правила в D выполняются следующие условия:

(1) каждая боковая формула применения L прослеживаема до аксиом;

(2) если боковое вхождение L не является элементарной формулой, то это боковое вхождение — главное вхождение применения правила, стоящего в D непосредственно над L;
(3) если L является применением правила $\supset\rightarrow$ и его правая боковая формула элементарна, то правая посылка L является аксиомой и правое боковое вхождение — её главным вхождением;
(4) если L является применением правила $\& \rightarrow$ и его боковая формула элементарна, то посылка L является аксиомой и боковое вхождение — её главным вхождением;
(5) если L является применением правила $\forall \rightarrow$ и его боковая формула элементарна, то посылка L является аксиомой и боковое вхождение — её главным вхождением;
(6) если L является применением правила $\neg \rightarrow$, то антецедент посылки совпадает с антецедентом последней секвенции D;
(7) если L является применением правила $\supset\rightarrow$, то антецедент левой посылки совпадает с антецедентом последней секвенции D.

Эта специализация формы вывода отличается некоторыми деталями от регулярных выводов из работы [11]. Аналогичная специализация формы вывода определена также в работе [6] для секвенциального варианта модального исчисления S4.

Пусть D — $(-)$-регулярное доказательство в интуиционистском секвенциальном исчислении секвенции

$$\Gamma \longrightarrow \Delta$$

из класса $\mathfrak{A}$. Рассмотрим структуру доказательства D подробнее.

Пусть U — набор применений правил в доказательстве D. Набор U будем называть *антецедентным (сукцедентным) блоком,* если выполняются следующие условия:

- набор U не является пустым;
- набор U порождает в дереве-доказательстве D связный подграф;
- каковы бы ни были применения L_1 и L_2 из набора U, если L_1 лежит в D непосредственно над L_2, то главная формула L_1 является боковой формулой L_2;

- все применения правил в наборе U являются применениями правил введения связок и кванторов в антецедент (соответственно, в сукцедент).

Пусть набор U — антецедентный или сукцедентный блок в D. Секвенцию S будем называть *верхней секвенцией блока* U, если S является посылкой какого-нибудь применения правила из блока U и не является заключением ни одного применения правила из блока U. Секвенцию S будем называть *нижней секвенцией блока* U, если S является заключением какого-нибудь применения правила из блока U и не является посылкой какого-либо применения правила из блока U. Заметим, что нижняя секвенция блока единственна. Ясно, что блок имеет древовидную структуру с корнем. В корне лежит нижняя секвенция, а в листьях — верхние.

Блок U будем называть *максимальным*, если он не является собственной частью другого блока с той же самой нижней секвенцией. Верхнюю секвенцию S антецедентного блока U будем называть *главной*, если S является аксиомой и ее сукцедентное главное вхождение имеет потомка в сукцеденте нижней секвенции блока U.

Лемма 2.2. *Каков бы ни был максимальный антецедентный блок U в $(-)$-регулярном доказательстве D, выполняется одно из условий:*

- *сукцедент нижней секвенции блока U пуст;*
- *сукцедент нижней секвенции блока U содержит формулу, которая не прослеживаема до аксиом;*
- *сукцедент нижней секвенции блока U содержит элементарную формулу, которая прослеживаема до аксиом, и блок U имеет главную верхнюю секвенцию.*

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по числу применений правил в блоке.

Теорема 2. *Любое доказательство секвенции из класса $\mathfrak{A}$ в интуиционистском секвенциальном исчислении можно перестроить в $(-)$-регулярное доказательство той же самой секвенции в том же исчислении.*

Доказательство. Теорему будем доказывать достаточно традиционной индукцией по высоте вывода (в аналогичной ситуации такая индукция подробно проведена в работе [6]).

Допустим, что теорема доказана для всех доказательств, высота которых меньше, чем h. Докажем теорему для доказательства D, высота которого равна h.

Если D не заканчивается применением какого-нибудь правила и состоит только из одной аксиомы, D уже является $(-)$-регулярным. Предположим, что D заканчивается применением L какого-нибудь правила вывода. Рассмотрим два случая.

Главная формула L не прослеживаема до аксиом: В этом случае применение L можно удалить (см., например, [3, лемма 3]) и получить доказательство той же секвенции меньшей высоты.

Главная формула L прослеживаема до аксиом: В соответствии с видом правила L рассмотрим три подслучая.

Применение сукцедентного правила или $\neg\rightarrow$: Заменим доказательства посылок L на результат применения к ним индукционного предположения. С помощью леммы 2.2 легко показать $(-)$-регулярность полученного доказательства.

Применение $\&\rightarrow$ или $\forall\rightarrow$: Применим индукционное предположение к доказательству посылки L. Из антецедентов секвенций в полученном доказательстве вычеркнем вхождения боковой формулы L. Затем в тех узлах, где нарушается структура доказательства, вставим применение правила с такой же главной формулой, как и у L. Легко показать, что в результате получим $(-)$-регулярное доказательство.

Применение $\supset\rightarrow$: Пусть D_1 — результат применения индукционного предположения к доказательству левой посылки L, а D_2 — к доказательству правой посылки. Из антецедентов секвенций в D_2 вычеркнем вхождения правой боковой формулы L. Затем в тех узлах, где нарушается структура доказательства, вставим применение правила $\supset\rightarrow$, у которого доказательством левой посылки будет D_1. С помощью леммы 2.2 легко показать $(-)$-регулярность полученного доказательства.

3.

Пусть S — формула или секвенция. Следуя работе [8], *предпреградой* в S будем называть любой список вхождений элементарных подформул в S, в котором никакие два вхождения не разделяются ни положительным вхождением дизъюнкции, ни положительным вхождением импликации, ни отрицательным вхождением конъюнкции и не происходят от разных членов секвенции. Предпреграда, которую нельзя дополнить еще одним вхождением элементарной подформулы, называется *преградой*.

Пусть D — $(-)$-регулярное доказательство в интуиционистском секвенциальном исчислении секвенции

$$\Gamma \longrightarrow \Delta$$

из класса $\mathfrak{A}$.

Секвенцию S из D будем называть *основной*, если выполняются следующие условия:

- в сукцеденте S стоит элементарная формула, которая прослеживаема до аксиом;
- антецедент S совпадает с антецедентом последней секвенции D.

Пусть S — секвенция из доказательства D. Будем говорить, что секвенции

$$\Gamma \longrightarrow E_1, \ldots, \Gamma \longrightarrow E_n, \tag{1}$$

где $n \geqslant 1$, *запирают в D секвенцию S*, если выполняются следующие условия:

- секвенции (1) являются основными секвенциями доказательства D и лежат в D выше секвенции S;
- образы вхождений формул $E_1, \ldots, E_n$ образуют в секвенции S преграду.

Будем говорить, что секвенции (1), где $n \geqslant 0$, *запирают в D секвенцию S с помощью аксиомы*

$$\Sigma, E \longrightarrow E, \tag{2}$$

если выполняются следующие условия:

- секвенции (1) являются основными секвенциями доказательства D и лежат в D выше секвенции S;
- секвенция (2) является аксиомой и лежит в D выше секвенции S;
- вхождение формулы E в сукцедент аксиомы (2) имеет в сукцеденте секвенции S потомка;
- образы вхождений формул $E_1, \ldots, E_n$ и антецедентного вхождения формулы E в аксиому (2) образуют в секвенции S преграду.

Следует заметить, что при $n = 0$ секвенция S может совпасть с аксиомой (2).

Допустим, что доказательство D содержит только одну секвенцию. Тогда его последняя секвенция $\Gamma \longrightarrow \Delta$ является аксиомой. В этом случае секвенция $\Gamma \longrightarrow \Delta$ запирает сама себя и запирается пустым набором основных секвенций с помощью аксиомы $\Gamma \longrightarrow \Delta$.

Лемма 3.1. *Каков бы ни был максимальный сукцедентный блок U в D, верхние секвенции блока U запирают нижнюю секвенцию этого блока.*

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по числу применений правил в блоке.

Лемма 3.2. *Каков бы ни был максимальный антецедентный блок U в D, можно указать такой список L основных секвенций, что выполняются следующие условия:*

- *если сукцедент нижней секвенции блока U не содержит формулу, которая прослеживаема до аксиом, то список L запирает в D нижнюю секвенцию блока U;*
- *если сукцедент нижней секвенции блока U содержит формулу, которая прослеживаема до аксиом, то список L запирает в D нижнюю секвенцию блока U с помощью его главной верхней секвенции.*

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по числу применений правил в блоке с помощью лемм 2.2 и 3.1.

4.

Сформулируем несколько лемм, необходимых для доказательства разрешимости класса $\mathfrak{A}$. Пусть секвенция $\Gamma \longrightarrow \Delta$ принадлежит классу $\mathfrak{A}$. Пронумеруем все положительные вхождения элементарных подформул в секвенцию $\Gamma \longrightarrow \Delta$ и все отрицательные вхождения. Предположим, что $\Gamma \longrightarrow \Delta$ содержит l_+ положительных вхождений элементарных подформул и l_- отрицательных.

Литералом будем называть выражение вида $(\tilde{E}, i, j)$, где E — элементарная формула в языке секвенции $\Gamma \longrightarrow \Delta$, i и j — натуральные числа, $1 \leqslant i \leqslant l_-$ и $1 \leqslant j \leqslant l_+$. Здесь $\tilde{E}$ обозначает результат замыкания кванторами всеобщности всех переменных, которые входят в E и не входят свободно в секвенцию $\Gamma \longrightarrow \Delta$.

Будем говорить, что литерал (U_0, i_0, j_0) *непосредственно выводим из литералов* $(U_1, i_1, j_1), \ldots, (U_n, i_n, j_n)$, если существует такое доказательство D секвенции

$$U_1, \ldots, U_n, \Gamma \longrightarrow U_0,$$

что выполняются следующие условия:

- доказательство D является $(-)$-регулярным доказательством;
- вхождения формул $U_0, U_1, \ldots, U_n$ в последнюю секвенцию прослеживаемы до аксиом;
- в любой аксиоме потомком антецедентного главного вхождения является одна из формул $U_1, \ldots, U_n$;
- если в какой-нибудь аксиоме потомком одного главного вхождения является формула U_0, то образом другого главного вхождения является отрицательное вхождение элементарной подформулы в секвенцию $\Gamma \longrightarrow \Delta$ с номером i_0;
- если в какой-нибудь аксиоме потомком одного главного вхождения является формула U_k: $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то образом другого главного вхождения является положительное вхождение элементарной подформулы в секвенцию $\Gamma \longrightarrow \Delta$ с номером j_k.

Лемма 4.1. *Если литерал (U_0, i_0, j_0) непосредственно выводим из литералов $(U_1, i_1, j_1), \ldots, (U_n, i_n, j_n)$, то положительные вхождения элементарных подформул с номерами $j_1, \ldots, j_n$ и отрицательное вхождение с номером i_0 вместе образуют в секвенции $\Gamma \longrightarrow \Delta$ преграду.*

Доказательство. Используются леммы 2.2 и 3.2.

Будем говорить, что Δ *непосредственно выводима из литералов* $(U_1, i_1, j_1), \ldots, (U_n, i_n, j_n)$, если существует такое доказательство D секвенции

$$U_1, \ldots, U_n, \Gamma \longrightarrow \Delta,$$

что выполняются следующие условия:

- доказательство D является $(-)$-регулярным доказательством;
- вхождения формул $U_1, \ldots, U_n$ в последнюю секвенцию прослеживаемы до аксиом;

- в любой аксиоме потомком одного главного вхождения является одна из формул $U_1, \ldots, U_n$;
- если в какой-нибудь аксиоме потомком одного главного вхождения является формула U_k: $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то образом другого главного вхождения является положительное вхождение элементарной подформулы в секвенцию $\Gamma \longrightarrow \Delta$ с номером j_k.

Лемма 4.2. *Если Δ непосредственно выводима из литералов $(U_1, i_1, j_1), \ldots, (U_n, i_n, j_n)$, то положительные вхождения элементарных подформул с номерами $j_1, \ldots, j_n$ образуют в секвенции $\Gamma \longrightarrow \Delta$ преграду.*

Доказательство. Используются леммы 2.2, 3.1 и 3.2.

Список литералов

$$(U_1, i_1, j_1), \ldots, (U_n, i_n, j_n)$$

будем называть *L-доказательством секвенции* $\Gamma \longrightarrow \Delta$, если выполняются следующие условия:

- литералы не повторяются;
- каждый литерал непосредственно выводим из некоторого подсписка предшествующих ему литералов;
- Δ непосредственно выводима из некоторого подсписка литералов.

L-доказательство U будем называть *L-доказательством с анализами применений правил,* если каждому литералу в U приписан список номеров литералов, из которых он непосредственно выводим, а в конце U приведен список, из которого непосредственно выводима Δ.

Лемма 4.3. *Если можно построить L-доказательство секвенции из класса $\mathfrak{A}$, то эта секвенция выводима в исчислении предикатов.*

Доказательство. Индукция по числу литералов в L-доказательстве. Используется допустимость правила сечения.

Лемма 4.4. *Если секвенция из класса $\mathfrak{A}$ выводима в исчислении предикатов, то можно построить её L-доказательство.*

Доказательство. Допустим, что секвенция из класса $\mathfrak{A}$ выводима в исчислении предикатов. Тогда по лемме 2.1 и теореме 2 можно построить ее $(-)$-регулярное доказательство. Далее проводится индукция по высоте доказательства, использующая леммы 3.1 и 3.2.

Доказательство теоремы 1. Размер любого L-доказательства секвенции S из класса $\mathfrak{A}$ можно оценить сверху исходя из сложности секвенции S. Отсюда и из лемм 4.3 и 4.4 получаем теорему 1.

5.

Рассмотрим пример:

$$\forall x((\forall y(R(x,y) \vee \exists z R(z,y)) \supset \forall u R(u,x)) \& R(x,x)) \longrightarrow \exists v \forall w (R(v,w) \& R(w,v)). \quad (3)$$

В секвенцию (3) элементарные формулы $R(x,y), R(z,y), R(v,w)$ и $R(w,v)$ входят положительно, а элементарные формулы $R(u,x)$ и $R(x,x)$ — отрицательно.

Секвенция (3) содержит 4 преграды:

- вхождения элементарных подформул $R(x,y)$ и $R(u,x)$;
- вхождения элементарных подформул $R(z,y)$ и $R(u,x)$;
- вхождение элементарной подформулы $R(x,x)$;
- вхождения элементарных подформул $R(v,w)$ и $R(w,v)$.

Обозначим посредством A формулу

$$\forall x((\forall y(R(x,y) \vee \exists z R(z,y)) \supset \forall u R(u,x)) \& R(x,x)).$$

Любое $(-)$-регулярное доказательство секвенции (3) заканчивается максимальным сукцедентным блоком

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \longrightarrow R(a,b); \qquad A \longrightarrow R(b,a)}{A \longrightarrow (R(a,b) \,\&\, R(b,a))} \to \&}{A \longrightarrow \forall w (R(a,w) \,\&\, R(w,a))} \to \forall}{A \longrightarrow \exists v \forall w (R(v,w) \,\&\, R(w,v))} \to \exists.$$

Список литералов

$$(\forall x R(x,x), 2, 2), (\forall z y R(z,y), 1, 3), (\forall z y R(z,y), 1, 4)$$

является L-доказательством секвенции (3).

6.

Сформулируем верхние оценки сложности разрешимости класса $\mathfrak{A}$.

Лемма 6.1. *Число литералов в любом L-доказательстве секвенции S не превосходит*

$$(k+q)^q l_+ l_-,$$

где l_+ — число положительных вхождений элементарных подформул в S, l_- — число отрицательных вхождений элементарных подформул в S, k — число свободных переменных в S, q — максимальное число вхождений переменных в элементарные подформулы S.

Лемма 6.2. *L-доказательства с анализами применений правил можно распознать за полиномиальное время от длины записи L-доказательства и доказываемой секвенции.*

Теорема 3. *Каково бы ни было натуральное число p, проблема распознавания выводимости в исчислении предикатов секвенций из $\mathfrak{A}$, максимальная размерность предикатов в которых не превосходит p, принадлежит сложностному классу NP.*

Доказательство. Эта теорема вытекает из лемм 4.3, 4.4, 6.1 и 6.2.

Теорема 4. *Проблема распознавания выводимости секвенций из класса $\mathfrak{A}$, которые содержат только одноместные предикаты и не содержат $\neg, \supset$ и квантора $\forall$, является NP-трудной.*

Доказательство. К этой проблеме сведем задачу распознавания выполнимости формул исчисления высказываний. Пусть A — формула исчисления высказываний. Будем предполагать, что A не содержит $\supset$, а $\neg$ входит только перед пропозициональными переменными. Пусть $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ — список без повторений всех пропозициональных переменных в формуле A. Введем два одноместных предиката P и Q, две константы t и f и n попарно различных предметных переменных $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для всех i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ заменим в A все вхождения $\neg X_i$ на $Q(x_i)$, а затем все вхождения X_i на $P(x_i)$. В результате получим формулу A^*. Покажем, что формула A тогда и только тогда выполнима, когда выводима секвенция

$$P(t), Q(f) \longrightarrow \exists x_1 x_2 \ldots x_n A^*. \tag{4}$$

Предположим, что формула A выполнима. Пусть τ — распределение истинностных значений $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$, при котором формула A принимает значение истина. Для всех i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ заменим в A^* все вхождения x_i на t, если в τ значением X_i является истина, и на f, если в τ значением X_i является ложь. В результате получим формулу A^τ. Индукцией по числу вхождений логических связок в формулу A легко доказать, что доказуема секвенция

$$P(t), Q(f) \longrightarrow A^\tau. \tag{5}$$

Отсюда легко получить доказательство секвенции (4).

Предположим, что секвенция (4) выводима. Тогда по теореме 4.3 работы [10] (см. также [9, теорема Харропа]) можно построить[2] такое распределение τ истинностных значений переменных $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$, при котором секвенция (5) доказуема. Индукцией по числу вхождений логических связок в формулу A легко доказать, что формула A принимает при распределении τ значение истина.

Замечание 6.1. Задачу о клике можно свести к проблеме распознавания выводимости секвенций с одним двухместным предикатом из класса $\mathfrak{A}$ вида

$$E_1, E_2, \ldots, E_k \longrightarrow \exists x_1 x_2 \ldots x_m (B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n),$$

где $E_1, E_2, \ldots, E_k, B_1, B_2, \ldots, B_n$ — элементарные формулы.

Пусть S — секвенция из $\mathfrak{A}$. Поставим в соответствие каждому литералу секвенции S пропозициональную переменную, причем разным литералам — разные переменные. Обозначим через Ξ_S список всех формул вида

$$((X_1 \& X_2 \& \ldots \& X_n) \supset X_0),$$

где переменные $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ поставлены в соответствие литералам $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n$ и литерал U_0 непосредственно выводим из литералов $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Через Π_S обозначим список всех формул вида

$$\neg(X_1 \& X_2 \& \ldots \& X_n),$$

[2]Здесь используется свойство экзистенциональности интуиционистского исчисления предикатов.

где переменные $X_1, X_2, \ldots, X_n$ поставлены в соответствие литералам $U_1, U_2, \ldots, U_n$ и сукцедент секвенции S непосредственно выводим из литералов $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Из лемм 4.3 и 4.4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.3. *Секвенция S из $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда выводима в исчислении предикатов, когда противоречиво объединение списков Ξ_S и Π_S.*

Теорема 5. *Выводимость секвенции S из класса $\mathfrak{A}$ в исчислении предикатов можно распознать за время, не превосходящее*

$$l^{cp\delta},$$

где l — длина записи секвенции S, p — максимальная размерность предикатов, входящих в S, δ — максимальная длина преград в S, c — константа.

Доказательство. Проблема выводимости секвенции S из класса $\mathfrak{A}$ в исчислении предикатов полиномиально сводится по леммам 4.1, 4.2 и 6.3 к проблеме распознавания противоречивости хорновских δ-КНФ. По лемме 6.1 число переменных в этих δ-КНФ не превосходит

$$l^2(l+p)^p.$$

Заметим, что противоречивость хорновских КНФ можно распознать за полиномиальное время от длины записи.

Таким образом, класс $\mathfrak{A}$ разбивается на полиномиально разрешимые подклассы, если одновременно зафиксировать как максимальную размерность предикатов, так и максимальную длину преград.

Замечание 6.2. Если одновременно зафиксировать как максимальную размерность предикатов, так и максимальную длину преград, класс $(\forall\exists)$ по выводимости в исчислении предикатов будет разбит на подклассы, принадлежащие co-NP.

Литература

1. P. Bernays, M. Schönfinkel, *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.* — Math. Annalen, **99** (1928), 342–372.
2. E. Börger, E. Grädel, Yu. Gurevich, The Classical Decision Problem. Springer, 1997.
3. S. C. Kleene, *Permutability of inferences in Gentzen's calculi* **LK** *and* **LJ**. — Memoirs of the American Mathematical Society, **10** (1952), 1–26.

4. H. Lewis, *Complexity results for classes of quantificational formulas.* J. of Comp. and Syst. Sci., **21** (1980), 317–353.
5. G. Mints, A Short Introduction to Intuitionistic Logic. Kluwer Academic Publishers, 2000.
6. G. Mints, V. P. Orevkov, T. Tammet, *Transfer of sequent calculus strategies to resolution for S4.* — In: Proof Theory of Modal Logic, Kluwer Academic Publishers, 1996, pp. 17–31.
7. V. P. Orevkov, Complexity of proofs and their transformations in axiomatic theories. — Amer. Math. Soc., 1993.
8. Г. В. Давыдов, *О корректировании недоказуемых формул.* — Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **4** (1967), 18–29 [English translation in: *Seminars in Mathematics Steklov Math. Inst.*, Leningrad, **4** (1969)].
9. А. Г. Драгалин, Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., Наука, 1979.
10. В. П. Оревков, *О гливенковских классах секвенций.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР, **98** (1968), 131–154 [English translation in: *Proc. Steklov Inst. Math.*, **98** (1971), pp. 147–176].
11. В. П. Оревков, *Одна специализация формы вывода в генценовских исчислениях и ее приложения.* — Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **32**, (1972), 98–104 [English translation in: *Journal of Soviet Mathematics*, **6** (1976) no. 4].

Orevkov V. P. A new decidable Horn fragment of the predicate calculus.

We describe an extension of the class $\forall\exists$ of Horn formulas in the predicate calculus. We prove the decidability of this class. We describe complexity characteristics such that fixing them splits this extended class into polynomially decidable subclasses. If one fixes the maximum arity of predicates, our class splits into subclasses belonging to NP.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 декабря 2004 г.