Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

Н. М. Боголюбов

СПИНОРНЫЙ БОЗЕ КОНДЕНСАТ И su(1,1) МОДЕЛЬ РИЧАРДСОНА

1. Спинорный бозе конденсат

Устойчивый интерес к теории спинорного бозе конденсата связан с возможностью генерации квантового запутывания в системах с внутренними степенями свободы [1–3]. Эти состояния имеют важную роль в различных процессах передачи и обработки квантовой информации. Свойства основного состояния многокомпонентного конденсата очень важны и для понимания природы квантовых газов в ловушках, в частности для определения условий возникновения динамической фрагментации конденсата [4].

Мы рассмотрим разреженный газ бозонных атомов спина $F=1$ и массы M во внешнем удерживающем потенциале и взаимодействующий с классическим лазерным полем. Данный конденсат описывается трехкомпонентным векторным полем $\psi_\alpha(\vec{x})$ ($\alpha = -1,0,1$), которое ассоциируется с атомами в спиновых состояниях $|F=1, m_F=\alpha\rangle$. Операторы $\psi_\alpha(\vec{x})$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\psi_\alpha(\vec{x}), \psi^\dagger_\beta(\vec{y})] = \delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x}-\vec{y})$. Предполагается, что удерживающий потенциал $V_{ext}(\vec{x})$ одинаков для всех трех спиновых компонент. Наиболее общий вид гамильтониана, который описывает динамику такого газа, может быть записан в следующей форме [3, 5]:

$$\widehat{H} = \sum_\alpha \int d^3x \psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{x}) + \Omega(\delta_{1,\alpha} + \delta_{-1,\alpha})\right)\psi_\alpha(\vec{x}) \tag{1}$$

$$+ \int d^3x_1 d^3x_2 : \Big\{U_d(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\widehat{N}(\vec{x}_1)\widehat{N}(\vec{x}_2) + U_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\mathbf{S}(\vec{x}_1)\cdot\mathbf{S}(\vec{x}_2)\Big\} : .$$

Данная работа частично поддержана РФФИ (код проекта No. 04-01-00825) и программой РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

Здесь, знак :: означает нормальное упорядочивание, а постоянные Ω_α характеризуют взаимодействие внешнего классического лазерного поля с конденсатом. Спин-спиновое взаимодействие с парным обменным потенциалом $U_s(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U_s(| \vec{x}_1 - \vec{x}_2 |)$ имеет вид $\mathbf{S}(\vec{x}_1) \cdot \mathbf{S}(\vec{x}_2) = \sum_m S^m(\vec{x}_1) S^m(\vec{x}_2)$, $(m = x, y, z)$, где операторы $S^m(\vec{x})$ представляют собой псевдобозонное представление m-ой компоненты спина

$$S^m(\vec{x}) = \sum_{\alpha,\beta} \psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) S^m_{\alpha\beta} \psi_\beta(\vec{x}). \tag{2}$$

В этом представлении $S^m_{\alpha\beta}$ есть матричный элемент m-ой компоненты оператора спина-1

$$\begin{aligned} S^x_{\alpha\beta} &= (\delta_{\alpha,\beta-1} + \delta_{\alpha,\beta+1})/\sqrt{2}, \\ S^y_{\alpha\beta} &= i(\delta_{\alpha,\beta-1} - \delta_{\alpha,\beta+1})/\sqrt{2}, \\ S^z_{\alpha\beta} &= \alpha \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3}$$

Матрицы S^x, S^y, S^z удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям $[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk} S^k$, а операторы $S^m(\vec{x})$ (2) соответственно:

$$\begin{aligned} S^+(\vec{x}) = S^x(\vec{x}) + iS^y(\vec{x});\ S^-(\vec{x}) &= S^x(\vec{x}) - iS^y(\vec{x}), \\ [S^+(\vec{x}), S^-(\vec{x}')] &= 2S^z(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [S^z(\vec{x}), S^\pm(\vec{x}')] &= \pm S^\pm(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \tag{4}$$

Член, описывающий взаимодействие типа плотность-плотность в гамильтониане (1) с потенциальной энергией пары $U_d(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U_d(| \vec{x}_1 - \vec{x}_2 |)$, равен $\widehat{N}(\vec{x}_1)\widehat{N}(\vec{x}_2)$, где оператор плотности $\widehat{N}(\vec{x})$ записан в форме псевдобозонного представления единичной матрицы

$$\widehat{N}(\vec{x}) = \sum_{\alpha,\beta} \psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) \delta_{\alpha\beta} \psi_\beta(\vec{x}). \tag{5}$$

Из этого представления следует, что оператор плотности коммутирует со спиновыми операторами (4)

$$[\widehat{N}(\vec{x}), S^z(\vec{x}')] = [\widehat{N}(\vec{x}), S^\pm(\vec{x}')] = 0. \tag{6}$$

Легко проверить, что оператор числа частиц

$$\widehat{N} = \int \widehat{N}(\vec{x}) d^3x, \tag{7}$$

является интегралом движения

$$[\widehat{N}, \widehat{H}] = 0. \tag{8}$$

Операторы полного спина

$$\widehat{S}^m = \int S^m(\vec{x}) d^3x, \ m = z, \pm, \tag{9}$$

удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям su(2) алгебры

$$[\widehat{S}^+, \widehat{S}^-] = 2\widehat{S}^z, \ [\widehat{S}^z, \widehat{S}^\pm] = \pm\widehat{S}^\pm \tag{10}$$

и коммутируют с оператором числа частиц (7). Оператор Казимира

$$\mathbf{S}^2 = (\widehat{S}^z)^2 + \frac{1}{2}(\widehat{S}^+\widehat{S}^- + \widehat{S}^-\widehat{S}^+) \tag{11}$$

коммутирует со всеми операторами полного спина $\widehat{S}^m$ (9) и с гамильтонианом (1).

При очень низких температурах взаимодействие между атомами эффективно описывается δ-образным потенциалом. Полагая $U_d(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\lambda_d}{2}\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ и $U_s(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\lambda_d}{2}\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ в (1), где λ_d, λ_s являются постоянными взаимодействия, получим гамильтониан

$$\begin{aligned} \widehat{H} = & \sum_\alpha \int d^3x \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{x}) + \Omega(\delta_{1,\alpha} + \delta_{-1,\alpha}) \right) \psi_\alpha(\vec{x}) \\ & + \int d^3x : \left\{ \frac{\lambda_d}{2}\widehat{N}^2(\vec{x}) + \frac{\lambda_s}{2}\mathbf{S}^2(\vec{x}) \right\} :, \end{aligned} \tag{12}$$

или в явном виде

$$\begin{aligned} \widehat{H} = & \sum_\alpha \int d^3x \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{x}) + \Omega(\delta_{1,\alpha} + \delta_{-1,\alpha}) \right) \psi_\alpha(\vec{x}) \\ & + \frac{\lambda_d}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int d^3x \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger \psi_\alpha \psi_\beta \\ & + \frac{\lambda_s}{2} \int d^3x \{ \psi_1^\dagger\psi_1^\dagger\psi_1\psi_1 + \psi_{-1}^\dagger\psi_{-1}^\dagger\psi_{-1}\psi_{-1} - 2\psi_1^\dagger\psi_{-1}^\dagger\psi_1\psi_{-1} \\ & + 2\psi_1^\dagger\psi_0^\dagger\psi_1\psi_0 + 2\psi_1^\dagger\psi_{-1}^\dagger\psi_0\psi_0 + 2\psi_0^\dagger\psi_0^\dagger\psi_1\psi_{-1} + 2\psi_0^\dagger\psi_{-1}^\dagger\psi_0\psi_{-1} \}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ферромагнитное взаимодействие соответствует отрицательным значениям постоянной взаимодействия λ_s ($\lambda_s < 0$), а положительным значениям λ_s ($\lambda_s > 0$) соответствует антиферромагнитное взаимодействие.

Обычно предполагается, что если $|\lambda_d| \gg |\lambda_s|$, то часть гамильтониана описывающая взаимодействие плотность-плотность является доминирующей по сравнению со спиновой частью. Этот гамильтониан является гамильтонианом квантовой многокомпонентной модели Шредингера

$$\begin{aligned}\widehat{H}_s = \sum_{\alpha} \int d^3x \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{x}) \right) \psi_\alpha(\vec{x}) \\ + \frac{\lambda_d}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int d^3x \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \psi_\beta^\dagger(\vec{x}) \psi_\alpha(\vec{x}) \psi_\beta(\vec{x}).\end{aligned} \tag{14}$$

В этом приближении спиновая часть взаимодействия рассматривается как возмущение. Заметим, что в одномерном случае модель описываемая гамильтонианом (14) при $V_{ext}(\vec{x}) = 0$ допускает точное решение [6].

Предположение о том, что при очень низких температурах спинорная компонента конденсата пространственно независима, приводит к следующей факторизации полевых операторов [5]:

$$\begin{aligned}&\psi_\alpha(\vec{x}) \sim a_\alpha \phi(\vec{x}), \\ &\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \sim a_\alpha^\dagger \phi^\dagger(\vec{x})\,;\ \alpha = \pm 1, 0\end{aligned} \tag{15}$$

где a_α, $a_\alpha^\dagger$ операторы уничтожения и рождения удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям $[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$. Представление (15), обычно называют одномодовым приближением [5]. Следуя традиционному подходу к теории бозе конденсации, полевой оператор $\phi(\vec{x})$ можно заменить на волновую функцию конденсата $\Phi(\vec{x})$, полагая что надконденсатная часть оператора мала. Волновая функция $\Phi(\vec{x})$ нормирована $\int |\Phi(\vec{x})|^2 d^3x = 1$ и определяется из условия экстремума

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{x})} \langle N | \widehat{H}_s r - \mu \widehat{N} | N \rangle = 0 \tag{16}$$

в секторе с фиксированным числом частиц. Здесь $|N\rangle \equiv |N_1, N_0, N_{-1}\rangle$ Фоковский вектор с числами заполнения N_α: $a_\alpha^\dagger a_\alpha |N\rangle =$

$N_\alpha|N\rangle$, а μ – химический потенциал. Условие экстремума (16) приводит к уравнению Гросса–Питаевского

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{x})\right)\phi(\vec{x}) + \lambda_d N|\phi(\vec{x})|^2\phi(\vec{x}) = \mu\phi(\vec{x}). \tag{17}$$

На решениях этого уравнения гамильтониан (13) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \mu_1(a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1}) + \mu_0 a_0^\dagger a_0 - \frac{g_d}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\alpha a_\beta \\ &+ \frac{g_s}{2}\{a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1}^\dagger a_{-1} a_{-1} - 2a_1^\dagger a_{-1}^\dagger a_1 a_{-1} \\ &+ 2a_1^\dagger a_0^\dagger a_1 a_0 + 2a_1^\dagger a_{-1}^\dagger a_0 a_0 + 2a_0^\dagger a_0^\dagger a_1 a_{-1} + 2a_0^\dagger a_{-1}^\dagger a_0 a_{-1}\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь g_d, g_s перенормированные постоянные взаимодействия $g_i = \lambda_i \int |\Phi(\vec{x})|^4 d^3x$, $(i = d, s)$, $\mu_0 \equiv \mu$, а $\mu_1 = \Omega + \mu$, причем мы положили $\mu_1 = \mu_{-1}$ из-за инвариантности взаимодействия относительно замены $a_1 \leftrightarrow a_{-1}, a_1^\dagger \leftrightarrow a_{-1}^\dagger$.

В рассматриваемом приближении операторы полного спина (9) имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{S}^+ &= \sqrt{2}\left(a_1^\dagger a_0 + a_0^\dagger a_{-1}\right), \widehat{S}^- = (\widehat{S}^+)^\dagger, \\ \widehat{S}^z &= \left(a_1^\dagger a_1 - a_{-1}^\dagger a_{-1}\right),\end{aligned} \tag{19}$$

а оператор числа частиц (7) примет вид

$$\widehat{N} = a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1} + a_0^\dagger a_0. \tag{20}$$

Гамильтониан (18) теперь можно записать в компактной форме [5]:

$$\widehat{H} = \mu_1(a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1}) + \mu_0 a_0^\dagger a_0 - \frac{g_d}{2}\widehat{N}(\widehat{N}-1) + \frac{g_s}{2}\left\{\mathbf{S}^2 - 2\widehat{N}\right\}, \tag{21}$$

где $\mathbf{S}^2$ это оператор Казимира (11). Этот гамильтониан коммутирует с оператором числа частиц (20). Для случая, когда химические потенциалы равны $\mu_\alpha = \mu$, модель (21) была решена в [5], где исследовалась спиновая динамика модели. Так как оператор числа частиц $\widehat{N}$ коммутирует с полным гамильтонианом (21), то в дальнейшем мы будем исследовать лишь спиновую часть гамильтониана

$$\widehat{H}_{\rm sp} = \mu_1(a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1}) + \mu_0 a_0^\dagger a_0 + \frac{g_s}{2}\left\{\mathbf{S}^2 - 2\widehat{N}\right\}. \tag{22}$$

Спектр гамильтониана $\widehat{H}$ (21) в N-частичном секторе тривиально восстанавливается.

2. Спинорный гамильтониан и su(1, 1) алгебра

Для того чтобы решить модель, описываемую гамильтонианом (18) при произвольных значениях химических потенциалов μ_0, μ_1, представим его через генераторы $\mathrm{su}(1,1)$ алгебры. Генераторы алгебры удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[\mathcal{K}^0, \mathcal{K}^\pm] = \pm\mathcal{K}^\pm, \quad [\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-] = -2\mathcal{K}^0. \tag{23}$$

Оператор Казимира алгебры $\mathrm{su}(1,1)$ равен

$$\mathcal{K}^2 = (\mathcal{K}^0)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}^+\mathcal{K}^- + \mathcal{K}^-\mathcal{K}^-\right). \tag{24}$$

Генераторы алгебры можно выразить через бозонные операторы рождения и уничтожения. Двухбозонное представление этой алгебры имеет вид

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1} + 1), \\ K^+ &= a_1^\dagger a_{-1}^\dagger, \qquad K^- = a_1 a_{-1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Оператор Казимира этой реализации равен

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_K^2 &= \frac{1}{4}(\Delta^2 - 1), \\ \Delta &= a_1^\dagger a_1 - a_{-1}^\dagger a_{-1}, \end{aligned} \tag{26}$$

где оператор Δ, по определению, есть оператор третьей компоненты оператора момента импульса $\widehat{S}^z$ (19).

Однобозонное представление алгебры $\mathrm{su}(1,1)$ может быть реализовано в виде

$$\begin{aligned} B^0 &= \frac{1}{2}a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{4}, \\ B^+ &= -\frac{1}{2}(a_0^\dagger)^2, \quad B^- = -\frac{1}{2}(a_0)^2 \end{aligned} \tag{27}$$

с оператором Казимира равным

$$\mathcal{K}_B^2 = -3/16. \tag{28}$$

Оператор числа частиц (20) представим в виде

$$\widehat{N} = 2(B^0 + K^0) - \frac{3}{2}. \tag{29}$$

Базис унитарного неприводимого представления алгебры su(1,1) образован собственными векторами $|n;\nu\rangle$ оператора $\mathcal{K}^0$ и оператора Казимира $\mathcal{K}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^0|n;\nu\rangle &= (n+\nu)|n;\nu\rangle, \\ \mathcal{K}^2|n;\nu\rangle &= \nu(\nu-1)|n;\nu\rangle, \end{aligned} \tag{30}$$

где число ν является индексом Баргманна. Операторы $\mathcal{K}^{\pm}$ действуют как повышающий и, соответственно, как понижающий операторы на собственных векторах оператора $\mathcal{K}^0$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^+|n;\nu\rangle &= \sqrt{(n+1)(n+2\nu)}|n+1;\nu\rangle, \\ \mathcal{K}^-|n;\nu\rangle &= \sqrt{n(n+2\nu-1)}|n-1;\nu\rangle. \end{aligned} \tag{31}$$

Состояния $|n;\nu\rangle$ получаются из "вакуумного" (старшего) вектора $|0;\nu\rangle$, определяемого из условия

$$\mathcal{K}^-|0;\nu\rangle = 0 \tag{32}$$

повторным действием оператора $\mathcal{K}^+$:

$$|n;\nu\rangle = \left(\frac{\Gamma(2\nu)}{n!\Gamma(2\nu+n)}\right)^{\frac{1}{2}} (\mathcal{K}^+)^n|0;\nu\rangle.$$

Двухбозонное представление (25) соответствует индексу Баргманна равному $\nu = \frac{1}{2}(k+1)$, где число k имеет смысл фиксированной разности числа частиц в модах с противоположным значением спина: $\Delta|0;\nu\rangle = k|0;\nu\rangle$. Вакуумное состояние (32) представляет собой прямое произведение двух Фоковских векторов

$$|0;\nu\rangle = |0\rangle|k\rangle \equiv |\,0,k\rangle. \tag{33}$$

Однобозонная реализация (27) соответствует двум различным индексам Баргманна $\nu = \frac{1}{4}$ и $\nu = \frac{3}{4}$. Это означает, что данное представления разлагается в прямую сумму двух неприводимых компонент. Одно из них образовано состояниями с четным числом частиц, а другое с нечетным числом соответственно. Вакуумным вектором (32) пространства с индексом $\nu = \frac{1}{4}$ является Фоковский вакуум

$$|0;\frac{1}{4}\rangle \equiv |0\rangle, \tag{34}$$

а пространства с индексом $\nu = \frac{3}{4}$ одночастичное состояние

$$|0; \frac{3}{4}\rangle \equiv |1\rangle. \tag{35}$$

Для того чтобы отличать эти производящие состояния от состояний (33), обозначим их через $|0, \nu)$.

Теперь мы можем представить гамильтониан (18) через генераторы $\mathrm{su}(1,1)$ алгебры воспользовавшись, представлениями (25) и (27):

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\mathrm{sp}} &= \mu_0\Big(2B^0 - \frac{1}{2}\Big) + \mu_1(2K^0 - 1) \\ &+ \frac{g_s}{2}\Big\{\Delta^2 - 4\Big(K^0 + B^0 - \frac{1}{2}\Big) + 8B^0K^0 - 4B^+K^- - 4B^-K^+\Big\}. \end{aligned} \tag{36}$$

Отметим, что данный гамильтониан представляет собой вариант бозонного гамильтониана, рассмотренного Ричардсоном [7]. Гамильтонианы подобной формы возникают, как в квантовой оптике [8–10], так и в теории сверхпроводимости [11]. Рассматривались обобщения и на случай супералгебр [12].

3. Решение модели

Для того чтобы применить Алгебраический анзац Бете [13] к спинорной модели (36), необходимо ввести операторы, которые будут играть основную роль в данном подходе:

$$\begin{aligned} X^0(\lambda) &= \frac{B^0}{\delta - \lambda} + \frac{K^0}{\gamma - \lambda} + 1, \\ X^{\pm}(\lambda) &= \frac{B^{\pm}}{\delta - \lambda} + \frac{K^{\pm}}{\gamma - \lambda}. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь, λ это комплекснозначная переменная, а δ и γ – некоторые постоянные которые мы определим позднее. Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [X^+(\lambda), X^-(\mu)] &= -\frac{2}{\lambda - \mu}(X^0(\lambda) - X^0(\mu)), \\ [X^0(\lambda), X^{\pm}(\mu)] &= \pm\frac{1}{\lambda - \mu}(X^{\pm}(\lambda) - X^{\pm}(\mu)), \\ [X^+(\lambda), X^+(\mu)] &= [X^-(\lambda), X^-(\mu)] = [X^0(\lambda), X^0(\mu)] = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Эти равенства легко проверить воспользовавшись коммутационными соотношениями операторов (25), (27) и равенством

$$\frac{1}{(\epsilon-\lambda)(\epsilon-\mu)} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{\epsilon-\lambda} - \frac{1}{\epsilon-\mu}\right). \tag{39}$$

По аналогии с оператором Казимира (24) введем семейство операторов, зависящих от произвольного комплексного параметра λ:

$$t(\lambda) = (X^0(\lambda))^2 - \frac{1}{2}X^+(\lambda)X^-(\lambda) - \frac{1}{2}X^-(\lambda)X^+(\lambda). \tag{40}$$

Замечательным свойством этих операторов является то, что они коммутируют при произвольном значении параметров λ, μ:

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0. \tag{41}$$

Это равенство проверяется прямым вычислением с помощью коммутационных соотношений (38).

Оператор $t(\lambda)$ можно рассматривать как производящий функционал интегралов движения. В явном виде

$$\begin{aligned} t(\lambda) = 1 &+ \left(\frac{B^0}{\delta-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{K^0}{\gamma-\lambda}\right)^2 \\ &- \frac{B^+B^- + B^-B^+}{2(\delta-\lambda)^2} - \frac{K^+K^- + K^+K^-}{2(\gamma-\lambda)^2} \\ &+ \frac{2K^0}{\gamma-\lambda} + \frac{2B^0}{\delta-\lambda} + \frac{2B^0}{(\delta-\lambda)}\frac{K^0}{(\gamma-\lambda)} \\ &- \frac{B^+}{(\delta-\lambda)}\frac{K^-}{(\gamma-\lambda)} - \frac{B^-}{(\delta-\lambda)}\frac{K^+}{(\gamma-\lambda)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Коэффициент при $1/\lambda^2$ в разложении $t(\lambda)$ по обратным степеням $1/\lambda$ равен

$$\begin{aligned} &\left[(B^0)^2 - \frac{1}{2}(B^+B^- + B^-B^+)\right] + \left[(K^0)^2 - \frac{1}{2}(K^+K^- + K^-K^+)\right] \\ &- 2\delta B^0 - 2\gamma K^0 + (2B^0K^0 - B^+K^- - B^-K^+). \end{aligned}$$

Первых два слагаемых в этом выражении являются операторами Казимира представлений (25) и (27) соответственно. Выбирая

$\gamma = -\mu_1/2g_s$ и $\delta = -\mu_0/2g_s$, получим

$$g_s \frac{\partial^2}{\partial\lambda^{-2}} t(\lambda) \mid_{\lambda=\infty} = \frac{3}{8} g_s + \frac{g_s}{2}(\Delta^2 - 1) + 2\mu_0 B^0 + 2\mu_1 K^0 + 2g_s(2B^0K^0 - B^+K^- - B^-K^+). \tag{43}$$

Коэффициент при $1/\lambda$ в (42) равен $-2(K^0 + B^0)$ и, следовательно, оператор числа частиц представим в виде

$$\widehat{N} = -\frac{\partial}{\partial\lambda^{-1}} t(\lambda) \mid_{\lambda=\infty} -\frac{3}{2}.$$

Теперь мы можем выразить гамильтониан (36) через производящую функцию интегралов движения $t(\lambda)$ (40):

$$\widehat{H}_{\mathrm{sp}} = g_s \frac{\partial^2}{\partial\lambda^{-2}} t(\lambda) \mid_{\lambda=\infty} - g_s \widehat{N} - \frac{\mu_0}{2} - \mu_1 + \frac{3g_s}{8}. \tag{44}$$

Из (41) следует, что гамильтониан $\widehat{H}_{\mathrm{sp}}$ коммутирует с производящим функционалом $t(\lambda)$:

$$[\widehat{H}_{\mathrm{sp}}, t(\lambda)] = 0 \tag{45}$$

и, следовательно, они обладают общим набором собственных векторов. Определив собственные вектора и собственные значения производящей функции $t(\lambda)$, мы решим проблему диагонализации гамильтониана (36), собственные значения (36) вычисляются по формуле (44).

Для построения алгебраической схемы диагонализации производящей функции $t(\lambda)$ (40) заметим, что из определения операторов $X^-(\lambda)$, $X^0(\lambda)$ (37) следует, что состояние, представляющее собой произведение производящих векторов (34)–(35)

$$|\Omega\rangle = |0, \nu)|0, k\rangle, \tag{46}$$

и которое мы будем называть вакуумом, удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} X^-(\lambda)|\Omega\rangle &= 0, \\ X^0(\lambda)|\Omega\rangle &= x(\lambda)|\Omega\rangle, \end{aligned} \tag{47}$$

где вакуумное собственное значение оператора $X^0(\lambda)$ равно:

$$x(\lambda) = 1 + \frac{\nu}{\delta - \lambda} + \frac{1}{2}\frac{k+1}{\gamma - \lambda}. \tag{48}$$

Не сложно проверить, что вакуумное состояние (46) является собственным вектором $t(\lambda)$

$$t(\lambda)|\Omega\rangle = k(\lambda)|\Omega\rangle, \tag{49}$$

с собственным значением

$$k(\lambda) = \left(1 + \frac{\nu}{\delta - \lambda} + \frac{1}{2}\frac{k+1}{\gamma - \lambda}\right)^2 - \frac{\nu}{(\delta - \lambda)^2} - \frac{1}{2}\frac{k+1}{(\gamma - \lambda)^2}. \tag{50}$$

Вакуумное состояние является собственным вектором оператора числа частиц (29):

$$\widehat{N}|\Omega\rangle = \left(2\nu + k - \frac{1}{2}\right)|\Omega\rangle. \tag{51}$$

Из определения оператора $X^+(\lambda)$ (37) имеем

$$\widehat{N}X^+(\lambda) = X^+(\lambda)\left(\widehat{N} + 2\right), \tag{52}$$

Из этого равенства и по построению (37) следует, что $X^+(\lambda)$ действует как оператор рождения пары квазичастиц.

Можно доказать [14], что Бетевский вектор

$$|\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N} X^+(\lambda_j)|\Omega\rangle, \tag{53}$$

является собственным вектором производящей функции $t(\lambda)$

$$t(\lambda)|\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)\rangle = \Theta_N(\lambda)|\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)\rangle \tag{54}$$

если параметры λ_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$1 + \frac{\nu}{\delta - \lambda_j} + \frac{1}{2}\frac{k+1}{\gamma - \lambda_j} = \sum_{l \neq j}^{N} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_l}, \tag{55}$$

а $\gamma = -\mu_1/2g_s$ и $\delta = -\mu_0/2g_s$. Из равенства (52) и определения (37) следует, что число N в равенстве (53) имеет смысл числа пар квазичастиц, число частиц в состоянии (53) равно соответственно $2N+2\nu+k-\frac{1}{2}$. Собственное значение $\Theta_N(\lambda)$ производящей функции $t(\lambda)$ (54) равно

$$\Theta_N(\lambda) = k(\lambda) - \sum_{j=1}^{N} \frac{2\nu}{(\delta - \lambda)(\delta - \lambda_j)} - \sum_{j=1}^{N} \frac{k+1}{(\gamma - \lambda)(\gamma - \lambda_j)},$$

где $k(\lambda)$ определено равенством (50).

Воспользовавшись определением (44), получим, что собственная энергия гамильтониана H_{sp} (36) равна

$$E_N = -4g_s \sum_{j=1}^{N} \lambda_j + C_N, \tag{56}$$

где

$$C_N = \frac{g_s}{2}\left\{k^2 + 4\nu k - 2k - 4N + 4N\,(N + 2\nu + k)\right\} + \mu_0\Big(2\nu - \frac{1}{2}\Big) + \mu_1 k.$$

Из равенства (56) следует, что энергия пар квазичастиц выражается через решения уравнения Бете λ_j.

В частном случае $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, то есть, в случае отсутствия лазерного поля ($\Omega = 0$), можно найти простое выражение для собственной энергии E_N. Умножая уравнения Бете (55) на $\delta - \lambda_j$ и затем суммируя по j, получим равенство

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = \frac{1}{2} N(N + 2\nu + k) - \frac{\mu}{2g_s} N,$$

где мы воспользовались тождеством

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{l \neq j}^{N} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_l} = \frac{1}{2} N(N-1).$$

В результате для собственной энергии N пар получим

$$E_N = \frac{g_s}{2}\left\{k^2 + 4\nu k - 2k - 4N\right\} + \mu\Big(2N + 2\nu + k - \frac{1}{2}\Big). \tag{57}$$

При $\nu = 1/4$ (представление образованное состояниями с четным числом частиц в моде с нулевой третьей компонентой спина) имеем [5]:

$$E_N = \frac{g_s}{2}\left\{k(k-1) - 4N\right\} + \mu\Big(2N + 2\nu + k - \frac{1}{2}\Big). \tag{58}$$

При $\nu = 3/4$ (представление образованное состояниями с нечетным числом частиц в моде с нулевой третьей компонентой спина) имеем соответственно:

$$E_N = \frac{g_s}{2}\left\{k(k+1) - 4N\right\} + \mu\Big(2N + 2\nu + k - \frac{1}{2}\Big). \tag{59}$$

Для ферромагнитного состояния $g_s < 0$ минимум энергии E_N достигается при $k = 0$ в (58) и (59). Для антиферромагнитного состояния $g_s > 0$ минимуму энергии E_N (58) соответствует значение $k = 2N + 1$, а минимуму энергии E_N (59) соответствует значение $k = 2N$.

Для того чтобы исследовать решения уравнений Бете (55), рассмотрим полином определяемый решениями этих уравнений

$$P(\lambda) = C\prod_{j=1}^{N}(\lambda_j - \lambda), \qquad (60)$$

где $C^{-1} = \prod_{j=1}^{N}\lambda_j$. Этот полином является решением дифференциальному уравнению второго порядка [14, 9]:

$$P''(\lambda) - 2x(\lambda)P'(\lambda) + 2\sum_{j=1}^{N}\frac{x(\lambda) - x(\lambda_j)}{\lambda - \lambda_j}P(\lambda) = 0, \qquad (61)$$

где $x(\lambda)$ есть вакуумное собственное значение оператора $X^0(\lambda)$. Подстановка явного вида этого значения (48) в уравнение (61) дает

$$2(\lambda - \delta)P''(\lambda) + (1 + 2\nu + k + 2\delta - 2\lambda)P'(\lambda) + NP(\lambda) = 0. \qquad (62)$$

Решения этого уравнения выражаются через полиномы Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$: $P(\lambda) = L_N^{2\nu+k}(2\lambda + \frac{\mu}{g_s})$. Для больших значений N полиномы Лагерра имеют асимптотику [15]:

$$L_N^{2\nu+k}(x) \sim \pi^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{2\nu+k}{2}-\frac{1}{4}}N^{\frac{2\nu+k}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left\{2\sqrt{Nx} - \frac{\pi}{2}(2\nu + k + \frac{1}{2})\right\}.$$

Из этого выражения следует, что решения уравнений Бете при больших значениях N ведут себя следующим образом

$$\lambda_m = \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{32}\left\{2\nu + k - \frac{1}{2} + 2m\right\}^2 - \frac{\mu}{2g_s},\ m = 1, 2, \dots, N.$$

В случае $\Omega \neq 0$ исследование уравнений Бете (55) существенно усложняется, однако, в пределе $N \to \infty$ их можно привести к сингулярному интегральному уравнению допускающему точное решение. Зная собственные вектора и спектр модели, можно исследовать спиновую динамику системы и квантовое запутывание состояний. Рассмотренный в данной статье подход применим также к исследованию спинорного конденсата во внешнем магнитном поле [16].

Литература

1. L.-M. Duan, J. I. Cirac, P. Zoller, *Quantum entanglement in spinor Bose–Einstein condensates.* — Phys. Rev. A **65** (2002), 033619.
2. M. Zhang, K. Helmerson, L. You, *Entanglement and spin squeezing of Bose–Einstein-condensed atoms.* — Phys. Rev. **68** (2003), 043622.
3. XuBo Zou, K. Pahlke, W. Mathis, *Quantum entanglement of many atoms in spinor Bose–Einstein condensates.* — Phys. Rev. A **69** (2004), 053608.
4. O. E.Mustecaplioglu, M. Zhang, S. Yi, L. You, C. P.Sun, *Dynamic fragmentation of a spinor Bose–Einstein condensate.* — Phys. Rev. A **68** (2003), 63616.
5. C. K. Law, H. Pu and N. P. Bigelow, *Quantum spin mixing in spinor Bose–Einstein condensates.* — Phys. Rev. Lett. **24** (1998), 5257–5261.
6. П. П. Кулиш,, *Многокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера с градуировкой.* — ДАН СССР **255** (1980), 323–326.
7. R. W. Richardson, *Exactly solvable many-boson model.* — J. Math. Phys. **9** (1968), 1327–1344.
8. Н. М. Боголюбов, *Точное решение модели трех связанных осцилляторов с штарковской нелинейностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 122–128.
9. Н. М. Боголюбов, *Алгебраический анзац Бете и модель Тейвиса–Каммингса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **245** (1997), 66–79.
10. A. Rybin, G. Kastelewicz, J. Timonen, N. Bogoliubov, *The* su(1,1) *Tavis–Cummings model.* — Journ. Phys. A **31** (1998), 4705–4723.
11. L. Amico, A. Di Lorenzo, A. Osterloh, *Integrable models for confined fermions: applications to metallic grains.* — Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 5759.
12. P. P. Kulish, N. Manojlovic, *Creation operators and Bethe vectors of the osp(1—2) Gaudin model.* — J. Math. Phys. **42** (2001), 4757–4778.
13. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Изд-во "Наука", Москва (1992).
14. М. Годен, *Волновая функция Бете.* Изд-во "Мир", Москва (1987).
15. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены.* Изд-во "Наука", Москва (1976).
16. M. Zhang, S. Yi, L. You, *Mean field ground state of a spin-1 condensate in a magnetic field.* — arxiv: cond-mat/0306076 (2003).

Bogoliubov N. M. Spinor Bose condensate and su(1,1) Richardson model.

A dilute gas of trapped bosonic atoms with hyperfine spin $F = 1$ interacting with the classical laser field is considered. In the single mode approximation the Hamiltonian of the model may be expressed in terms of the boson realization of the su(1,1) algebra. The model is solved by the Algebraic Bethe Ansatz approach.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 июня 2004 г.