Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ПОЛИНОМАМИ МЕЙКСНЕРА И МЕЙКСНЕРА—ПОЛАЧЕКА

**Авторы посвящают эту работу
нашему другу и коллеге
П. П. Кулишу в связи с его 60-летием**

1. Введение

В последнее время усилился интерес к построению и исследованию когерентных состояний для осцилляторо-подобных систем связанных с семействами ортогональных многочленов (см., например, [1–22]; обширная библиография имеется в обзорах [23–24]).

В работах авторов [25–35] был предложен новый метод построения осцилляторо-подобных систем (коротко, просто осцилляторов), связанных с семействами ортогональных многочленов подобно тому, как обычный бозонный осциллятор связан с полиномами Эрмита. Этот подход включает также схему построения обобщенных когерентных состояний для таких систем. В предыдущих работах были построены обобщенные когерентные состояния для осцилляторо-подобных систем, связанных с классическими ортогональными полиномами (Лаггера [29], Лежандра [27], Чебышева [28], Гегенбауера [30], а также с q-полиномами Эрмита [32–34].

Опишем вкратце узловые моменты нашего подхода. Во-первых, перенормировкой многочленов заданного ортогонального семейства рекуррентные соотношения для этих многочленов приводятся к симметричному виду [35] (с симметричной матрицей Якоби). Во-вторых, стандартным образом [35] вводятся операторы (обобщенной) координаты и (обобщенного) импульса, со-

Это исследование выполнено при поддержке РФФИ грантов No. 03-01-00837, 03-01-00593.

ответствующие им лестничные операторы рождения и уничтожения и *квадратичный* гамильтониан, спектр которого определяется по коэффициентам симметризованного рекурентного соотношения для рассматриваемых полиномов. Тем самым определяется осцилляторо-подобная система ("осциллятор") связанный с данными многочленами. Реализуя операторы рождения и уничтожения для построенного осциллятора в виде дифференциальных или разностных операторов (см. [26]), мы получаем дифференциальное или разностное уравнение на собственные векторы для соответствующего квадратичного гамильтониана, которые для известных систем ортогональных полиномов, как правило, эквивалентно стандартному дифференциальному или разностному уравнению второго порядка для этих многочленов. Это уравнение естественно рассматривать как аналог уравнения Шрёдингера для исследуемой осцилляторо-подобной системы.

Далее вводятся обобщенные когерентные состояния (типа Барута–Жирарделло [36]), как собственные состояния оператора уничтожения построенного осциллятора. Для доказательства их (сверх)полноты решается соответствующая классическая проблема моментов. Полученная в результате решения проблемы моментов мера участвует в разложении единицы для построенного семейства когерентных состояний. При рассмотрении классических многочленов (как непрерывной, так и дискретной переменной) возникающая классическая проблема моментов определена и ее решение не представляет серьезных затруднений. Однако при изучении систем деформированных полиномов возникает значительно более сложная ситуация неопределенной проблемы моментов (см. [55–56]). Для изучения таких задач авторы использовали результаты иследования этой проблемы, полученные ими совместно с П. П. Кулишем в [25]. Отметим, что полученные явные выражения для когерентных состояний обобщенных осцилляторов, ассоциированных с ортогональными полиномами позволяет для таких систем вычислять по этим когерентным состояниям значения физически интересных величин, таких как, например, параметр Манделя.

При наличии у построенной осцилляторо-подобной системы группы (алгебры) динамической симметрии можно стандартным образом [37] определять также и когерентные состояния типа Переломова (как действия унитарного оператора сдвига на фиксированный вектор пространства состояний). Следует напомнить, что хотя для стандартного бозонного осциллятора, связанного с группой Гейзенберга, когерентные состояния типа Барута–Жирарделло совпадают с когерентными состояниями типа Переломова и являются состояниями минимизирующими соотношение неопределенностей Гейзенберга, это уже не так в более сложных случаях.

Существенным для приложений является то обстоятельство, что предложенная конструкция построения осцилляторо-подобных систем и соответствующих им когерентных состояний позволяет по заданному энергетическому спектру подобрать подходящее семейство ортогональных многочленов (коэффициенты рекуррентного соотношения которых определяют спектр гамильтониана) диагонализирующее гамильтониан соответствующей системы и, тем самым, обойти трудную задачу факторизации гамильтониана.

Отметим далее, что наряду с классическими ортогональными многочленами и их деформированными аналогами в физических исследованиях последних лет возрастающее внимание уделяется дискретным многочленам, таким как, например, многочлены Хана [38–39], удовлетворяющие не дифференциальному, а разностному уравнению. После того как в работах [40–41] были введены их континуальные аналоги (аргумент расширен до непрерывного, соотношение ортогональности записано в виде интеграла, а индекс продолжен в комплексную область) была обнаружена связь [42–43] этих многочленов (а также многочленов Мейкснера и Мейкснера–Полачека [44–45]) с группой Гейзенберга. В связи с этим естественно исследовать осцилляторо-подобные системы, базирующиеся на этих многочленах. Попытка такого построения была предпринята в работе [10] (многочлены Мейкснера и Мейкснера–Полачека) и в [46] (многочлены Хана). Многочлены Поллачека привлекались также в более раннем исследовании [47] для описания волновых функции релятивистской модели линейного гармонического осциллятора в квазипотенциальном подходе (разные аспекты описания этой модели и ее вариантов см., например, в [48–51]).

Конструкция, предложенная в [10], также в существенном основана на этой модели и в этой работе построен разностный гамильтониан с линейно зависящим от n энергетическим спектром. При этом используются многочлены Мейкснера и Мейкснера–Полачека, построены когерентные состояния типа Барута–Жирарделло и показано, что алгеброй динамической симметрии модели является $sp(2,\mathbb{R})$, одним из генераторов которой является гамильтониан. Это позволяет определить для рассматриваемой модели когерентные состояния типа Переломова

Поскольку многочлены Мейкснера и Мейкснера–Полачека подчиняются трехчленному реккурентному соотношению, то к ним применима описанная выше схема построения осцилляторо-подобной системы. В настоящей работе мы построим эти системы и определим для этих систем обобщенные когерентные состояния (как типа Барута–Жирарделло, так и типа Переломова).

Мы покажем, в частности, что гамильтониан модели, полученный в [10], является некоторой линеаризацией квадратичного гамильтониана, естественно возникающего в рамках нашего подхода. Отметим, что в работе [10] указана связь модели осциллятора Мейкснера (при специфическом значении параметра $\varphi=\frac{\pi}{2}$) с релятивистской моделью линейного осциллятора [52]; однако, так как в [10] соответствующие вычисления не приводятся, эта связь не является очевидной и не понятна причина возникновения специфического значения параметра $\varphi=\frac{\pi}{2}$. В данной работе мы проанализируем эту связь и покажем, что только при значениях параметра $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$ гамильтониан осциллятора Мейкснера совпадает с гамильтонианом квазипотенциальной модели релятивистского осциллятора из [40].

2. Осциллятор Мейкснера

2.1. Полиномы Мейкснера. Напомним, что обобщенный гипергеометрический ряд ${}_rF_s$ по определению равен

$$ {}_rF_s\left(\left.{a_1,\dots,a_r \atop b_1,\dots,b_s}\right| z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k\cdots(a_r)_k}{(b_1)_k(b_2)_k\cdots(b_s)_k}\,\frac{z^k}{k!}\,, \tag{1}$$

где используются сдвинутые факториалы (символы Похгаммера), определяемые по

$$ (a)_0=1,\quad (a)_k=a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \tag{2}$$

Полиномы Мейкснера [44] определяются соотношением

$$M_n(\xi;\beta,\gamma) = {}_2F_1\left({-n,-\xi \atop \beta} \middle| 1-\frac{1}{\gamma} \right) = M_\xi(n;\beta,\gamma). \tag{3}$$

При $\beta > 0$ и $0 < \gamma < 1$, они образуют двупараметрическое семейство многочленов степени $n = 0, 1, 2, \dots$, подчиняющихся соотношению ортогональности

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho^M(m)\, M_n(m;\beta,\gamma)\, M_k(m;\beta,\gamma) = d_n\, \delta_{nk}, \tag{4}$$

относительно весовой функции

$$\rho^M(m)(\xi) = \frac{(\beta)_\xi\, \gamma^\xi}{\xi!}, \tag{5}$$

и рекуррентным соотношениям [44, 39]

$$\begin{aligned} &[n + (n+\beta)\gamma - (1-\gamma)\xi]\ M_n(\xi;\beta,\gamma) \\ &= (n+\beta)\gamma M_{n+1}(\xi;\beta,\gamma) + n M_{n-1}(\xi;\beta,\gamma), \end{aligned} \tag{6}$$

где квадрат нормы d_n равен

$$d_n = \frac{n!}{\gamma^n (\beta)_n (1-\gamma)^\beta}. \tag{7}$$

Разностное уравнение для полиномов Мейкснера имеет вид [44, 39]

$$[\gamma(\xi+\beta)e^{\partial_\xi} + \xi e^{-\partial_\xi} - (1+\gamma)(\xi + \frac{1}{2}\beta) + (1-\gamma)(n + \frac{1}{2}\beta)]\, M_n(\xi;\beta,\gamma) = 0. \tag{8}$$

Производящими функциями для полиномов Мейкснера являются функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} M_n(\xi;\beta,\gamma)\, t^n = \left(1 - \frac{t}{\gamma}\right)^\xi (1-t)^{-\xi-\beta}, \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M_n(\xi;\beta,\gamma)\, t^n = e^t\, {}_1F_1\left({-\xi \atop \beta} \middle| \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) t \right). \tag{10}$$

Для придания рекуррентным соотношениям (7) симметричной формы, следуя работе [35], определим перенормированные полиномы Мейкснера

$$\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma) = \frac{M_n(\xi;\beta,\gamma)}{c_n}, \tag{11}$$

где

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \gamma^{-n/2}\sqrt{\frac{n!}{(\beta)_n}}, \quad n \geq 1. \tag{12}$$

и учтено, что $M_0(\xi;\beta,\gamma) = 1$. Тогда полиномы $\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma)$ удовлетворяют каноническим трехчленным рекуррентным соотношениям с симметричной матрицей Якоби

$$\xi\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma) = b_n\widetilde{M}_{n+1}(\xi;\beta,\gamma) - a_n\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma) + b_{n-1}\widetilde{M}_{n-1}(\xi;\beta,\gamma) \tag{13}$$

$$\widetilde{M}_0(\xi;\beta,\gamma) = 1\,, \tag{14}$$

коэффициенты которых определены по формулам

$$b_{-1} = 0,\ b_n = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\sqrt{(\beta+n)(n+1)},\ a_n = \frac{n+(n+\beta)\gamma}{\gamma-1}, \quad n \geq 0. \tag{15}$$

Заметим, что матрица Якоби, порождаемая (13), имеет ненулевую диагональ, и соответствующая проблема моментов определена [25].

Для нормированных полиномов Мейкснера $\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma)$ соотношение ортогональности (4) принимает вид

$$\sum_{\xi=0}^{\infty}\widetilde{\rho}^M(\xi)\,\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma)\,\widetilde{M}_m(\xi;\beta,\gamma) = \delta_{nm} \tag{16}$$

с весом

$$\widetilde{\rho}^M(\xi) = \frac{(\beta)_\xi\,\gamma^\xi}{\xi!}(1-\gamma)^\beta. \tag{17}$$

Левая часть соотношения (16) может быть записана в виде интеграла по дискретной мере с носителями в точках $\xi = 0,1,2,\ldots$ и нагрузками (17).

Определим далее функции Мейкснера

$$\psi_n^M(\xi;\beta,\gamma) = (-1)^n\sqrt{\widetilde{\rho}^M(\xi)}\,\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma), \tag{18}$$

которые в пространстве $\mathcal{H}_0^M := \ell^2$ удовлетворяют дискретным соотношениям ортогональности

$$\sum_{\xi=0}^{\infty} \psi_n^M(\xi;\beta,\gamma)\,\psi_m^M(\xi;\beta,\gamma) = \delta_{nm}, \tag{19}$$

или, с учетом симметрии полиномов Мейкснера (3), соотношениям ортогональности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^M(\xi;\beta,\gamma)\,\psi_m^M(\xi';\beta,\gamma) = \delta_{\xi\xi'}. \tag{20}$$

2.2. Осциллятор Мейкснера. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}^M := \ell^2(\widetilde{\rho}^M)$ с весом $\widetilde{\rho}^M$ (17) и базисом $\left\{\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma)\right\}_{n=0}^{\infty}$. Обозначим $\widehat{\mathcal{H}}^M$ пространство $\mathcal{H}^M$ с базисом $\left\{\widehat{M}_n(\xi;\beta,\gamma)\right\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$\widehat{M}_n(\xi;\beta,\gamma) = (-1)^n\,\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma).$$

Полиномы $\widehat{M}_n$ подчиняются рекуррентному соотношению

$$(-\xi)\widehat{M}_n(\xi;\beta,\gamma) = b_n\widehat{M}_{n+1}(\xi;\beta,\gamma) + a_n\widehat{M}_n(\xi;\beta,\gamma) + b_{n-1}\widehat{M}_{n-1}(\xi;\beta,\gamma). \tag{21}$$

Определим следующие унитарные преобразования:

$$U_1 : \mathcal{H}_0^M \to \widehat{\mathcal{H}}^M \quad \Rightarrow \quad U_1\varphi = \frac{\varphi}{\sqrt{\widetilde{\rho}^M}} = \widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{H}}^M; \tag{22}$$

$$U_2 : \widehat{\mathcal{H}}^M \to \mathcal{H}^M \quad \Rightarrow \quad U_2\widehat{M}_n = \widetilde{M}_n, \quad n = 0,1,2,\dots; \tag{23}$$

$$U : \mathcal{H}_0^M \to \mathcal{H}^M \quad \Rightarrow \quad U = U_2 \circ U_1. \tag{24}$$

Следуя работе [35], определим операторы “координаты” X и “импульса” P, задав их действие на элементы базиса

$$\left\{\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^M$ формулами

$$\begin{aligned} X\widetilde{M}_0(\xi;\beta,\gamma) &= b_0\widetilde{M}_1(\xi;\beta,\gamma) - a_0\widetilde{M}_0(\xi;\beta,\gamma)\\ X\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma) &= b_n\widetilde{M}_{n+1}(\xi;\beta,\gamma) - a_n\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma)\\ &+b_{n-1}\widetilde{M}_{n-1}(\xi;\beta,\gamma), \quad n \geq 1; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} P\widetilde{M}_0(\xi;\beta,\gamma) &= -ib_0\widetilde{M}_1(\xi;\beta,\gamma) - a_0\widetilde{M}_0(\xi;\beta,\gamma)\\ P\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma) &= i\left(b_{n-1}\widetilde{M}_{n-1}(\xi;\beta,\gamma) - b_n\widetilde{M}_{n+1}(\xi;\beta,\gamma)\right)\\ &-a_n\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma), \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{26}$$

Определим осцилляторо-подобную систему, которую будем называть *осциллятором Мейкснера*, введя обобщенную координату $\widetilde{X}$ и обобщенный импульс $\widetilde{P}$

$$\widetilde{X} := \mathrm{Re}(X-P), \qquad \widetilde{P} := -i\,\mathrm{Im}(X-P), \tag{27}$$

и операторы рождения и уничтожения

$$\widetilde{a}^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{X} + i\widetilde{P}\right), \qquad \widetilde{a}^- := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{X} - i\widetilde{P}\right). \tag{28}$$

Гамильтониан для осциллятора Мейкснера выберем в виде

$$\widetilde{H}^M = \widetilde{X}^2 + \widetilde{P}^2\,. \tag{29}$$

Из результатов работы [35] следует, что спектр этого гамильтониана имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2{b_0}^2 = 2\beta\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\right)^2;\\ \lambda_n &= 2\left(b_{n-1}^2 + b_n^2\right) = \left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\right)^2(n^2+n\beta+\frac{1}{2}\beta), \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Заметим, что аналогичным образом можно определить осциллятор Мейкснера, связанный с полиномами $\widehat{M}_n$ в пространстве $\widehat{\mathcal{H}^M}$. Однако, из (25)–(29) следует, что эти осцилляторы совпадают.

Также как и в [35] можно показать, что уравнение на собственные значения $\widetilde{H}^M y = \lambda_n y$ эквивалентно разностному уравнению

$$\begin{aligned} n(\gamma-1)y(\xi) &= \gamma(\xi+\beta)y(\xi+1) - [\xi+(\xi+\beta)\gamma]y(\xi) + \xi y(\xi-1),\\ y(\xi) &= \widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma), \end{aligned} \tag{31}$$

которое естественно назвать уравнением Шредингера для построенного осциллятора Мейкснера. (Отметим, что уравнение (31) является другой формой записи уравнения (8)).

Укажем на существенное отличие нашего варианта осциллятора Мейкснера от осциллятора предложенного в работе [10]. Осциллятор Мейкснера из [10] в пространстве $\mathcal{H}_0^M$ имеет гамильтониан

$$\overset{\circ}{H}{}^M(\xi) = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}\left(\xi + \frac{1}{2}\beta\right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}\left[\mu(\xi)e^{\partial_\xi} + \mu(\xi-1)e^{-\partial_\xi}\right],$$
$$\mu(\xi) = \sqrt{(\xi+1)(\xi+\beta)}, \tag{32}$$

с линейно зависящими от n собственными значениями

$$\mu_n = n + \frac{1}{2}\beta, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{33}$$

тогда как в нашем случае спектр гамильтониана $\widetilde{H}^M$ имеет квадратичную зависимость от n (см. (30)). Уравнение на собственные значения для гамильтониана $\overset{\circ}{H}{}^M(\xi)$ (32) может быть записано в виде разностного уравнения (совпадающего с (8) и (31))

$$\left[\gamma(\xi+\beta)e^{\partial_\xi} + \xi\, e^{-\partial_\xi} - (1+\gamma)(\xi + \frac{1}{2}\beta) + (1-\gamma)(n + \frac{1}{2}\beta)\right]$$
$$M_n(\xi;\beta,\gamma) = 0. \tag{34}$$

3. Алгебра динамической симметрии и связь гамильтонианов $\widetilde{H}$ и H

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^M$ определим операторы

$$K_+^M := \frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}\widetilde{a}^+, \quad K_-^M := \frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}\widetilde{a}^-, \quad K_0^M := \frac{1}{2}[K_-^M, K_+^M]. \tag{35}$$

Определим новый гамильтониан $H^M = U\overset{\circ}{H}{}^M U^{-1} = K_0^M$. Можно показать, что операторы K_+^M, K_-^M, K_0^M дают реализацию коммутационных соотношений

$$[K_0^M, K_\pm^M] = \pm K_\pm^M, \qquad [K_-^M, K_+^M] = 2K_0^M; \tag{36}$$

алгебры $sp(2,\mathbb{R})$.

В работе [10] была получена реализация генераторов $\overset{\circ}{K}{}^M_+ = U^{-1}K^M_+U$ и $\overset{\circ}{K}{}^M_- = U^{-1}K^M_-U$ разностными операторами (в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^M$)

$$\overset{\circ}{K}{}^M_+ = \frac{\gamma}{1-\gamma}\mu(\xi)e^{\partial_\xi} + \frac{1}{1-\gamma}e^{-\partial_\xi}\mu(\xi) - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}\left(\xi+\frac{1}{2}\beta\right), \quad (37)$$

$$\overset{\circ}{K}{}^M_- = \frac{\gamma}{1-\gamma}\mu(\xi)e^{\partial_\xi} + \frac{\gamma}{1-\gamma}e^{-\partial_\xi}\mu(\xi) - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}\left(\xi+\frac{1}{2}\beta\right), \quad (38)$$

Обозначим $\widehat{K}{}^M_\pm = U_2^{-1}K^M_\pm U_2$, $\widehat{H}{}^M = U_2^{-1}H^MU_2$, соответствующие генераторы алгебры $sp(2,\mathbb{R})$ в пространстве $\widehat{\mathcal{H}}{}^M$, которые связаны с генераторами из [10] унитарным преобразованием

$$\widehat{K}{}^M_+ = U_1\overset{\circ}{K}{}^M_+U_1^{-1}, \quad \widehat{K}{}^M_- = U_1\overset{\circ}{K}{}^M_-U_1^{-1}, \quad \widehat{H}{}^M = U_1H^M_0U_1^{-1}. \quad (39)$$

Тогда из (32), (37) и (38) получаем

$$\widehat{K}{}^M_+ = \frac{\gamma^{3/2}}{1-\gamma}(\xi+\beta)\,e^{\partial_\xi} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}(1-\gamma)}\xi e^{-\partial_\xi} - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}\left(\xi+\frac{1}{2}\beta\right), \quad (40)$$

$$\widehat{K}{}^M_- = \frac{\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}(\xi+\beta)\,e^{\partial_\xi} + \frac{\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}\xi e^{-\partial_\xi} - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}\left(\xi+\frac{1}{2}\beta\right), \quad (41)$$

$$\widehat{H}{}^M = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}\left(\xi+\frac{1}{2}\beta\right) - \frac{\gamma}{1-\gamma}(\xi+\beta)\,e^{\partial_\xi} - \frac{1}{1-\gamma}\xi e^{-\partial_\xi} \quad (42)$$

На элементах $\widehat{M}_n$ базиса пространства $\widehat{\mathcal{H}}{}^M$ эти операторы действуют по формулам

$$\widehat{K}{}^M_+\widehat{M}_n = \mu(n)\widehat{M}_{n+1}, \quad \widehat{K}{}^M_-\widehat{M}_n = \mu(n-1)\widehat{M}_{n-1},$$
$$\widehat{H}{}^M\widehat{M}_n = \left(n+\frac{1}{2}\beta\right)\widehat{M}_n. \quad (43)$$

а на элементах $\widetilde{M}_n$ базиса пространства $\widetilde{H}$ по формулам

$$K^M_+\widetilde{M}_n = -\mu(n)\widetilde{M}_{n+1}, \quad K^M_-\widetilde{M}_n = -\mu(n-1)\widetilde{M}_{n-1},$$
$$H^M\widetilde{M}_n = \left(n+\frac{1}{2}\beta\right)\widetilde{M}_n. \quad (44)$$

Декартовы генераторы $\widehat{K}_1^M$, $\widehat{K}_2^M$ алгебры $sp(2,\mathbb{R})$ и оператор Казимира $\widehat{\mathcal{C}}_2$ имеют вид

$$\widehat{K}_1^M = -\frac{i}{2}(\widehat{K}_+^M - \widehat{K}_-^M) = \frac{i}{2}\left(\mu(\xi)e^{\partial_\xi} - \mu(\xi)e^{-\partial_\xi}\mu(\xi)\right), \tag{45}$$

$$\widehat{K}_2^M = -\frac{1}{2}(\widehat{K}_+^M + \widehat{K}_-^M) = -\frac{1+\gamma}{2(1-\gamma)}(\mu(\xi)e^{\partial_\xi}$$
$$+\mu(\xi)e^{-\partial_\xi}\mu(\xi)) + \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}(\xi + \frac{1}{2}\beta), \tag{46}$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_2 = (\widehat{K}^M)^2 = (\widehat{K}_0^M)^2 - (\widehat{K}_1^M)^2 - (\widehat{K}_2^M)^2 = (\widehat{K}_0^M)^2 - \widehat{K}_0^M - \widehat{K}_+^M\widehat{K}_-^M$$
$$= \frac{1}{2}\beta(\frac{1}{2}\beta - I). \tag{47}$$

Самосопряженные гамильтонианы $\widehat{\widetilde{H}}^M = U_2^{-1}\widetilde{H}^M U_2$ и H^M в гильбертовом пространстве $\widehat{\mathcal{H}}^M$ имеют общий набор собственных функций $\left\{\widehat{M}_n(\xi;\beta,\gamma)\right\}_{n=0}^{\infty}$ и связаны друг с другом соотношением

$$\widehat{\widetilde{H}}^M = \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}\left((\widehat{H}^M)^2 - (\widehat{K}^M)^2\right), \tag{48}$$

следовательно и самосопряженные гамильтонианы $\widetilde{H}^M$ и H^M в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^M$ связаны друг с другом соотношением

$$\widetilde{H}^M = \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}\left((H^M)^2 - (K^M)^2\right). \tag{49}$$

Эта формула дает интересную связь нашего гамильтониана с гамильтонианом модели обобщенного гармонического осциллятора в подходе, использованном в [10].

4. Когерентные состояния типа Барута–Жирарделло для осциллятора Мейкснера

4.1. Определение когерентных состояний. Когерентные состояния типа Барута–Жирарделло [36] для осциллятора Мейкснера, по определению, являются собственными состояниями оператора уничтожения $\widetilde{a}^-$. Обозначив $|n\rangle = \widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma)$ элементы базиса Фока (осцилляторного базиса) в гильбертовом пространстве Фока (пространстве чисел заполнения) $\mathcal{H}^M$, имеем

$$\widetilde{a}^-|z\rangle = z|z\rangle, \qquad |z\rangle = \mathcal{N}^{-1}(|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\sqrt{2}b_{n-1})!}|n\rangle,$$

где коэффициенты b_n определены формулой (15) и введено обозначение

$$\left(\sqrt{2}b_{-1}\right)! = 1, \qquad \left(\sqrt{2}b_n\right)! = 2^{\frac{1}{2}n}\, b_0 b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}, \quad n \geq 1\,. \qquad (51)$$

Для нормирующего множителя $\mathcal{N}(|z|^2)$ получаем

$$\mathcal{N}^2(|z|^2) = \langle z|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\right)^n \frac{|z|^{2n}}{(\beta)_n\, n!}. \qquad (52)$$

Так как радиус сходимости ряда в (52) $R = \infty$, то этот ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Из формулы (15) следует, что

$$(2b_{n-1}^2)! = \left(\frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2}\right)^n (\beta)_n\, n! = \left(\frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2}\right)^n \frac{n!\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \qquad (53)$$

Тогда, учитывая явный вид модифицированной функции Бесселя 1-рода

$$I_\alpha(2\sqrt{z}) := z^{\frac{1}{2}\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \qquad (54)$$

получаем

$$\mathcal{N}^2(|z|^2) = \left(\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\beta-1)} \frac{\Gamma(\beta)}{|z|^{\beta-1}}\, I_{\beta-1}\Big(2\frac{(1-\gamma)}{\sqrt{2\gamma}}|z|\Big). \qquad (55)$$

Это позволяет переписать выражение (50) для когерентного состояния в виде

$$|z\rangle = \frac{\left(\sqrt{\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}}|z|\right)^{\frac{1}{2}(\beta-1)}}{\left[I_{\beta-1}\big(2\frac{(1-\gamma)}{\sqrt{2\gamma}}|z|\big)\Gamma(\beta)\right]^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(\xi;\beta,\gamma)}{n!} \left(\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}\,z\right)^n. \qquad (56)$$

Используя производящую функцию (10) для полиномов Мейкснера ряд в формуле (56) можно просуммировать. В результате для когерентного состояния типа Барута–Жирарделло осциллятора Мейкснера получаем явное выражение

$$|z\rangle = \left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}}\right)^{\beta-1} |z|^{\frac{1}{2}(\beta-1)} \left[\Gamma(\beta)\, I_{\beta-1}\Big(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}|z|\Big)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\exp\left[\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}z\right]\, {}_1F_1\left(\begin{matrix}-\xi\\ \beta\end{matrix}\,\middle|\, \left(\frac{(1-\gamma)^2}{\gamma\sqrt{2\gamma}}\right) z\right) \qquad (57)$$

Для перекрытия двух когерентных состояний получаем

$$\langle z_1|z_2\rangle = I_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}\sqrt{\overline{z_1}z_2})\left[I_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}|z_1|)\,I_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}|z_2|)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{58}$$

Отметим, что это выражение при $\alpha=\beta-1$ и $\gamma=2-\sqrt{3}$ совпадает с аналогичным выражением для когерентных состояний осциллятора Лагерра (см. формулу (24) из [31]. Отметим также, что с учетом формулы (17) для функции Мейкснера, имеем

$$\begin{aligned}\psi_n^M(\xi;\beta,\gamma) &= (-1)^n\psi_0(\xi;\beta,\gamma)\,\widetilde{M}_n(\xi;\beta,\gamma),\\ \psi_0^M(\xi;\beta,\gamma) &= \sqrt{\frac{(\beta)_\xi\gamma^\xi}{\xi!}(1-\gamma)^\beta}\end{aligned} \tag{59}$$

так что наше выражение для когерентного состояния согласуется с формулой (69) работы Атакишиева и др. [10], если учесть, что в работе [10] рассматриваются ненормированные когерентные состояния.

4.2. Доказательство (сверх)полноты построенного семейства когерентных состояний. Важнейшим свойством семейства когерентных состояний является свойство (сверх) полноты, которое математически выражается требованием справедливости формулы разложения единицы,

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} |z\rangle\langle z|\,\widehat{W}(|z|^2)\,\mathrm{d}^2 z = \mathbb{1}\,. \tag{60}$$

Для проверки этой формулы надо построить меру

$$\mathrm{d}\,\mu(|z|^2) = \widehat{W}(|z|^2)\,\mathrm{d}^2 z \tag{61}$$

Известно [12–15], что с этой целью требуется решить классическую проблему моментов Стильтьеса [55, 56]

$$\pi\int\limits_0^\infty x^n W(x)dx = \left(\frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2}\right)^n \frac{n!\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}, \quad n\geq 0, \tag{62}$$

где

$$W(x) = \frac{\widehat{W}(x)}{\mathcal{N}^2(x)}, \quad (x=|z|^2) \tag{63}$$

Учитывая формулу (6.561.16) из [54] находим

$$W(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma\Gamma(\beta)}\,\left(\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\,x\right)^{\frac{1}{2}(\beta-1)} K_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}\sqrt{x})\,. \tag{64}$$

Тогда

$$\widehat{W}(|z|^2) = \frac{(1-\gamma)^2}{\pi\gamma}\,K_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}|z|)\,I_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}|z|)\,, \tag{65}$$

и для меры (61) получаем выражение

$$\mathrm{d}\,\mu(|z|^2) = \frac{(1-\gamma)^2}{\pi\gamma}\,K_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}|z|)\,I_{\beta-1}(2\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}|z|)\;\mathrm{d}^2\,z. \tag{66}$$

При $\alpha = \beta - 1$ и $\gamma = 2 - \sqrt{3}$ этот результат совпадает с аналогичным выражением для случая полиномов Лагерра [31].

5. Когерентные состояния типа Переломова для осциллятора Мейкснера

Когерентные состояния типа Переломова, связанные с динамической алгеброй $su(1|1)$ в случае осциллятора Мейкснера определяются по

$$\begin{aligned}|\zeta\rangle &= \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{1}{2}\beta}\,\exp(\zeta K_+^M)\widetilde{M}_0(\xi,\beta,\gamma)\\ &= \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{1}{2}\beta}\,\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{(\beta)_n}{n!}}\widetilde{M}_n(\xi,\beta,\gamma)\zeta^n,\end{aligned} \tag{67}$$

где $\zeta \in \mathbb{C}$ и $|\zeta| < 1$. Используя производящую функцию (10) для полиномов Мейкснера и учитывая соотношения (11)–(12) находим

$$\begin{aligned}|\zeta\rangle &= \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{1}{2}\beta}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}M_n(\xi,\beta,\gamma)(\sqrt{\gamma}\zeta)^n\\ &= \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{1}{2}\beta}\,\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}\zeta}{\gamma}\right)^{\xi}\,(1-\sqrt{\gamma}\zeta)^{\xi-\beta}\,.\end{aligned} \tag{68}$$

Этот результат согласуется с формулой (75) из [10]. Для перекрытия когерентных состояний (68) получаем

$$\langle\zeta_1|\zeta_2\rangle = \left[(1-|\zeta_1|^2)(1-|\zeta_2|^2)\right]^{\frac{1}{2}\beta}\,\left(1-\overline{\zeta_1}\zeta_2\right)^{-\beta}\,, \tag{69}$$

что также согласуется с аналогичным результатом из [10].

Для доказательства сверхполноты следует определить меру из разложения единицы для этих состояний, что приводит к проблеме моментов

$$\pi \int_0^\infty x^n W(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{n!}{(\beta)_n}, \qquad n = 0, 1, \dots. \tag{70}$$

Используя формулу (3.251.1) из [54] получаем

$$W(x) = \frac{\beta - 1}{\pi}(1 - x)^{\beta - 2}. \tag{71}$$

Следовательно мера имеет вид

$$\mathrm{d}\,\mu(|\zeta|^2) = \frac{\beta - 1}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\,\zeta}{(1 - |\zeta|^2)^2}. \tag{72}$$

Этот результат также соответствует тому, что получается в случае полиномов Лагерра при $\beta = \alpha + 1$.

Подчеркнем существенное отличие когерентных состояний типа Переломова, для которых параметр ζ принадлежит внутренности единичной окружности комплексной плоскости $|\zeta| < 1$, тогда как в случае когерентных состояний типа Барута–Жирарделло $z \in \mathbb{C}$.

6. Осциллятор Мейкснера–Поллачека и его когерентные состояния

6.1. Полиномы Мейкснера–Поллачека. Полиномы Мейкснера-Поллачека [39] определяются через гипергеометрическую функцию соотношением

$$P_n^\nu(\xi;\varphi) = \frac{(2\nu)_n}{n!}\, e^{in\varphi}\, {}_2F_1\left(\left.{-n, \nu + i\xi \atop 2\nu}\right| 1 - e^{-2i\varphi}\right), \tag{73}$$

и связаны с полиномами Мейкснера (3) соотношением

$$P_n^\nu(\xi;\varphi) = \frac{e^{-in\varphi}}{n!}(2\nu)_n M_n(i\xi - \nu; 2\nu, e^{-2i\varphi}). \tag{74}$$

Соотношение ортогональности для полиномов Мейкснера–Поллачека имеет вид ($\nu > 0$, $0 < \varphi < \pi$)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(2\varphi-\pi)\xi}|\Gamma(\nu+i\xi)|^2 P_m^\nu(\xi;\,\varphi)P_n^\nu(\xi;\,\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{(2\sin\varphi)^{2\nu}n!}\delta_{m,n}. \tag{75}$$

Эти полиномы удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\xi P_n^\nu(\xi;\,\varphi) = \widetilde{b}_n P_{n+1}^\nu(\xi;\,\varphi) - \widetilde{a}_n P_n^\nu(\xi;\,\varphi) + \widetilde{c}_n P_{n-1}^\nu(\xi;\,\varphi); \quad P_0^\nu(\xi;\,\varphi) = 1, \tag{76}$$

где

$$\widetilde{a}_n = (n+\nu)\operatorname{ctg}\varphi, \quad \widetilde{b}_n = \frac{n+1}{2\sin\varphi}, \quad \widetilde{c}_n = \frac{n+2\nu-1}{2\sin\varphi}, \tag{77}$$

и обладают свойством симметрии

$$P_n^\nu(-\xi;\,-\varphi) = P_n^\nu(\xi;\,\varphi), \tag{78}$$

Перенормированные согласно [35] многочлены

$$\widehat{P}_n^\nu(\xi;\,\varphi) = P_n^\nu(\xi;\,\varphi)\sqrt{\frac{n!}{(2\nu)_n}}, \quad n \geq 0; \tag{79}$$

удовлетворяют симметричным рекуррентным соотношениям

$$\xi \widehat{P}_n^\nu(\xi;\,\varphi) = \alpha_n \widehat{P}_{n+1}^\nu(\xi;\,\varphi) - \widetilde{a}_n \widehat{P}_n^\nu(\xi;\,\varphi) + \alpha_{n-1}\widehat{P}_{n-1}^\nu(\xi;\,\varphi);$$
$$\widehat{P}_0^\nu(\xi;\,\varphi) = 1, \tag{80}$$

где

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{(n+1)(2\nu+n)}}{2\sin\varphi}. \tag{81}$$

Для перенормированных полиномы Мейкснера–Поллачека соотношение ортогональности принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{P}_m^\nu(\xi;\,\varphi)\widehat{P}_n^\nu(\xi;\,\varphi)\mu(\mathrm{d}\,\xi) = \delta_{m,n}, \tag{82}$$

где

$$\mu(\mathrm{d}\,\xi) = \frac{|\Gamma(\nu+i\xi)|^2}{2\pi\Gamma(2\nu)}e^{(2\varphi-\pi)\xi}(2\sin\varphi)^{2\nu}\,\mathrm{d}\,\xi \tag{83}$$

Обозначим $\mathcal{H}^P$ гильбертово пространство

$$\mathcal{H}^P = L^2(\mathbb{R}, \mu(\mathrm{d}\xi)). \tag{84}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать унитарное преобразование $\widehat{V} : \widehat{\mathcal{H}}^M \to \mathcal{H}^P$. Заметим, что так как параметр γ, входящий в рекуррентные соотношения (13) и (21) для $\widetilde{M}_n$ и $\widehat{M}_n$, соответственно, равен $e^{-2i\varphi}$, то для $\sqrt{\gamma} = \sqrt{e^{-2i\varphi}}$ можно выбрать два значения

$$\pm\sqrt{\gamma} = \mp e^{-i\varphi}. \tag{85}$$

Из (21) выбирая знак минус, имеем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}\xi \widehat{M}_n^-(\xi;\beta,\gamma) = -i\alpha_n \widehat{M}_{n+1}^-(\xi;\beta,\gamma) - (i\widetilde{a}_n + \nu)\widehat{M}_n^-(\xi;\beta,\gamma)\\ -i\alpha_{n-1}\widehat{M}_{n-1}^-(\xi;\beta,\gamma);\end{aligned} \tag{86}$$

а из (13) выбирая знак плюс, имеем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}\xi \widehat{M}_n^+(\xi;\beta,\gamma) = i\alpha_n \widehat{M}_{n+1}^+(\xi;\beta,\gamma)\\ -(i\widetilde{a}_n + \nu)\widehat{M}_n^+(\xi;\beta,\gamma) + i\alpha_{n-1}\widehat{M}_{n-1}^+(\xi;\beta,\gamma).\end{aligned} \tag{87}$$

различающихся выбором значения $\sqrt{e^{-2i\varphi}}, \quad (0 < \varphi < \pi)$:

Так как из (74) (с учетом (11)) следует, что

$$\widehat{P}_n^\nu(\xi,\varphi) = \widetilde{M}_n^-(i\xi - \nu, 2\nu, e^{-2i\varphi}),$$

то мы можем определить унитарное преобразование $\widehat{V}$ соотношением

$$\begin{aligned}\widehat{P}_n^\nu(\xi,\varphi) = \widetilde{M}_n^-(i\xi - \nu, 2\nu, e^{-2i\varphi}) = (-1)^n \widehat{M}_n^-(i\xi - \nu, 2\nu, e^{-2i\varphi})\\ = \widehat{V}\widehat{M}_n^-(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi})\end{aligned} \tag{88}$$

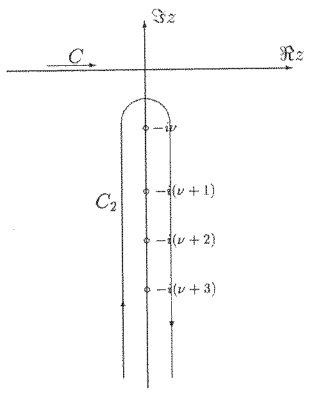
Отметим, что мы выбрали в (85) знак минус, соответствующий полиномам $\widehat{M}_n^-$, удовлетворяющим рекуррентным соотношениям (86), так как выбор знака плюс (т.е. многочленов $\widehat{M}_n^+$, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям (87)) приводит к противоречию. Действительно в этом случае из (87) следует $\widehat{M}_n^+(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi}) = \widetilde{M}_n^-(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi})$ и тогда

$$\begin{aligned}\widehat{V}\widehat{M}_n^+(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi}) = (-1)^n \widetilde{M}_n^-((i\xi - \nu), 2\nu, e^{-2i\varphi})\\ \neq \widetilde{M}_n^-((i\xi - \nu), 2\nu, e^{-2i\varphi}).\end{aligned}$$

Уместно отметить, что переход от дискретного соотношения ортогональности (16) для многочленов Мейкснера к непрерывным соотношениям ортогональности (82) для многочленов Мейкснера–Поллачека, является аналогом преобразования Зомерфельда–Ватсона в теории рассеяния. Для того, чтобы убедиться в унитарности преобразования $\widehat{V}$ подставим (88) в соотношение ортогональности (82)

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{M_n}(\pm i\xi - \nu; 2\nu; e^{-2i\varphi})\widehat{M_m}(\pm i\xi - \nu; 2\nu; e^{-2i\varphi})\mu(\mathrm{d}\,\xi) = \delta_{m,n}. \tag{89}$$

Заметим, что $|\Gamma(\nu+i\xi)|^2 = \Gamma(\nu+i\xi)\Gamma(\nu-i\xi)$, и что подынтегральная функция в левой части формулы (89) аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точек $\zeta_k = -i(k+\nu), \quad (k \geq 0)$ на мнимой оси в которых она имеет полюса первого порядка. Учитывая асимптотическое поведение гамма-функции на бесконечности заменим контур интегрирования C_2 на контур $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} l_k$, где l_k – окружность с центром в точке ζ_k радиуса $r \leq \frac{1}{2}$.



В результате, применяя теорему о вычетах получаем

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \oint\limits_{l_k} F(\zeta;\nu;\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Res}\, F\,\Big|_{\zeta=\zeta_k} \tag{90}$$

Так как

$$\operatorname{Res}\left(\Gamma(\nu - i\zeta)\right)\Big|_{\zeta=\zeta_k} = \frac{(-1)^k}{k!}i, \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{91}$$

а остальные множители в F являются аналитическими функциями, то из (90) получим (16). Тем самым унитарность преобразования $V^{-1} : \mathcal{H}_P \to \mathcal{H}_M$ доказана (сравни [40]).

6.2. Осциллятор Мейкснера–Поллачека. Аналогично тому как это было сделано выше, определим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^P := \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mu(\mathrm{d}\xi))$, рассматриваемом как пространство Фока, операторы координаты и импульса, лестничные операторы $\widetilde{a}^-$ и $\widetilde{a}^+$, а также гамильтониан $\widetilde{H}^P$. Спектр гамильтониана $\widetilde{H}^P$ имеет вид

$$\lambda_0 = \frac{\nu}{2\sin^2\varphi}, \qquad \lambda_n = \frac{n(n+2\nu)}{\sin^2\varphi}. \tag{92}$$

Отметим, что уравнение $\widetilde{H}^P y = \lambda y$ на собственные значения оператора $\widetilde{H}^P$ эквивалентно разностному уравнению для полиномов Мейкснера–Поллачека

$$e^{i\varphi}(\nu - i\xi)y(\xi + i) + 2i(\xi\cos\varphi - (n+\nu)\sin\varphi)y(\xi) - e^{-i\varphi}(\nu + i\xi)y(\xi - i) = 0. \tag{93}$$

Также как и выше, введем другой гамильтониан, связанный с релятивистским осциллятором [40]. С этой целью в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^P$ определим операторы

$$K_+^P = \sqrt{2}\sin\varphi\,\widetilde{a}_P^+, \quad K_-^P = \sqrt{2}\sin\varphi\,\widetilde{a}_P^-, \quad K_0^P = \frac{1}{2}[K_-^P, K_+^P] = H^P, \tag{94}$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям алгебры Ли $sp(2,\mathbb{R})$

$$[K_-^P, K_+^P] = 2K_0^P, \quad [K_0^P, K_\pm^P] = \pm K_\pm^P. \tag{95}$$

Оператор Казимира имеет вид

$$K^2 = (K_0^P)^2 - (K_1^P)^2 - (K_2^P)^2, \tag{96}$$

где

$$K_1^P = -\frac{i}{2}(K_+^P - K_-^P), \quad K_2^P = -\frac{i}{2}(K_+^P + K_-^P). \tag{97}$$

Используя результаты работы [35], из соотношений (94), (35), (44) и (74) получаем

$$K_+^P = \widehat{V}\widehat{K}_+^M\widehat{V}^{-1}, \quad K_-^P = \widehat{V}\widehat{K}_-^M\widehat{V}^{-1}, \quad H^P = \widehat{V}\widehat{H}^M\widehat{V}^{-1}. \tag{98}$$

Напомним, что из (81), и (15) при $\gamma = e^{-2i\varphi}$ и $\beta = 2\nu$, имеем

$$b_n^{\pm} = \mp i\alpha_n, \qquad a_n^{\pm} = i\widetilde{a}_n + \nu. \tag{99}$$

Тогда из рекуррентных соотношений (13) и (86) имеем

$$\begin{gathered}\left(\widehat{V}\xi\widehat{V}^{-1}\right)\widehat{P}_n^{\nu}(\xi;\varphi) = \widehat{V}\xi\widehat{M_n^-}(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi}) = \\ = \widehat{V}(-i\alpha_n\widehat{M_{n+1}^-}(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi}) - (i\widetilde{a}_n + \nu)\widehat{M_n^-}(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi}) \\ -i\alpha_{n-1}\widetilde{M_{n-1}^-}(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi})) = \\ = -i\left(\alpha_n\widehat{P}_{n+1}^{\nu}(\xi;\varphi) - \widetilde{a}_n\widehat{P}_n^{\nu}(\xi;\varphi) + \alpha_{n-1}\widehat{P}_{n-1}^{\nu}(\xi;\varphi)\right) - \nu\widehat{P}_n^{\nu}(\xi;\varphi)\end{gathered} \tag{100}$$

Из (100) и (76) следует, что при произвольных значениях φ оператор, унитарно эквивалентный оператору “координаты” в пространстве $\mathcal{H}^P$, действует неестественным образом (не является оператором умножения на независимую переменную) и только для $\xi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ имеем

$$\widehat{V}\xi\widehat{V}^{-1} = (-i\xi - \nu). \tag{101}$$

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать оператор $\widehat{V}$ только при $\xi = \frac{\pi}{2}$. Далее имеем

$$\begin{gathered}\widehat{V}e^{\partial_\xi}\widehat{V}^{-1}\widehat{P}_n^{\nu}(\xi,\varphi) = \widehat{V}e^{\partial_\xi}\widehat{M_n^-}(\xi, 2\nu, e^{-2i\varphi}) \\ = \widehat{V}\widetilde{M_n^-}(\xi+1, 2\nu, e^{-2i\varphi}) = (-1)^n\widetilde{M_n^-}(i(\xi+1)-\nu, 2\nu, e^{-2i\varphi}) \\ = (-1)^n e^{i\partial_\xi}\widetilde{M_n^-}(i\xi-\nu, 2\nu, e^{-2i\varphi}) = e^{i\partial_\xi}\widehat{P}_n^{\nu}(\xi,\varphi).\end{gathered}$$

Аналогично получаем

$$\widehat{V}e^{-\partial_\xi}\widehat{V}^{-1} = e^{-i\partial_\xi}.$$

Окончательно имеем

$$\widehat{V}\xi\widehat{V}^{-1} = -i\xi - \nu, \qquad \widehat{V}e^{\pm\partial_\xi}\widehat{V}^{-1} = e^{\pm i\partial_\xi}. \tag{102}$$

Из этих соотношений с учетом (40)–(44) получаем явную реализацию операторов K_+^P, K_-^P, H^P разностными операторами в

$\mathcal{H}^P$

$$k_+^P = K_+^P\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{2}(\nu - i\xi)e^{i\partial_\xi} - \frac{i}{2}(\nu + i\xi)e^{-i\partial_\xi} + \xi, \tag{103}$$

$$k_-^P = K_-^P\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2}(\nu - i\xi)e^{i\partial_\xi} + \frac{i}{2}(\nu + i\xi)e^{-i\partial_\xi} + \xi, \tag{104}$$

$$h^P = H^P\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\nu - i\xi}{2}e^{i\partial_\xi} + \frac{\nu + i\xi}{2}e^{-i\partial_\xi} \tag{105}$$

Эти операторы действуют на нормированные полиномы Мейкснера–Поллачека по формулам

$$K_+^P \widehat{P}_n^\nu = -\mu(n)\widehat{P}_{n+1}^\nu,\ K_-^P \widehat{P}_n^\nu = -\mu(n-1)\widehat{P}_{n-1}^\nu,\ H^P \widehat{P}_n^\nu = (n+\nu)\widehat{P}_n^\nu. \tag{106}$$

Для сравнения наших результатов с результатами работы Н. М. Атакишиева и С. К. Суслова [40], нам потребуется ввести три вспомогательных пространства. Первое из них – гильбертово пространство $\mathring{\mathcal{H}}^P = \mathrm{L}^2(\mathrm{d}\xi)$, с базисом

$$\left\{\Phi_n^\nu(\xi,\varphi) = g(\nu;\xi)\widehat{P}_n^\nu(\xi,\varphi)\right\}_{n=0}^\infty, \tag{107}$$

где

$$g(\nu;\xi) = \frac{|\Gamma(\nu - i\xi)|2^\nu}{\sqrt{2\pi\Gamma(n)}}. \tag{108}$$

Используя унитарный оператор

$$W : \mathcal{H}^P \to \mathring{\mathcal{H}}^P, \qquad WP_n^\nu = g\widehat{P}_n^\nu = \Phi_n^\nu, \tag{109}$$

и обратный к нему

$$W^{-1} : \mathring{\mathcal{H}}^P \to \mathcal{H}^P, \qquad W^{-1}\Phi_n^\nu = g^{-1}\Phi_n^\nu = P_n^\nu \tag{110}$$

определим операторы

$$\mathring{K}_+^P = WK_+^PW^{-1}, \qquad \mathring{K}_-^P = WK_-^PW^{-1}, \qquad \mathring{H}^P = WH^PW^{-1}. \tag{111}$$

Так как

$$We^{i\partial_\xi}W^{-1} = |\nu - 1 + i\xi|e^{i\partial_\xi}, \qquad We^{-i\partial_\xi}W^{-1} = \frac{1}{|\nu + i\xi|}e^{-i\partial_\xi}, \tag{112}$$

то учитывая соотношения (103)–(105) получаем явный вид операторов (111) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$k_+^P = \overset{\circ}{K}{}_+^P\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{2}(\nu - i\xi)|\nu - 1 + i\xi| e^{i\partial_\xi} - \frac{i}{2}\frac{\nu + i\xi}{|\nu + i\xi|} e^{-i\partial_\xi} + \xi, \tag{113}$$

$$k_-^P = \overset{\circ}{K}{}_-^P\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2}(\nu - i\xi)|\nu - 1 + i\xi| e^{i\partial_\xi} + \frac{i}{2}\frac{\nu + i\xi}{|\nu + i\xi|} e^{-i\partial_\xi} + \xi, \tag{114}$$

$$h^P = \overset{\circ}{H}{}^P\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\nu - i\xi)|\nu - 1 + i\xi| e^{i\partial_\xi} + \frac{1}{2}\frac{\nu + i\xi}{|\nu + i\xi|} e^{-i\partial_\xi}. \tag{115}$$

Обозначим далее $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_A^P$ пространство $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^P$ при следующем выборе параметров

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \xi = \frac{x}{\lambda}, \qquad \nu(\nu - 1) = \lambda^{-4} \tag{116}$$

Выберем в $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_A^P$ новый базис

$$\overset{\circ}{\Psi}_n = S\Phi_n^\nu = \Phi_n^\nu \, e^{i\arg\Gamma(\nu + i\xi)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{117}$$

Под действием унитарного оператора $S = e^{i\arg\Gamma(\nu+i\xi)}$ разностные операторы $e^{\pm i\partial_\xi}$ преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} Se^{i\partial_\xi}S^{-1} &= e^{i\arg\Gamma(\nu+i\xi)} e^{i\partial_\xi} e^{-i\arg\Gamma(\nu+i\xi)} \\ &= e^{i\arg(\nu-1+i\xi)} e^{i\arg\Gamma(\nu+i\xi)} e^{-i\arg\Gamma(\nu+i\xi)} e^{i\partial_\xi} = e^{i\arg(\nu-1+i\xi)} e^{i\partial_\xi}; \end{aligned} \tag{118}$$

$$Se^{-i\partial_\xi}S^{-1} = e^{i\arg\Gamma(\nu+i\xi)} e^{-i\partial_\xi} e^{-i\arg\Gamma(\nu+i\xi)} = e^{i\arg(\nu-i\xi)} e^{-i\partial_\xi}. \tag{119}$$

Тогда гамильтониан $\overset{\circ}{H}{}^P$ (115) переходит в

$$\overset{\circ}{h}{}_S^P = S\overset{\circ}{h}{}^P S^{-1} = \frac{1}{2}\left(\nu(\nu - 1) + i\xi + \xi^2\right) e^{i\partial_\xi} + \frac{1}{2} e^{-i\partial_\xi}. \tag{120}$$

При переходе в пространство $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_A^P$ гамильтониан (120) принимает вид

$$\overset{\circ}{h}{}_A^P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^4} + i\frac{x}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2}\right) e^{i\lambda\partial_x} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda\partial_x}. \tag{121}$$

Для того чтобы убедиться в том, что наш гамильтониан совпадает с гамильтонианом из работы [40] осталось перейти к пространству $\mathcal{H}_A^P$ унитарным преобразованием $V_A : \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_A^P \to \mathcal{H}_A^P$, таким что

$$\phi_n^A = V_A \overset{\circ}{\phi}_n = \eta(x) \overset{\circ}{\phi}_n, \tag{122}$$

где

$$\eta(x) = \lambda^{2i\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2}}, \quad \overset{\circ}{\phi}_n = \Phi_n^\nu(\frac{x}{\lambda}, \frac{\pi}{2}) e^{i \arg \Gamma(\nu + i\frac{x}{\lambda})}. \tag{123}$$

При этом преобразовании

$$V_A e^{i\lambda\partial_x} V_A^{-1} = \eta(x) e^{i\lambda\partial_x} \eta^{-1}(x) = \frac{\eta(x)}{\eta(x+i\lambda)} e^{i\lambda\partial_x} = \lambda^2 e^{i\lambda\partial_x}; \tag{124}$$

$$V_A e^{-i\lambda\partial_x} V_A^{-1} = \eta(x) e^{-i\lambda\partial_x} \eta^{-1}(x) = \frac{\eta(x)}{\eta(x-i\lambda)} e^{-i\lambda\partial_x} = \lambda^{-2} e^{-i\lambda\partial_x}. \tag{125}$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_A^P = V_A \overset{\circ}{h}{}_A^P V_A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + i\lambda x + x^2\right) e^{i\lambda\partial_x} + \frac{1}{2\lambda^2} e^{-i\lambda\partial_x} = \\ = \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{ch}(i\lambda\partial_x) + \frac{1}{2}(x+i\lambda) x e^{i\lambda\partial_x}, \end{aligned} \tag{126}$$

что совпадает с гамильтонианом линейного релятивистского осциллятора работы [40] (см. формулу (4.1) этой работы).

6.3. Когерентные состояния для осциллятора Мейкснера–Поллачека.

Ограничимся построением когерентных состояний типа Барута–Жирарделло для осциллятора Мейкснера–Поллачека в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^P$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$k_-^P |z\rangle = z|z\rangle. \tag{127}$$

Разложение когерентного состояния $|z\rangle$ по базису Фока

$$\left\{ |z\rangle = \widehat{P}_n^\nu(\xi, \frac{\pi}{2}) \right\}_{n=0}^\infty$$

в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}^P$ имеет вид

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1}(|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\mu(n-1))!}|n\rangle\,, \qquad \mu(n)=\sqrt{(n+1)(n+2\nu)} \tag{128}$$

$$\mathcal{N}^2(|z|^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{\left((\mu(n-1))!\right)^2}=(2\nu)_n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!\Gamma(n+2\nu)}. \tag{129}$$

Радиус сходимости ряда в (129) равен $R=\infty$ и учитывая (54) имеем

$$\mathcal{N}^2(|z|^2)=\frac{\Gamma(2\nu)}{|z|^{2\nu-1}}I_{2\nu-1}(2|z|). \tag{130}$$

В результате имеем

$$|z\rangle = \frac{|z|^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(2\nu)I_{2\nu-1}(2|z|)}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\widehat{P}_n^{\nu}(\xi,\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n!(2\nu)_n}}z^n =$$

$$= \frac{|z|^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(2\nu)I_{2\nu-1}(2|z|)}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\widetilde{M}_n^-(i\xi-\nu,2\nu;-1)}{\sqrt{n!(2\nu)_n}}z^n. \tag{131}$$

Учитывая соотношение

$$\widetilde{M}_n^-(i\xi-\nu,2\nu;-1)=\sqrt{\frac{(2\nu)_n}{n!}}M_n(i\xi-\nu,2\nu;-1)\,,$$

получаем

$$|z\rangle = \frac{|z|^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(2\nu)I_{2\nu-1}(2|z|)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n(i\xi-\nu,2\nu;-1)}{\sqrt{n!}}(iz)^n =$$

$$= \frac{|z|^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(2\nu)I_{2\nu-1}(2|z|)}}\,e^{-iz}\,{}_1F_1\left(\left.{}^{i\xi-\nu}_{2\nu}\right|-2iz\right). \tag{132}$$

Перекрытие двух когерентных состояний определяется соотношением

$$\langle z_1|z_2\rangle = I_{2\nu-1}(2\sqrt{\overline{z_1}z_2})\left[I_{2\nu-1}(2|z_1|)\,I_{2\nu-1}(2|z_2|)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{133}$$

Литература

1. R. Floreanini, L. Vinet, *q-orthogonal polynomials and the oscillator quantum group*. — Lett. Math. Phys. **22**, No. 1 (1991) 45–54.

2. R. Floreanini, L. Vinet, *Representations of quantum algebras and q-special functions.* — hep-th/9111023.
3. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, *q-полиномы Эрмита и q-осцилляторы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **199** (1992), 81–90.
4. Z. Chang, H.-Y. Guo, H. Yan, *The q-Hermite polynomial and the representations of Heisenberg and quantum Heisenberg algebra.* — J. Phys. A. **25**, No. 6 (1992), 1517–1526.
5. R. Floreanini, J. Le Tourneaux, L. Vinet, *More on the q-oscillator algebra and q-orthogonal polynomials.* — J. Phys. A. **28**, No. 10 (1994), L 287–294, [math.CA/9504218].
6. R. Floreanini, J. Le Tourneaux, L. Vinet, *An algebraic interpretation of the continuous big q-Hermite polynomials.* — J. Math. Phys. **36**, No. 9 (1995), 5091–5097.
7. E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish, *Irreducible representations of deformed oscillator algebra and q-special functions.* — Intern. J. Mod. Phys. A. **12**, No. 1 (1996), 153–158, [q-alg/9610002].
8. R. Hinterding, J. Wess, *q-deformed Hermite polinomials in q-quantum mechanics.* — Z. Phys. C **71** (1996), 533–537, [math.QA/9803050].
9. H.-C. Fu, R. Sasaki, *Exponential and Laguerre squeezed states for $su(1,1)$ algebra and the Calogero–Sutherland model.* — Phys. Rev. A. **53**, No. 6 (1996), 3836–3844.
10. N. M. Atakishiyev, E. I. Jafarov, Sh. M. Nagiyev, K. B. Wolf, *Meixner oscillators.* — Revista Mexicana de Fisica **44**, No. 3 (1998), 235–244; [math-ph/9807035];
11. A. Odzijewicz, *Quantum algebras and q–special functions related to coherent states maps of the disk.* — Commun. Mat. Phys. **192** (1998), 183–215.
12. J.-P. Gazeau, J. R. Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum.* — J. Phys. A. **32**, No. 1 (1999), 123–132.
13. K. A.Penson, A. I. Solomon, *New generalized coherent states.* — J. Math. Phys. **40**, No. 5 (1999), 2354–2363.
14. X.-G. Wang, *Coherent states, displaced number states and Laguerre polynomial states for $su(1,1)$ Lie algebra.* — [quant-ph/0001002].
15. J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, P. Monceau, J. R. Klauder, K. A. Penson, *Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl-Teller potentials.* — J. Math. Phys. **42** (2001), 2349–2386; [math-ph/0012044].
16. J. R. Klauder, K. A. Penson, J.-M. Sixdeniers, *Constructing coherent states through solutions of Stieltjes and Hausdorff moment problems.* — Phys. Rev. A. **64**, No. 1 (2001), 013817.
17. V. V. Borzov, *Generalized Hermite polynomials.* — [math. QA/0101216].
18. A. Jellal, *Coherent States for Generalized Laguerre Functions.* — [hep-th/0109028].
19. A. Odzijewicz, M. Horowski, A. Tereszkiewicz, *Integrable multi-boson systems and orthogonal polynomials.* — J. Phys. **A34** (2001), 4353–4376.
20. N. Cotfas, *Shape invariance, raising and lowering operators in hypergeometric type equations.* — J. Phys. A. **35**, No. 44 (2002), 9355–9365; [quant-ph/0206129]; CGY-ElKD02.
21. A. H. El Kinani, M. Daoud, *Generalized coherent and intelligent states for exact solvable quantum systems.* — J. Math. Phys. **43** (2002), 714–33; [math-ph/0312040].
22. T. Appl, D. H.Schiller, *Generalized Hypergeometric Coherent States.* — J. Phys. A. **37**, No. 7 (2004), 2731–2750 ; [quant-ph/0308013];

23. S. T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, U. A. Mueller, *Coherent states and their generalizations: A mathematical overview.* — Rev. Math. Phys. **7**, No. 7 (1995), 1013–1104.
24. V. V. Dodonov, *"Nonclassical" states in quantum optics: a "squeezed" review of the first* 75 *years.* — J. Opt. B. **4**, No. 1 (2002), R1–R33.
25. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish, *Construction of the spectral measure for the deformed oscillator position operator in the case of undetermined Hamburger moment problem.* — Reviews in Math. Phys. **12**, No.5 (2000), 691–710; [math.QA/9803089].
26. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Realization of the annihilation operator for an oscillator-like system by a differential operator and Hermite-Chihara polynomials.* — Integral Transforms and Special Functions **13**, No. 6 (2002), 547–554; [math.QA/0101215].
27. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния для осциллятора Лежандра.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **285** (2002), 39–52; [math.QA/0307187].
28. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния и полиномы Чебышева*, сб. трудов международной конференции *Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания.* — Обнинск, 14–18 мая 2002 г. [quant-ph/0307133].
29. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния и ортогональные многочлены.* — Труды конференции "День Дифракции 2002", СПб. (2002), [math.QA/0209181].
30. В. В.Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния Барута–Жирарделло для осциллятора Гегенбауера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **291** (2002), 43–63.
31. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Generalized Coherent states: A Novel Approach.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **300** (2003), 65–70.
32. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Generalized Coherent States for q-oscillator connected with q-Hermite Polynomials.* — Day on Diffraction 2003, SPb 2003, [math.QA/0307356].
33. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Обобщенные когерентные состояния для q-осциллятора, ассоциированного с дискретными q-полиномами Эрмита.* — Зап. научн. ПОМИ, сер.*Математ. вопросы теории распространения волн* **308** (2004), 48–66.
34. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Осцилляторо-подобные системы, связанные с ортогональными многочленами, и их когерентные состояния*, стр. 9–19 в сб. "*Гравитация, космология и элементарные частицы*" Санкт-Петербург (2004).
35. V. V. Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras.* — Integral Transf. and Special Funct. **12**, No. 2 (2001), 115–138; [math.CA/0002226].
36. A. O. Barut, L. Girardello, *New "Coherent States" Associated with Non-Compact Groups.* — Commun. Math. Phys. **21**, No. 1 (1972), 41–55.
37. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* "Наука", ФМ, М. (1987).
38. W. Hahn, *Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen.* — Math. Nachr. **2** (1949), 4–34.

39. R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *The Askey sheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* — Report No. 94-05, Delft University of Technology (1994); [math.CA/9602214].
40. N. M. Atakishiyev, S. K. Suslov, *The Hahn and Meixner polynomials of an imaginary argument and some of their applications.* — J. Phys. **18**, No. 10 (1985), 1583–1596.
41. R. A. Askey, *Continuous Hahn polynomials.* — J. Phys. A. **18**, No. 16 (1985), L1017–L1019.
42. C. M. Bender, L. R. Mead, S. S. Pinsky, *Continuous Hahn polynomials and the Heisenberg algebra.* — J. Math. Phys. **28**, No. 3 (1987), 509–513.
43. T. H. Koornwinder, *Meixner-Pollaczek polynomials and the Heizenberg algebra.* — J. Math. Phys. **30**, No. 4 (1989), 767–769.
44. J. Meixner, *Orthogonale Polynomsysteme mit einem besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion.* — J. London Math. Soc **9** (1934), 6–13.
45. F. Pollaczek, *Sur une generalisation des polynomes de Legendre.* — C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 1563.
46. Sh. M. Nagiev, E. I. Jafarov, R. M. Imanov, *The Relativistic Linear Singular Oscillator.* — J. Phys. **36** No. 28 (2003), 7813–7824; [math-ph/0302042].
47. Н. М. Атакишиев, *Квазипотенциальные волновые функции релятивистского гармонического осциллятора и многочлены Поллачека.* — ТМФ **58**, No. 2 (1984), 254–260.
48. N. M. Atakishiev, K. B. Wolf, *Generalised coherent states for a relativistic model of the linear oscillator in a homogeneous external field.* — Repts. Math. Phys. **27**, No. 3 (1989), 305–311.
49. E. D. Kagramanov, R. M. Mir-Kasimov, Sh. M. Nagiev, *The covariant linear oscillator and generalized realization of the dynamical su(1,1) symmetry algebra.* — J. Math. Phys. **31**, No. 7 (1990), 1733–1738.
50. R. M. Mir-Kasimov, $SU_q(1,1)$ *and relativistic oscillator.* — J. Phys. A. **24**, No. 18 (1991), 4275–4282.
51. Н. М. Атакишиев, Ш. М. Нагиев, К. Б. Вольф, *О функциях распределения Вигнера для релятивистского линейного осциллятора.* — ТМФ **114**, No. 3 (1998), 410–425.
52. Н. М. Атакишиев, Р. М. Мир-Касимов, Ш. М. Нагиев, ТМФ **44** (1980), 47–53.
53. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, вып.2. "Наука", ФМ, М. (1966).
54. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд.5-е. "Наука", М. (1971).
55. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* ФМ, М. (1961).
56. B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator.* — Advances in Mathematics **137** (1998), 82–203.

Borzov V. V., Damaskinsky E. V. Generalized coherent states for oscillators connected with Meixner and Meixner–Pollachek polynomials.

We are continuing here the study of generalized coherent states for the oscillator-like systems connected with the given set of orthogonal polynomials. In this work we concider the case of Meixner and Meixner–Pollachek polynomials. We construct the oscillator-like systems associated with these polynomials and define their coherent states. By the solution of the related classical moment problem we prove the overcompleteness of constructed families of coherent states. We compare the obtained results with the results of other works. In particular, we shaw that the Hamiltonian of the relativistic model of linear harmonic oscillator can be concidered as special linearization of the quadratic Hamiltonin naturally appearing in our approach.

С.-Петербургский
университет телекоммуникаций,
Военный инженерный
технический университет

Поступило 20 октября 2004 г.