Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

Е. Ш. Гутшабаш

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

1. Введение

Всплеск интереса к нестационарному уравнению Шредингера ($NtSH$), наблюдаемый в последние десятилетия, по-видимому, объясняется не только необходимостью в решении собственно квантовомеханических задач, но и той ролью, которое оно играет в методе обратной задачи (например, в теории уравнения Кадомцева–Петвиашвили) и круге вопросов, связанных с ним [1–4].

Следует отметить, что существующие в настоящее время методы построения точных решений уравнения $NtSH$ в основном концентрируются вокруг двух: метод сплетающих соотношений (частным случаем которого является метод преобразования Дарбу (ПД)) [1, 2] и метод одевающих цепочек (см., например, [3]). Оба из этих методов обладают как рядом достоинств, так и недостатков (не вдаваясь в подробности, укажем только, что они не дают регулярной процедуры построения решений для произвольных и достаточно "хороших" потенциалов, а также в случае изменения размерности задачи).

Отдельно необходимо упомянуть о работе [5], в которой развивалась теория рассеяния непосредственно для уравнения $NtSH$ и обсуждалась ее связь с решениями уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

В определенном смысле альтернативный подход был предложен в [6]. Он основан на применении анзаца типа Дарбу, не зависит от пространственных производных (а, следовательно, и от размерности задачи) и сводит решение уравнения $NtSH$ к решению некоторого функционально-дифференциального уравнения, уже не содержащего потенциал.

Идея данной работы заключается в том, что если рассматривать уравнение $NtSH$ (хотя оно и линейное, но с переменным коэффициентом – потенциалом) как (пусть и весьма специальный) частный случай нелинейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + \varkappa(\Psi,\ \bar{\Psi})\Psi, \tag{1.1}$$

в предположении, что $\varkappa(\Psi,\ \bar{\Psi}) \equiv W(x,\ t)$, где $W(x,t)$ – некоторая заданная функция, зависящая только от пространственного и временного аргументов, то оно представляет собой вполне интегрируемую систему. Это означает, что оно обладает и всеми соответствующими атрибутами таких систем: задачей рассеяния, бесконечным инволютивным набором "законов сохранения" (поскольку исходная система не консервативна, то имеет смысл говорить о "соотношениях баланса"), тождествами следов, иерархией высших уравнений и т.д. Разумеется, кроме того, это также позволяет строить и точные решения исходного уравнения, известный набор которых к настоящему времени достаточно ограничен (см., например, монографию [7]; отметим здесь также важный обзор [8], в котором квантовомеханические системы обсуждались с точки зрения теории представлений групп и алгебр).

Таким образом, задача сводится к построению лаксовой пары и анализу соответствующей ассоциированной линейной системы.

Работа построена следующим образом. В п. 2 с помощью перехода к картине Гейзенберга мы строим представление Лакса. П. 3 посвящен проверке ковариантности и вычислению точных решений методом ПД.

2. Представление Лакса и картина Гейзенберга

Рассмотрим уравнение $NtSH$ (здесь и ниже мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, $m = 1/2$, где $\hbar$ – постоянная Планка, m – масса частицы) в координатном представлении:

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + W\Psi, \tag{2.1}$$

где $\Psi = \Psi(x,t)$ – волновая функция[1] . Потенциал $W = W(x,t)$ предполагается заданным (он играет роль функционального параметра) и вещественным, что приводит к равенству:

$$i(|\Psi|^2)_t = (\bar{\Psi}_x\Psi - \Psi_x\bar{\Psi})_x. \tag{2.2}$$

[1] Как отмечалось в [5], заменой $\Psi \to \Psi\exp(\lambda t/i)$ уравнение $i\Psi_t = -\Psi_{xx} + (W(x,t) - \lambda)\Psi$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, сводится к (2.1) и, таким образом, весь приведенный ниже анализ применим и к этому уравнению.

Представим уравнение (2.1) в виде условия совместности линейной системы матричных (2×2) уравнений:

$$\Phi_x = U\Phi\Lambda, \quad \Phi_t = V\Phi\Lambda, \tag{2.3}$$

где $\Phi = \Phi(x,t,\lambda) \in Mat(2,\mathbb{C})$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda,\ \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}$-параметр, причем $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, и положим

$$U = U(x,t) = \begin{pmatrix} u_0 & f_0 \\ g_0 & \bar{u}_0 \end{pmatrix}, \quad V = V(x,t) = \begin{pmatrix} v_0 & p_0 \\ q_0 & \bar{v}_0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Здесь $u_0 = u_0(x,t)$, $v_0 = v_0(x,t)$, $f_0 = f_0(x,t)$, $g_0 = g_0(x,t)$, $p_0 = p_0(x,t)$, $q_0 = q_0(x,t)$, а уравнение (2.1) эквивалентно соотношению:

$$u_{0t} = v_{0x}. \tag{2.5}$$

Его можно рассматривать как связь, которую удобно разрешить в виде:

$$\begin{aligned} u_0 &= i\Psi(x,t) - \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^t W(x,t')\Psi(x,t')dt' + A_0(x), \\ v_0 &= -\Psi_x(x,t) + \frac{2-\alpha}{2}\int\limits_{-M}^x W(x',:t)\Psi(x',:t)dx' + B_0(t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ – параметр, $A_0(x)$, $B_0(t)$ – произвольные функции, а $M > 0$ – произвольное (конечное или бесконечное) число, введенное с целью обеспечения сходимости возникающих ниже интегралов.

Требование совместности системы (2.3) приводит к соотношениям: $U_t - V_x = 0$ и $[U,V] = 0$; они, как проверяется прямым вычислением, будут выполнены, если функции f_0, g_0 будут удовлетворять линейным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} (\ln f_0)_t - \frac{1}{w_0}(\ln f_0)_x &= -\frac{1}{w_0}(\ln w_0)_x, \\ (\ln g_0)_t - \frac{1}{w_0}(\ln g_0)_x &= -\frac{1}{w_0}(\ln w_0)_x, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $w_0 = (u_0 - \bar{u}_0)/(v_0 - \bar{v}_0)$, $w_0 = \bar{w}_0$.

Для решения этих уравнений введем вещественнозначную функцию ξ_1 в виде криволинейного интеграла:

$$\xi_1 = \xi_1(x,t) = i \int\limits_{(x_0,t_0)}^{(x,t)} (u_0 - \bar{u}_0)dx + (v_0 - \bar{v}_0)dt, \quad \xi_1 = \bar{\xi}_1, \tag{2.8}$$

где x_0 – начальная точка, t_0 – начальный момент времени (в дальнейшем полагаем $t_0 = 0$).

В силу условия (2.5) интеграл (2.8) не зависит от пути интегрирования. Это позволяет проинтегрировать уравнения (2.7). Принимая во внимание, что $w_0 = \xi_{1x}/\xi_{1t}$, в результате имеем:

$$f_0 = \xi_{1x}F_0(\xi_1), \quad g_0 = \xi_{1x}G_0(\xi_1), \tag{2.9}$$

где $F_0(.)$, $G_0(.)$ – произвольные функции. Отсюда следует, что $p_0 = \xi_{1t}F_0(\xi_1)$, $q_0 = \xi_{1t}G_0(\xi_1)$, и окончательно получаем:

$$U = U(x,t) = \begin{pmatrix} u_0 & \xi_{1x}F_0(\xi_1) \\ \xi_{1x}G_0(\xi_1) & \bar{u}_0 \end{pmatrix},$$
$$V = V(x,t) = \begin{pmatrix} v_0 & \xi_{1t}F_0(\xi_1) \\ \xi_{1t}G_0(\xi_1) & \bar{v}_0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Таким образом, используя переход к картине Гейзенберга, мы формально нашли лаксово представление для уравнения (2.1). Заметим, кроме того, что требование вещественности потенциала при условии соблюдения (2.2) не налагает никаких дополнительных ограничений на матричные элементы матриц U и V.

Остановимся подробнее на возникшей здесь картине Гейзенберга. Для этого перепишем уравнение (2.1) в виде:

$$i\Psi_t^{(S)} = H(t)\Psi^{(S)}, \tag{2.11}$$

где $H(t)$ – гамильтониан, предполагаемый эрмитовым и зависящим от времени. Положим

$$\Psi^{(S)} = \hat{U}(t)\Psi^{(H)}, \tag{2.12}$$

где $\Psi^{(S)}$, $\Psi^{(H)}$ – вектора состояний в картинах Шредингера и Гейзенберга соответственно, $\hat{U}$ –унитарный оператор. Из (2.11), (2.12) следует, что этот оператор удовлетворяет уравнению:

$\hat{U}_t = -iH(t)\hat{U}$, откуда в предположении, что $\hat{U}(0) = I$, где I – единичный оператор, будем иметь:

$$\hat{U}(t) = \hat{T}e^{-i\int_0^t H(t')dt'}, \tag{2.13}$$

где $\hat{T}$ – оператор упорядочения по времени (оператор Дайсона).

Если, далее, L^0, $L(t)$ – наблюдаемые в картинах Шредингера и Гейзенберга соответственно, то согласно основным принципам квантовой механики, средние значения этих наблюдаемых в обеих картинах совпадают:

$$< \Psi^{(S)}|L^0|\Psi^{(S)} >=< \Psi^{(H)}|L(t)|\Psi^{(H)} >$$

Тогда с учетом унитарности $\hat{U}$, из последнего равенства получим

$$L(t) = \hat{U}^{+}(t)L^0\hat{U} = \hat{U}^{-1}L^0\hat{U} \tag{2.14}$$

где символ "+" означает эрмитовское сопряжение. Дифференцируя (2.14) по времени, будем иметь:

$$L_t = i\big[\hat{U}^{-1}H\hat{U},\ L\big] \tag{2.15}$$

Представление, эквивалентное этому, можно получить, используя другое, по сравнению с (2.13), соотношение для оператора $\hat{U}$. Действительно, нетрудно видеть, что

$$\hat{U}(t) = 1 - i\int\limits_0^t H(t')\hat{U}(t')dt' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{i}\right)^n\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^t dt_2\ldots\int\limits_0^t dt_n\hat{T}(H(t_1)\ldots H(t_n)). \tag{2.16}$$

Положим $\hat{R} = \big[H,\ \hat{U}\big]$. Тогда с учетом (2.16) имеем:

$$\hat{R} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{i}\right)^n\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^t dt_2\ldots\int\limits_0^t dt_n\big[H(t),\ \hat{T}(H(t_1)\ldots H(t_n))\big],$$

и, следовательно,

$$L_t = i\big[H + \hat{U}^{-1}\hat{R},\ L\big]. \tag{2.17}$$

Уравнения (2.15) и (2.17), таким образом, являются обобщением гейзенберговых уравнений движения на случай некоммутирующих операторов $H(t)$ и $\hat{U}$; при этом уравнение (2.17) эквивалентно (2.1). Это легко показать, считая величину u_0 в (2.6) наблюдаемой в картине Гейзенберга, полагая формально $u_0 = K_1\Psi^{(S)}$, $v_0 = K_2\Psi^{(S)}$, где K_1, K_2 есть интегральный и интегро-дифференциальный операторы соответственно, и получив замкнутое уравнение на u_0: $u_{0t} = \left[K_2(K_1^{-1}u_0)\right]_x$.

3. Преобразование Дарбу и точные решения

Перейдем к построению точных решений уравнения (2.1). В качестве метода, подходящего для этой цели, будем использовать метод матричного преобразования Дарбу [9], полагая в (2.6) $\alpha = 0$.

Пусть Φ_1 – решение системы (2.3), соответствующее выбору затравочного решения $\Psi = \Psi_1$ уравнения (2.1) и некоторому фиксированному значению $\lambda = \lambda_1$. Положим $L_1 = \Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi_1^{-1}$, $L_1 \in Mat(2, \mathbb{C})$, и проверим ковариантность системы (2.3) относительно преобразования:

$$\tilde{\Phi} = \Phi - L_1\Phi\Lambda. \tag{3.1}$$

Эта процедура приводит к следующим "одевающим" формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= L_1UL_1^{-1}, \quad \tilde{U} = U + \Phi_1[\Lambda_1^{-1}, \Phi_1^{-1}\Phi_{1x}]\Phi_1^{-1}, \\ \tilde{V} &= L_1VL_1^{-1}, \quad \tilde{V} = V + \Phi_1[\Lambda_1^{-1}, \Phi_1^{-1}\Phi_{1t}]\Phi_1^{-1}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

каждое из которых, как проверяется непосредственными вычислениями, эквивалентно другим.

Формулы (3.2) можно несколько упростить, используя возможные симметрии (инволюции) задачи. Действительно, комбинируя соотношения $\bar{\Lambda} = \sigma_1\Lambda\sigma_1$ и $\bar{\Lambda} = \sigma_2\Lambda\sigma_2$, где σ_1, σ_2 – первая и вторая матрицы Паули, и соответственно: $\bar{U} = \sigma_1U\sigma_1$ (если $\bar{p}_0 = q_0$) и $\bar{U} = \sigma_2U\sigma_2$ (если $\bar{p}_0 = -q_0$) приходим к равенствам $\bar{\Phi} = \sigma_1\Phi\sigma_1$, и $\bar{\Phi} = \sigma_2\Phi\sigma_2$ соответственно.

Из второго из соотношений (3.2) после некоторых вычислений тогда получаем:

$$\tilde{\Psi} = \Psi + iY_x, \quad Y = Y(x,\ t,\ \lambda_1) \equiv \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{|\lambda_1|^2}\left(\frac{1}{1-|y|^2}\right), \tag{3.3}$$

где $y = y(x,t,\lambda_1) = \varphi_{21}^{(1)}(x,t,\lambda_1)/\varphi_{11}^{(1)}(x,t,\lambda_1)$, $\varphi_{ij}^{(1)}(x,t,\lambda_1)$ – матричные элементы матрицы Φ_1.

Выражение для "одетого" потенциала уравнения $NtSH$ можно найти, либо выполнив в (2.1) замены: $\Psi \to \tilde{\Psi}$ и $W \to \tilde{W}$, либо используя следующие соображения. Из четвертого из соотношений (3.2), аналогично (3.3) имеем:

$$\tilde{v}_0 = v_0 - Y_t. \tag{3.4}$$

С учетом явного выражения для v_0, отсюда находим:

$$\tilde{W}(x,t) = W(x,t)\frac{\Psi}{\Psi + iY} - \frac{Y_{xt}}{\Psi + iY} - i\frac{Y_{xx}}{\Psi + iY}. \tag{3.5}$$

Заметим также, что вещественность потенциала $\tilde{W}$ следует из (3.3).

Теперь для построения явных решений уравнения (2.1) необходимо проинтегрировать систему (2.3). Для этого перепишем ее в виде переопределенной скалярной системы уравнений Риккати для функции y :

$$y_x = -\lambda_1[f_0 y^2 + (u_0 - \bar{u}_0)y - \bar{f}_0],\ y_t = -\lambda_1[p_0 y^2 + (v_0 - \bar{v}_0)y - \bar{p}_0]. \tag{3.6}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что y удовлетворяет линейному уравнению в частных производных: $y_x = w_0 y_t$, которое имеет решение вида $y = R(\xi_1)$, где $R(.)$ – произвольная, вообще говоря, комплекснозначная функция аргумента ξ_1, определенного соотношением (2.8). Для того, чтобы найти эту функцию, рассмотрим первое из уравнений (3.6) при $t = 0$[2]. Для его решения будем считать, что $y = 0$ при $x = -M$ и y – ограниченная функция для всех $x > M$. Воспользуемся произволом в выборе функции f_0. Тогда в простейшем случае интегрируемости следует положить $f_0 = -\bar{f}_0 = c_0 = \bar{c}_0 = \mathrm{const}$. Возвращаясь к переменной ξ_1, для

[2]Как следует из (2.8), этому соответствует выражение

$$\xi_1(x,0) = i\int\limits_{-M}^{x}(u_0(x',0) - \bar{u}_0(x',0))dx.$$

функции y найдем ($\lambda_1 = -\bar{\lambda}_1,\ y(x,\ t) = \bar{y}(x,\ t)$):

$$y(x,t) = y(\xi_1) = \frac{\tan\Theta_1}{\sqrt{2} + \tan\Theta_1},$$

$$\Theta_1 = \Theta_1(\xi_1) = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-M}^{\xi_1} [u_0(x', 0) - \bar{u}_0(x', 0)]dx'. \qquad (3.7)$$

Таким образом, из (3.3) с учетом (3.7) будем иметь:

$$\tilde{\Psi} = \Psi + 2i\frac{[u_0(x,\ 0) - \bar{u}_0(x,\ 0)][u_0(x,\ t) - \bar{u}_0(x,\ t)]}{\cosh^2\Theta_1(\sqrt{2}\tanh\Theta_1 + 1)^2)}(\sqrt{2} + \tanh\Theta_1). \qquad (3.8)$$

Преобразование Дарбу (3.1) может быть многократно повторено, что позволяет получить многократно "одетые" решения (процедура их построения в случае солитонов деформированного магнетика Гейзенберга на основе одевающих соотношений вида (3.2) дана, например, в [10]).

Приведем два простейших примера, иллюстрирующих применение предложенного подхода.

а). Пусть $W(x,t) = 0$, т.е. рассмотрим свободное уравнение $NtSH$, причем в качестве $\Psi = \Psi_1$ возьмем плоскую волну: $\Psi_1 = ae^{ikx - ik^2t}$, где a – амплитуда волны, k – волновое число. Тогда, полагая для простоты $M = 0$, из (2.8) имеем:

$$\xi_1 = -\frac{4a}{k}\sin(kx - k^2t), \qquad (3.9)$$

а выражение для "одетой" волновой функции примет вид:

$$\tilde{\Psi} = ae^{ikx - ik^2t}\big[1 - 2a\frac{\cos kx(1 - e^{-2i(kx - k^2t)})(\tanh\Theta_1 + \sqrt{2})}{\cosh^2\Theta_1(\sqrt{2}\tanh\Theta_1 + 1)^2}\big], \qquad (3.10)$$

где

$$\Theta_1 = \Theta_1(\xi_1) = \frac{i\lambda_1}{\sqrt{2}k}a\sin(\xi_1 x).$$

Этой волновой функции будет отвечать потенциал $W(x,\ t) = \tilde{W}(\xi_1)$, определяемый из (3.5). Отметим здесь появление в спектре возбуждений системы гармоники с "противоположной" фазой.

б). Пусть затравочное решение представляет собой хорошо известную волновую функцию для гармонического осциллятора ($W(x) = (1/4)\omega_0^2 x^2$) (см., например, [11]):

$$\Psi_{1n}(x,t) = c_n e^{-i\omega_0(n+1/2)t} e^{-\frac{\omega_0 x^2}{4}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}x)\right), \tag{3.11}$$

где ω_0 – частота, $H_n(.)$ – полином Эрмита, c_n – вещественная нормировочная постоянная. Полагая $\Psi_{1n}(x,t) = X(x)T(t)$, причем $X = \bar{X}$, согласно (2.8), найдем ($M = \infty$):

$$\xi_1 = -(T+\bar{T})_{|t=0} \int\limits_{-\infty}^{x} X dx - iX_{x|x=-\infty} \times$$

$$\times \int\limits_0^t (T-\bar{T})dt + i\int\limits_0^t (T-\bar{T})dt \int\limits_{-\infty}^{x} WX dx, \tag{3.12}$$

и

$$\Theta_1 = \Theta_1(\xi_1) = -ic_n\lambda_1 \int\limits_{-M}^{\xi_1} e^{-\frac{\omega_0 x^2}{4}} H_n(\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}x)dx, \quad \lambda_1 = -\bar{\lambda}_1.$$

Тогда, из (3.3) находим

$$\tilde{\Psi}_{1n}(x,t) = c_n H_n(\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}x) e^{-\frac{1}{4}\omega_0 x^2} \Bigg[e^{-i\omega_0(n+\frac{1}{2})t} +$$

$$+ \frac{2c_n H_n(\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}x) e^{-\frac{1}{4}\omega_0 x^2} \cos[\omega_0(n+\frac{1}{2})t](\sqrt{2} + \tanh\Theta_1)}{\cosh^2\Phi_1(\sqrt{2}\tanh\Theta_1 + 1)^2)} \Bigg], \tag{3.13}$$

и, следовательно, здесь имеем тот же эффект, что и в предыдущем случае.

В заключение этого раздела рассмотрим связь преобразования Дарбу и теории когерентных состояний. Для этого представим волновую функцию этого состояния, которое определяется как минимизирующее соотношение неопределенности[3], в виде

[3]Когерентные состояния можно иначе определить как собственные состояния неэрмитова оператора уничтожения, тогда величины A_n оказываются связанными с матричными элементами этого оператора.

разложения по волновым функциям гармонического осциллятора:

$$\Psi_{\mathrm{coher}} = \sum_n A_n \Psi_{1n}, \tag{3.14}$$

где Ψ_{1n} определяются выражением (3.11), а A_n – коэффициенты разложения. После однократного применения преобразования Дарбу имеем: $A_n \to \tilde{A}_n$, $\Psi_{1n} \to \tilde{\Psi}_{1n}$ и, кроме того,

$$\sum_n A_n \Psi_{1n} = \sum_n \tilde{A}_n \tilde{\Psi}_{1n}, \tag{3.15}$$

где

$$A_n = \int \Psi_{\mathrm{coher}}(x,t) \bar{\Psi}_{1n}(x,t)\, dx, \tilde{A}_n = \int \Psi_{\mathrm{coher}}(x,t) \bar{\tilde{\Psi}}_{1n}(x,t)\, dx.$$

Тогда с учетом (3.3) получаем связь коэффициентов A_n и $\tilde{A}_n$:

$$\tilde{A}_n = \tilde{A}_n - i \int \Psi_{\mathrm{coher}} \bar{Y}_x \; dx, \tag{3.16}$$

где величина Y определена в (3.3).

4. Заключение

Заметим, что можно также найти и несколько иное представление Лакса для уравнения (2.1), позволяющее изучать теорию рассеяния для оператора ассоциированной линейной задачи. На этой основе удается получить, в частности, "соотношения баланса" (а не законы сохранения, поскольку исходная система, как уже отмечалось, не конервативна), а также построить иерархию "высших" уравнений. Особенно интересно, что уже простейшее из этих уравнений оказывается нелинейным.

В целом, такой подход, по-видимому, может являться основой для (квазиклассического) квантования уравнения $NtSH$ как вполне интегрируемой системы. Эти результаты мы предполагаем изложить позднее.

Автор признателен И. В. Комарову за полезные критические замечания.

Литература

1. В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, ЭЧАЯ **28** (1997), 951.

2. Б. Ф. Самсонов, ЖЭТФ **114** (1998), 1930.
3. И. А. Дынников, С. П. Новиков, УМН **52** (1997), 175.
4. В. Г. Маханьков, Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк, УФН **164** (1994), 121.
5. S. V. Manakov. Physica D. **3** (1981), 420.
6. E. Sh. Gutshabash, M. A. Salle, In: Proceedings of International Seminar "Day on Diffraction-2001", pp. 116–127, St.-Petersburg (2001).
7. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.* — Наука, М. (1971).
8. А. Н. Лезнов, В. И. Манько, М. В. Савельев, В сб. *Солитоны, инстантоны и операторное квантование.* — Труды ФИАН, **165**, Наука, М. (1986).
9. M. A. Salle, V. B. Matveev, *Darboux Transformation and Solitons.* — Springer-Verlag (1991).
10. Е. Ш. Гутшабаш, *Письма в ЖЭТФ.* — **73**, 317 (2001).
11. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике.* Т. 1. – Мир, М. (1974).

Gutshabash E. Sh. Darboux transformation for the nonstationary Schrödinger equation.

A Lax representation for the nonstationary Schrödinger equation with rather arbitrary potential is proposed. Some examples of the construction of exact solutions are given by means of Darboux transformation method.

НИИ Физики Санкт-Петербургского
государственного университета
Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, 198504,
E-mail: gutshab@EG2097.spb.edu