Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

А. В. Китаев

КВАДРАТИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ТРЕТЬЕГО И ПЯТОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

1. Введение

В теории специальных функций изомонодромного типа [1] важная роль принадлежит так называемым RS-преобразованиям [2]. Последние являются композицией рациональных (R) преобразований независимой переменной и преобразований Шлезингера (S) для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), ассоциированных с этими спецфункциями. В большинство интересных приложений, например в дифференциальную геометрию или теорию случайных матриц, изомонодромные спецфункции "проникают" посредством ассоциированных линейных ОДУ, определяя изомонодромные деформации последних. Поэтому реализация даже известных преобразований для уравнений Пенлеве в терминах ассоциированных линейных ОДУ, в частности с помощью RS-преобразований, представляет обычно значительный интерес для приложений, получая в их рамках интересную интерпретацию. В целом применение RS-преобразований даёт эффективный подход к исследованию самых разнообразных вопросов, связанных со спецфункциями изомонодоромного типа [2]. В этой работе мы покажем, как некоторые известные преобразования для третьего:

$$\frac{d^2y_3}{dt_3^2} = \frac{1}{y_3}\left(\frac{dy_3}{dt_3}\right)^2 - \frac{1}{t_3}\frac{dy_3}{dt_3} + \frac{1}{t_3}(\alpha_3 y_3^2 + \beta_3) + \gamma_3 y_3^3 + \frac{\delta_3}{y_3}, \tag{1.1}$$

$y_3 = y_3(t;\alpha_3,\beta_3,\gamma_3,\delta_3)$, и пятого уравнений Пенлеве:

$$\frac{d^2y_5}{dt_5^2} = \left(\frac{1}{y_5} + \frac{1}{y_5-1}\right)\left(\frac{dy_5}{dt_5}\right)^2 - \frac{1}{t_5}\frac{dy_5}{dt_5} + \frac{(y_5-1)^2}{t_5^2}\left(\alpha_5 y_5 + \frac{\beta_5}{y_5}\right)$$
$$+ \gamma_5\frac{y_5}{t_5} + \delta_5\frac{y_5(y_5+1)}{y_5-1}, \quad y_5 = y_5(t_5;\alpha_5,\beta_5,\gamma_5,\delta_5), \tag{1.2}$$

решения которых являются одними из наиболее известных нелинейных специальных функций изомонодромного типа, связаны с

RS-преобразованиями.

Мы называем RS-преобразования квадратичными, если соответствующие R-преобразования являются квадратичными, то есть рациональными функциями второго порядка.

Преобразования уравнений Пенлеве, порождаемые квадратичными RS-преобразованиями, также называются квадратичными.

В этой работе мы строим одно квадратичное RS-преобразование, которое порождает несколько различных квадратичных преобразований для указанных выше уравнений Пенлеве. Два из этих преобразований являются независимыми, одно из них (см. раздел 4 уравнения (4.20) и (4.22)), возможно новое.

Гипергеометрическая функция Гаусса является специальной функцией изомонодромного типа. Квадратичные преобразования для неё были найдены Гауссом и изучались Куммером [3]. Для нелинейного аналога гипергеометрической функции Гаусса – шестого уравнения Пенлеве, квадратичные преобразования с помощью RS-преобразований были найдены автором [4]. Позже другое квадратичное преобразование для шестого уравнения Пенлеве, сопряжённое с первым [4], было, другим способом, найдено Маниным [5][1]. Эти преобразования связаны с RS-преобразованиями фуксовых линейных ОДУ. Здесь мы рассмотрим RS-преобразования линейных ОДУ с существенными особыми точками.

Вполне вероятно, что построенное RS-преобразование наряду с методическим интересом - благодаря ему все известные преобразования для указанных уравнений Пенлеве могут быть получены единообразным методом с помощью подходящих RS-преобразований, имеет также и интересную геометрическую интерпретацию. Я имею ввиду, например, дифференциальную геометрию поверхностей в $\mathbb{R}^3$ [8], в которой линейные ОДУ, ассоциированные с рассматриваемыми здесь уравнениями Пенлеве, приобретают конкретный геометрический смысл, а преобразования Шлезингера интерпретируются как преобразования Бэклунда соответствующих геометрических поверхностей.

Преобразования, рассматривамые в этой работе, нетрудно обобщить на специальные функции изомонодромного типа несколь-

[1] Недавно появилась работа [6] Тсуда, Окамото и Сакаи, в которой даётся обзор квадратичных преобразований для уравнений Пенлеве. См. также приложение к работе [7].

ких переменных, которые называются иерархиями третьго и пятого уравнений Пенлеве. Такое обобщение может служить предметом дальнейших исследований. Эта работа может также служить отправной точкой для другого интересное обощения для специальных функций изомонодромного типа, ассоциированных с ОДУ матричной размерности выше 2.

Результаты, включенные в эту статью, были представлены как часть одной из лекций "О RS-преобразованиях для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений", прочитанной автором в школе "Геометрия пространств модулей и интегрируемые системы" в Отсу (Япония) 29–31 Августа 2001 года, организованной Маса-Хико Саито и Йосуке Ояма.

2. Третье уравнение Пенлеве и изомонодромные деформации

Рассмотрим 2×2 матричное ОДУ:

$$\frac{1}{t_3}\frac{d\Psi_3}{d\lambda_3} = \left(A_3 + \frac{B_3}{t_3\lambda_3} + \frac{C_3}{\lambda_3^2}\right)\Psi_3, \tag{2.1}$$

где матрицы A_3, B_3 и $C_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ и не зависят от переменной λ_3, которая обычно называется спектральным параметром. В этом случае с помощью калибровочного преобразования $\Psi_3 \to G\Psi_3$ с матрицей G независящей от λ_3 матрицу A_3 можно привести к жордановой форме. Без ограничения общности, переопределяя в случае необходимости переменную t_3, можно считать, что жорданова форма матрицы A_3 не зависит от t_3, что мы и будем в дальнейшем предполагать.

Асимптотическое поведение решений уравнения (2.1), а следовательно и определение данных монодромии, существеннно отличается в зависимости от того, какой из следующих трёх случаев рассматривается:

1. $\det A_3 \neq 0$ и $\det C_3 \neq 0$,
2. $\det A_3 = 0$ и $\det C_3 = 0$,
3. $\det A_3 = 0$ и $\det C_3 \neq 0$, или $\det A_3 \neq 0$ и $\det C_3 = 0$.

В силу замены $\lambda_3 \to 1/\lambda_3$ в случае 3 достаточно рассмотреть только первый вариант. Сами данные монодромии в этой работе нам в явном виде не понадобятся, поэтому их определение мы опускаем. Условие независимости данных монодромии от переменной t_3 (условие изомонодромности) легко написать без детального изучения данных монодромии, более того оно записывается универсально (возможно после дополнительного переопределения переменных и калибровочного преобразования) во всех трёх случаях, упомянутых выше, как дополнительное линейное ОДУ на функцию Ψ:

$$\frac{1}{\lambda_3}\frac{d\Psi_3}{dt_3} = \left(A_3 + \frac{(B_3 + \theta_{3,\infty}\sigma_3/2)}{t_3\lambda_3} - \frac{C_3}{\lambda_3^2}\right)\Psi_3, \tag{2.2}$$

где $\theta_{3,\infty} = \mathrm{const}$ – параметр формальной монодромии в бесконечной особой точке, появление которого – дань выбору калибровки, а $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Условие совместности уравнений (2.1) и (2.2) таково:

$$\begin{gathered} \theta_{3,\infty}[\sigma_3, A_3] = 0, \quad \frac{dB_3}{dt_3} = \frac{\theta_{3,\infty}}{2t_3}[\sigma_3, B_3] + 2\left[-t_3C_3, A_3\right], \\ t_3\frac{d(t_3C_3)}{dt_3} = t_3C_3 + \left[-t_3C_3, 2B_3 + \frac{\theta_{3,\infty}}{2}\sigma_3\right], \end{gathered} \tag{2.3}$$

где мы использовали условие $A_3 = \mathrm{const}$, а скобки $[\cdot,\cdot]$ обозначают коммутатор матриц. Система (2.3) имеет первые интегралы:

$$\det C_3 = \mathrm{const}, \quad \operatorname{tr} B_3C_3 = \mathrm{const}, \quad \operatorname{tr} B_3A_3 = \mathrm{const}. \tag{2.4}$$

Кроме того по определению: $\operatorname{tr} A_3 = \operatorname{tr} B_3 = \operatorname{tr} C_3 = 0$ и по условию нормировки A_3 - фиксированная числовая матрица. В каждом из трёх выделенных выше случаев уравнения (2.1) система (2.3) эквивалентна третьему уравнению Пенлеве при соответствующем выборе коэффициентов последнего.

1. Общий случай, полное третье уравнение Пенлеве, параметризация Джимбо и Мива [9]:

$$A_3 = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad t_3C_3 = \begin{pmatrix} z_3 - t_3/2 & -w_3z_3 \\ (z_3 - t_3)/w_3 & -z_3 + t_3/2 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_{3,\infty}}{2} & -y_3w_3z_3 \\ -\frac{1}{w_3}\left((z_3 - t_3)y_3 + \frac{(z_3-t_3)}{z_3}\frac{(\theta_{3,\infty}+\theta_{3,0})}{2} + \frac{\theta_{3,\infty}-\theta_{3,0}}{2}\right) & \frac{\theta_{3,\infty}}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где функции $y_3 = y_3(t_3)$, $z_3 = z_3(t_3)$ и $w_3 = w_3(t_3)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$t_3\frac{dy_3}{dt_3} = 4z_3y_3^2 - 2t_3y_3^2 + (2\theta_{3,\infty} - 1)y_3 + 2t_3, \tag{2.7}$$

$$t_3\frac{dz_3}{dt_3} = -4y_3z_3^2 + (4t_3y_3 - 2\theta_{3,\infty} + 1)z_3 + (\theta_{3,\infty} + \theta_{3,0})t_3, \tag{2.8}$$

$$t_3\frac{d}{dt_3}\ln\, w_3 = -\frac{(\theta_{3,\infty} + \theta_{3,0})t_3}{z_3} - 2t_3y_3 + \theta_{3,\infty}, \tag{2.9}$$

а $\theta_{3,\infty}$ и $\theta_{3,0}$ постоянные интегрирования, имеющие смысл показателей формальной монодромии функции Ψ_3 в особых точках ∞ и 0 уравнения (2.1) соответственно. В случае общего положения: $z_3 \neq 0, t_3/2, t_3$, исключая z_3 из системы (2.7), (2.8) находим, что y_3 является решением третьего уравнения Пенлеве при следующих значениях коэффициентов:

$$\alpha_3 = 4\theta_{3,0}, \quad \beta_3 = 4(1 - \theta_{3,\infty}), \quad \gamma_3 = 4, \quad \delta_3 = -4. \tag{2.10}$$

Для этого же случая существует другая параметризация изомонодромных деформаций уравнения (2.1) решениями пятого уравнения Пенлеве, найденная автором [10], а именно:

$$A_3 = -i\sigma_3, \quad C_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon\frac{1+y_5}{1-y_5} & -\frac{2\sqrt{-y_5}}{1-y_5}e^{i\varphi} \\ -\frac{2\sqrt{-y_5}}{1-y_5}e^{-i\varphi} & -\varepsilon\frac{1+y_5}{1-y_5} \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_{3,\infty}}{2} & -\frac{\varepsilon e^{-i\varphi}}{2\sqrt{-y_5}}\left(-\frac{t_5}{(1-y_5)}\frac{dy_5}{dt_5} + \frac{(\theta_{3,\infty}+\varepsilon\theta_{3,0})}{2} + y_5\frac{(\theta_{3,\infty}-\varepsilon\theta_{3,0})}{2}\right) \\ -\frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{2\sqrt{-y_5}}\left(\frac{t_5}{(1-y_5)}\frac{dy_5}{dt_5} + \frac{(\theta_{3,\infty}+\varepsilon\theta_{3,0})}{2} + y_5\frac{(\theta_{3,\infty}-\varepsilon\theta_{3,0})}{2}\right) & \frac{\theta_{3,\infty}}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\text{где} \quad \varepsilon = \pm 1, \quad t_5 = -t_3^2, \quad \text{а} \quad y_5 = y_5(t_5) \tag{2.13}$$

– решение пятого уравнения Пенлеве (1.2) при следующих значениях коэффициентов:

$$\alpha_5 = \frac{(\theta_{3,\infty} - \varepsilon\theta_{3.0})^2}{8},\ \beta_5 = -\frac{(\theta_{3,\infty} + \varepsilon\theta_{3.0})^2}{8}, \\ \gamma_5 = 4\varepsilon,\ \delta_5 = 0. \tag{2.14}$$

Функция $\varphi = \varphi(t_5)$ определяется из уравнения,

$$t_5\frac{d}{dt_5}\ln\, e^{i\varphi} = \theta_{3,\infty} + \frac{1 - y_5}{4y_5}\left(\theta_{3,\infty} + \theta_{3,0} - (\theta_{3,\infty} - \theta_{3,0})y_5\right). \tag{2.15}$$

Сопоставляя параметризации (2.5), (2.6) и (2.11), (2.12), для этого, в случае последней параметризации, в уравнении (2.1) неоходимо сделать масштабное преобразование аргумента, $t_3 \to t_3/\sqrt{2}$ и спектрального параметра, $\lambda_3 \to i\lambda_3/\sqrt{2}$ получим обратимое преобразование пятого уравнения Пенлеве с коэффициентами (2.14) в третье уравнение Пенлеве с коэффициентами (2.10), означающее фактическую эквивалентность этих уравнений:

$$\frac{z_3}{t_3} - \frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1+y_5}{1-y_5}, \quad \frac{w_3 z_3}{t_3} = \frac{\sqrt{-y_5}}{1-y_5}e^{i\varphi}, \quad 2t_5 = -t_3^2,$$
$$y_3 w_3 z_3 = \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{2\sqrt{-y_5}}\left(\frac{t_5}{(1-y_5)}\frac{dy_5}{dt_5} + \frac{(\theta_{3,\infty}+\varepsilon\theta_{3,0})}{2} + y_5\frac{(\theta_{3,\infty}-\varepsilon\theta_{3,0})}{2}\right).$$

Исключая z_3 из первого уравнения написанной выше системы с помощью уравнения (2.7) и из последних двух уравнений переменные w_3 и z_3, получим формулы, связывающие функции $y_3(t_3)$ и $y_5(t_5)$, которые были найдены ранее В. И. Громаком [11, 12] из других соображений.

Замечание. Если матрицы верхне- ($z_3 = 0$, $\theta_{3,\infty} = -\theta_{3,0}$) или нижне – ($z_3 = t_3$, $\theta_{3,\infty} = +\theta_{3,0}$) треугольные, то изомонодромные деформации параметризуются функциями Бесселя. Если матрица C_3 антидиагональна ($z_3 = t_3/2$), то возникает параметризация в терминах элементарных функций. Эти параметризации нетрудно установить с помощью системы (2.7)–(2.9). Построенное в разделе 4 RS-преобразование также порождает квадратичные преобразования и в этих частных случаях

2. В этом случае $\theta_{3,\infty} = 0$ и общие решения системы (2.3) параметризуются либо в терминах неполного третьего уравнения Пенлеве $\gamma_3 = \delta_3 = 0$ и $\alpha_3\beta_3 \neq 0$, либо в элементарных функциях. Предположим, что матрица C_3 не является антидиагональной. Тогда, чтобы получить явные формулы, введём параметризацию:

$$A_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} f_1 & c_2 \\ f_3 & -f_1 \end{pmatrix},$$
$$t_3 C_3 = \begin{pmatrix} \frac{df_3}{dt_3} & -2\frac{df_1}{dt_3} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{df_3}{dt_3}\right)^2 / \frac{df_1}{dt_3} & -\frac{df_3}{dt_3} \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

где $c_2 \in \mathbb{C}$ - постоянная интегрирования, а определение функций: $f_1 = f_1(t_3)$ и $f_3 = f_3(t_3)$, зависит от того равна ли нулю постоянная c_2. В ситуации общего положения, $c_2 \neq 0$, f_1- общее решение ОДУ

$$\left(t_3 \frac{d^2 f_1}{dt_3^2} - \frac{df_1}{dt_3}\right)^2 = 2\frac{df_1}{dt_3}\left(4t_3\left(\frac{df_1}{dt_3}\right)^2 - 8(f_1 + c_1)\frac{df_1}{dt_3} - c_0 c_2 t_3\right), \tag{2.17}$$

где c_0 и $c_1 \in \mathbb{C}$ постоянные интегрирования, а функция

$$f_3 = \frac{1}{c_2}\left(\frac{t_3}{2}\frac{df_1}{dt_3} - f_1^2 - f_1 - c_1\right).$$

Если $c_2 = 0$, то функция f_1 - общее решение уравнения Риккати,

$$\frac{t_3}{2}\frac{df_1}{dt_3} = f_1^2 + f_1 + c_1, \tag{2.18}$$

после чего f_3 находится интегрированием

$$\frac{d}{dt_3}\left(\frac{f_3}{f_1}\right) = -\frac{c_0 t_3}{8 f_1^2}.$$

Возвращаясь теперь к общему случаю $c_2 \neq 0$, заметим, что уравнение (2.17) имеет специальное однопараметрическое решение,

$$f_1 = \beta t_3^2 - c_1\left(1 + \frac{c_0}{16\beta}\right).$$

Все остальные решения могут быть получены интегрированием третьего уравнения Пенлеве:

$$\frac{df_1}{dt_3} = y_3(t_3), \quad \alpha_3 = 4, \quad \beta_3 = c_0 c_2, \quad \gamma_3 = 0, \quad \delta_3 = 0. \tag{2.19}$$

Для полноты осталось рассмотреть случай, когда матрица C_3 антидиагональна. В этом случае есть две возможности:

$$B_3 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = c_0 t^{-4c_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} f_1 & c_2 \\ 0 & -f_1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2\frac{df_1}{dt_3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ постоянные интегрирования, а функция f_1 удовлетворяет уравнению Риккати (2.18).

3. Изомонодромные деформации уравнения (2.1) в этом случае параметризуется решениями третьего вырожденного уравнения Пенлеве ($\gamma_3 = 0$ и $\delta_3 \neq 0$ либо $\gamma_3 \neq 0$ и $\delta_3 = 0$). Этот случай не возникает в рассматриваемых ниже преобразованиях и мы опускаем соответствующие формулы, отсылая заинтересованного читателя к работе [13].

3. Пятое уравнение Пенлеве и изомонодромные деформации

Хорошо известно, что пятое уравнение Пенлеве связано с изомонодромными деформациями следующего 2×2 матричного ОДУ:

$$\frac{d\Psi_5}{d\lambda_5} = \left(t_5 A_5 + \frac{C_5}{\lambda_5} + \frac{B_5}{\lambda_5 - 1}\right)\Psi_5, \tag{3.1}$$

где матрицы A_5, B_5 и $C_5 \in SL_2(\mathbb{C})$ не зависят от переменной λ_5, которая аналогично λ_3 называется спектральным параметром. Как и в предыдущем разделе мы будем считать, что с помощью подходящего калибровочного преобразования фундаментального решения Ψ_5 матрица A приведена к жордановой форме. Поэтому с точки зрения изомонодромных деформаций здесь возникает два случая: матрица A либо диагональна, либо является 2×2 жордановой клеткой.

Изомонодромные деформации уравнения (3.1) определяются условием его совместности со следующим ОДУ,

$$\frac{d\Psi_5}{dt_5} = \left(\lambda_5 A_5 + \frac{1}{t_5}(B_5 + C_5)\right)\Psi_5,$$

которое имеет вид

$$\frac{d}{dt_5}C_5 = \frac{1}{t_5}[B_5, C_5], \quad \frac{d}{dt_5}B_5 = [A_5, B_5] - \frac{1}{t_5}[B_5, C_5]. \tag{3.2}$$

Система (3.2) имеет следующие первые интегралы:

$$\det B_5 = -\frac{\theta_{5,1}^2}{4}, \quad \det C_5 = -\frac{\theta_{5,0}^2}{4}, \quad \operatorname{tr}((B + C)A) = -\frac{\theta_{5,\infty}}{2}, \tag{3.3}$$

где $\theta_{5,k} \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \infty$ имеют смысл показателей формальной монодромии уравнения (3.1). В доказательстве последнего интеграла (3.3) используется нормировка, т. е. тот факт, что A либо диагональна, либо является жордановой клеткой.

Приведём теперь явные формулы параметризации изомонодромных деформаций для каждой из указанных выше нормировок уравнения (3.1).

1. Общий случай, полное пятое уравнение Пенлеве, параметризация Джимбо и Мива [9].

$$A_5 = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad C_5 = \begin{pmatrix} z_5 + \frac{\theta_{5,0}}{2} & -u_5(z_5 + \theta_{5,0}) \\ \frac{z_5}{u_5} & -z_5 - \frac{\theta_{5,0}}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} -z_5 - \frac{\theta_{5,0}+\theta_{5,\infty}}{2} & u_5 y_5\bigl(z_5 + \frac{\theta_{5,0}-\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}\bigr) \\ -\frac{1}{u_5 y_5}\bigl(z_5 + \frac{\theta_{5,0}+\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}\bigr) & z_5 + \frac{\theta_{5,0}+\theta_{5,\infty}}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Функции $y_5 = y_5(t_5)$, $z_5 = z_5(t_5)$ и $u_5 = u_5(t_5)$ удовлетворяют системе уравнений изомонодромных деформаций:

$$t_5\frac{dy_5}{dt_5} = t_5 y_5 - 2z_5(y_5-1)^2 - (y_5-1)\Bigl(\frac{\theta_{5,0}-\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}y_5 - \frac{3\theta_{5,0}+\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}\Bigr), \tag{3.6}$$

$$t_5\frac{dz_5}{dt_5} = y_5 z_5\bigl(z_5 + \frac{\theta_{5,0}-\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}\bigr) - \frac{1}{y_5}(z_5+\theta_{5,0})\bigl(z_5 + \frac{\theta_{5,0}+\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}\bigr), \tag{3.7}$$

$$t_5\frac{d}{dt_5}\ln u_5 = -2z_5 - \theta_{5,0} + y_5\bigl(z_5 + \frac{\theta_{5,0}-\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}\bigr) + \frac{1}{y_5}\bigl(z_5 + \frac{\theta_{5,0}+\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty}}{2}\bigr). \tag{3.8}$$

Существует несколько вырожденных случаев системы (3.6)–(3.8): 1) $C_5 \equiv 0$: $z_5 \equiv 0$ и $\theta_{5,0} = 0$,

2) $B_5 \equiv 0$: $z_5 + \frac{1}{2}(\theta_{5,0}+\theta_{5,\infty}) \equiv 0$ и $\theta_{5,1} = 0$,

3) нижнетреугольные матрицы B_5 и C_5: $z_5+\theta_{5,0} \equiv 0$ и $\theta_{5,0}+\theta_{5,1} = \theta_{5,\infty}$,

4) верхнетреугольные матрицы B_5 и C_5: $z_5 \equiv 0$ и $\theta_{5,0}+\theta_{5,1}+\theta_{5,\infty} = 0$. В этих случаях уравнение (3.7) выполнено тождественно, а уравнение (3.6) для функции y_5 сводится к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции.

В невырожденном случае функция y_5 является решением пятого уравнения Пенлеве (1.2) при следующих значениях параметров:

$$\alpha_5 = \frac{(\theta_{5,0} - \theta_{5,1} + \theta_{5,\infty})^2}{8}, \ \beta_5 = -\frac{(\theta_{5,0} - \theta_{5,1} - \theta_{5,\infty})^2}{8},$$
$$\gamma_5 = 1 - \theta_{5,0} - \theta_{5,1}, \ \delta_5 = -\frac{1}{2}. \tag{3.9}$$

2. Рассмотрим теперь вырожденный случай, $\det A_5 = 0$. Введём обозначения:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Интерес представляет общий случай решения системы (3.2), а именно, $a_2 \not\equiv 0$. В этом случае изомонодромные деформации уравнения (3.1) параметризуются решениями вырожденного пятого уравнения Пенлеве (1.2) с $\delta_5 = 0$. Если $a_2 = 0$, то система (3.2) легко решается. В “треугольном” случае $a_2 = b_2 = 0$ решение пишется в элементарных функциях, а в “нетреугольном” случае, $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$:

$$B_5 = \pm\frac{\theta_{5,1}}{2}\sigma_3 - \frac{\theta_{5,\infty}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \pm\frac{\theta_{5,0}}{2}\sigma_3.$$

Итак, предположим, что $a_2 \not\equiv 0$. Пусть $y_5(t_5)$ любое решение пятого уравнения Пенлеве с коэффициентами:

$$\alpha_5 = \frac{\theta_{5,0}^2}{8}, \quad \beta_5 = -\frac{\theta_{5,1}^2}{8}, \quad \gamma_5 = \theta_{5,\infty}, \quad \delta_5 = 0. \tag{3.11}$$

Положим:

$$a_2 = \frac{\theta_{5,\infty}}{2(y_5 - 1)}, \tag{3.12}$$

тогда a_1 находится как решение ОДУ:

$$\frac{d}{dt_5}\left(t_5\frac{d}{dt_5}\ln a_2\right) = \theta_{5,\infty}\frac{d}{dt_5}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + 2a_2 + \theta_{5,\infty}, \tag{3.13}$$

а остальные элементы матриц B_5 и C_5 определяются фомулами:

$$a_3 = \frac{1}{a_2}\left(\frac{\theta_{5,0}^2}{4} - a_1^2\right), \quad b_1 = \frac{t_5}{2}\frac{d}{dt_5}\ln a_2 - a_1\left(1 + \frac{\theta_{5,\infty}}{2a_2}\right), \tag{3.14}$$

$$b_2 = -a_2 - \frac{\theta_{5,\infty}}{2}, \quad b_3 = -\frac{t_5}{a_2}\frac{d}{dt_5}a_1 - a_3\left(1 + \frac{\theta_{5,\infty}}{2a_2}\right). \tag{3.15}$$

4. Квадратичные преобразования

В уравнении (3.1) положим:

$$\theta_{5,0} = \theta_{5,1} = \frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

Рациональное преобразование имеет тип $R_2(3) = R(2|2|1+1)$ согласно обозначениям принятым в работе [2]. Это означает, что степень рацинальной функции равна 2, точки 0 и 1 имеют по одному прообразу кратости 2, а прообраз ∞ состоит из двух точек. Этими условиями R-преобразование определяется однозначно:

$$\lambda_5 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\lambda_3} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^2, \quad \lambda_5 - 1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\lambda_3} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^2. \tag{4.2}$$

Преобразование Шлезингера имеет вид:

$$\Psi_5(t_5, \lambda_5) = (J_1\xi + J_2/\xi)\,\Psi_3(t_3, \lambda_3), \quad \xi = \sqrt{\frac{\lambda_3 + 1}{\lambda_3 - 1}}, \tag{4.3}$$

где 2×2 проекторы J_1 и J_2 однозначно определяются уравнениями:

$$J_1^2 = J_1, \quad J_2^2 = J_2, \quad J_1 + J_2 = I, \quad 4B_5J_1 + J_1 = 0, \quad 4C_5J_2 + J_2 = 0. \tag{4.4}$$

Так как в разделе 3 мы рассматривали две различные параметризации матриц B_5 и C_5, то, чтобы написать явные формулы для проекторов, удобно воспользоваться обозначениями (3.10), применяя их в более общем контексте – не только для жордановой формы матрицы A_5, но и в случае, когда она диагональна:

$$J_1 = \frac{\begin{pmatrix} -4b_2(1+4c_1) & -16b_2c2 \\ (1+4b_2)(1+4c_1) & 4c_2(1+4b_1) \end{pmatrix}}{4c_2(1+4b_1) - 4b_2(1+4c_1)},$$

$$J_2 = \sigma_2 J_1^T \sigma_2, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

где T обозначает транспозицию матрицы. Следовательно, матрица J_2 – формально обратная к J_1, что, в данном случае, означает ортогональность $J_1J_2 = J_2J_1 = 0$.

Таким образом преобразование (4.3) полностью определено и ниже мы рассмотрим его следствия для параметризаций, введенных в разделах 2 и 3.

1. Рассматриваем сначала параметризацию (3.4), (3.5). Преобразование (4.3) порождает параметризацию матриц B_3 и C_3 уравнения (2.1) решениями системы (3.6)–(3.8):

$$B_3=\begin{pmatrix} -\frac{\theta_{5,\infty}}{2} & \frac{u_5(2z_5(y_5-1)^2+(\theta_{5,\infty}y_5-1)(y_5-1)-t_5y_5)}{2(y_5-1)^2} \\ \frac{2z_5(y_5-1)^2-(\theta_{5,\infty}+1)(y_5-1)-t_5y_5}{2u_5y_5(y_5-1)} & \frac{\theta_{5,\infty}}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$C_3=\begin{pmatrix} -\frac{4y_5}{(y_5-1)^2}-\frac{1}{2} & \frac{2u_5y_5(y_5+1)}{(y_5-1)^2} \\ -\frac{2(y_5+1)}{u_5(y_5-1)^2} & \frac{4y_5}{(y_5-1)^2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3=\frac{1}{2}\sigma_3, \quad t_5=4t_3. \tag{4.6}$$

Сопоставляя эту параметризацию с параметризацией (2.5), (2.6) получаем квадратичное преобразование пятого уравнения Пенлеве в третье:

$$z_3(t_3)=-\frac{t_5y_5}{(y_5-1)^2},\ w_3(t_3)=\frac{y_5+1}{2}u_5, \\ t_3=t_5/4,\ \theta_{3,0}=\theta_{3,\infty}=\theta_{5,\infty}, \tag{4.7}$$

$$y_3(t_3)=\frac{y_5-1}{t_5y_5(y_5+1)}(2z_5(y_5-1)^2+(\theta_{5,\infty}y_5-1)(y_5-1)-t_5y_5). \tag{4.8}$$

В этих формулах $y_5(t_5)$, $z_5(t_5)$, $u_5(t_5)$ – решение системы (3.6)–(3.8), с коэффициентами $\theta_{5,0}$ и $\theta_{5,1}$, определенными уравнением (4.1) и произвольным $\theta_{5,\infty}\in\mathbb{C}$. В частности, $y_5(t_5)$ – решение пятого уравнения Пенлеве (1.2) с коэффициентами:

$$\alpha_5=\frac{\theta_{5,\infty}^2}{8}, \quad \beta_5=-\frac{\theta_{5,\infty}^2}{8}, \quad \gamma_5=0, \quad \delta_5=-\frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Тройка функций $y_3(t_3)$, $z_3(t_3)$ и $w_3(t_3)$ является решением системы (2.7)–(2.9) с коэффициентами $\theta_{3,0}=\theta_{3,\infty}=\theta_{5,\infty}$, в частности, $y_3(t_3)$ решает третье уравнение Пенлеве (1.1) с коэффициентами:

$$\alpha_3=4\theta_{5,\infty}, \quad \beta_3=4(1-\theta_{5,\infty}), \quad \gamma_3=4, \quad \delta_3=-4.$$

Уравнения (4.7) и (4.8) легко обратить, однако, в силу первого уравнения (4.7), это обращение двузначно. Соответствующие решения пятого уравнения Пенлеве, связаны преобразованием $y_5\to 1/y_5$.

В этом же случае мы можем сравнить параметризацию (4.5), (4.6) с параметризацией (2.11)–(2.14)[2], что позволяет получить квадратичное преобразование, связывающее вырожденное пятое уравнение Пенлеве ($\delta_5 = 0$) с невырожденным ($\delta_5 \neq 0$):

$$\varepsilon = 1, \quad \hat{y}_5(\hat{t}_5) = \frac{(y_5+1)^2}{4y_5}, \quad e^{i\varphi(\hat{t}_5)} = \sqrt{-y_5(t_5)}\,u_5(t_5), \tag{4.10}$$

$$\hat{t}_5 = -\frac{t_5^2}{32}, \quad \theta_{3,\infty} = -\theta_{3,0} = \theta_{5,\infty}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\hat{t}_5}{1-\hat{y}_5}\frac{d\hat{y}_5}{d\hat{t}_5} = \left(z_5 + \frac{\theta_{5,\infty}}{4}\right)\left(y_5 - \frac{1}{y_5}\right) - \frac{t_5}{2}\frac{(y_5+1)}{(y_5-1)} - \frac{y_5+1}{2y_5}, \tag{4.12}$$

где: $\varphi(\hat{t}_5)$, $\theta_{3,0}$ и $\theta_{3,\infty}$ удовлетворяют уравнению (2.15) при $t_5 = \hat{t}_5$, а функция $\hat{y}_5(\hat{t}_5)$ решает вырожденное пятое уравнение Пенлеве с коэффициентами:

$$\hat{\alpha}_5 = \frac{\theta_{5,\infty}^2}{2}, \quad \hat{\beta}_5 = 0, \quad \hat{\gamma}_5 = 4, \quad \hat{\delta}_5 = 0, \tag{4.13}$$

а переменные: $y_5(t_5)$, $z_5(t_5)$, $u_5(t_5)$, t_5 и $\theta_{5,\infty}$ относятся к системе (3.6)–(3.8) и, в частности, функция $y_5(t_5)$ решает невырожденное пятое уравнение Пенлеве с коэффициентами:

$$\alpha_5 = \frac{\theta_{5,\infty}^2}{8}, \quad \beta_5 = -\frac{\theta_{5,\infty}^2}{8}, \quad \gamma_5 = 0, \quad \delta_5 = -\frac{1}{2}. \tag{4.14}$$

Случай $\varepsilon = -1$ в параметризации (2.11)–(2.13) эквивалентен композиции указанного выше преобразования при $\varepsilon = 1$ с преобразованием $\hat{y}_5 \to 1/\hat{y}_5$. В случае $\theta_{5,\infty} = 0$, преобразование, определенное вторым уравнением в (4.10), было найдено В. И. Громаком [12], тот факт, что оно справедливо при любом $\theta_{5,\infty}$, был указан в работе [14].

2. Теперь рассмотрим вырожденный случай (3.10). В этом случае преобразование (4.3) порождает параметризацию матриц

[2] Для этого в уравнении (2.1), в случае последней параметризации, необходимо сделать масштабное преобразование переменных λ_3 и t_3, как это объясняется в разделе 2.

B_3 и C_3 решениями системы (3.12)–(3.15):

$$A_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} -2a_2b_2\frac{\kappa_1}{\kappa_2^2} & -\left(\frac{4a_2b_2}{\kappa_2}\right)^2 \\ \left(\frac{\kappa_1}{2\kappa_2}\right)^2 & 2a_2b_2\frac{\kappa_1}{\kappa_2^2} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 - \frac{2t_5a_2b_2}{\kappa_2} & -\frac{\theta_{5,\infty}}{2} \\ a_3 + b_3 + \frac{t_5\kappa_1}{2\kappa_2} & -a_1 - b_1 + \frac{2t_5a_2b_2}{\kappa_2} \end{pmatrix}, \quad t_3 = t_5, \tag{4.16}$$

где

$$\kappa_1 = a_2 + b_2 + 4a_2b_1 + 4a_1b_2,$$
$$\kappa_2 = -a_2 + b_2 - 4a_2b_1 + 4a_1b_2,$$

а функции: $a_k = a_k(t_5)$, $b_k = b_k(t_5)$, $k = 1, 2, 3$, в общем случае $a_2(t_5) \not\equiv 0$ параметризуются решениями вырожденного пятого уравнения Пенлеве с коэффициентами (3.11) с помощью системы (3.12)–(3.15).

Для сопоставления параметризации (4.15), (4.16), уравнения (2.1) с его параметризацией неполным третьим уравнением Пенлеве (2.16) следует учесть, что последняя инвариантна относительно следующих масштабных преобразований:

1. $\lambda_3 \to c\lambda_3$, $t_3 \to t_3/c$, $\Psi_3 \to \Psi_3$, $f_1 \to f_1$, $f_3 \to f_3$, $c_2 \to c_2$, где параметр $c \neq 0$. Это означает, что матрицы B_3 в обеих параметризациях совпадают, а матрицы C_3 совпадают с точностью до множителя $1/c^2$, на который надо умножить матрицу C_3, определенную в (4.15).
2. $\lambda_3 \to r\lambda_3$, $\Psi_3 \to r^{-\sigma_3/2}\Psi_3$, $t_3 \to t_3$, $f_1 \to f_1$, $f_3 \to f_3/r$, $c_2 \to rc_2$.

   Это преобразование означает, что в случае, когда изомонодромные деформации определяются третьим уравнением Пенлеве ($c_2 \neq 0$), мы, без ограничения общности, можем положить

$$c_2 = -\theta_{5,\infty}/2 = -1/2. \tag{4.17}$$

Здесь первое уравнение возникает в результате приравнивания $\{1, 2\}$ элементов матрицы B_3 в обсуждаемых параметризациях.

Сопоставляя теперь элементы $\{2, 1\}$ матрицы C_3 и элементы $\{1, 1\}$ матрицы B_3 для двух имеющихся параметризаций, с учетом масштабных преобразований, указанных выше, получаем соответственно:

$$-\frac{2}{t_3}\frac{df_1}{dt_3} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{4a_2b_2}{\kappa_2}\right)^2, \quad t_3 = ct_5, \tag{4.18}$$

$$a_1 + b_1 - 2t_5\frac{a_2b_2}{\kappa_2} = f_1, \tag{4.19}$$

где предпологается, что параметры c_2 и $\theta_{5,\infty}$ фиксированы согласно уравнению (4.17). Уравнение (4.18), с учетом обозначений (2.19) и (3.12), переписывается как квадратичное преобразование

$$y_3(t_3) = \frac{2t_5}{c}\left(2t_5\frac{d}{dt_5}(\ln y_5(t_5)) + \frac{1}{y_5(t_5)} - y_5(t_5)\right)^{-2}, \quad t_3 = ct_5, \tag{4.20}$$

пятого уравнения Пенлеве с коэффициентами:

$$\alpha_5 = \frac{1}{32}, \quad \beta_5 = -\frac{1}{32}, \quad \gamma_5 = 1, \quad \delta_5 = 0 \tag{4.21}$$

в третье уравнение Пенлеве с коэффициентами:

$$\alpha_3 = 4, \quad \beta_3 = c_0, \quad \gamma_3 = 0, \quad \delta_3 = 0.$$

Постоянная c пропорциональна $1/\sqrt{-c_0}$ – числовой коэффициент можно определить непосредственной подстановкой в третье уравнение Пенлеве. Подставляя в уравнение (4.19) a_2b_2/κ_2, найденное из уравнения (4.18), далее дифференцируя по переменной t_3 с учетом уравнения (3.13), получаем обращение преобразования (4.20):

$$y_5(t_5) = \frac{2c\left(y_3 - \frac{d}{dt_3}\sqrt{t_3y_3/2}\right)}{2c\left(y_3 - \frac{d}{dt_3}\sqrt{t_3y_3/2}\right) - 1}, \quad t_5 = t_3/c. \tag{4.22}$$

Так как пятое уравнение Пенлеве с коэффициентами (4.21), как указывалось в разделе 2, эквивалентно третьему уравнению Пенлеве, то последнее полученное квадратичное преобразование можно переписать как квадратичное преобразование третьего уравнения Пенлеве в себя. В такой форме оно, видимо, будет эквивалентно квадратичному преобразованию для третьего уравнения Пенлеве, полученному недавно из других соображений в работах [15, 6].

Литература

1. A. V. Kitaev, *Special Functions of the Isomonodromy Type.* — Acta Appl. Math. **64**, No. 1 (2000), 1–32.
2. А. В. Китаев, *Специальные функции изомонодромного типа, рациональные преобразования спектрального параметра и алгебраические решения шестого уравнения Пенлеве.* — Алгебра и Анализ **14**, No. 3 (2002), 121–139.
3. G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **71**, Cambridge: Cambridge Univ. Press (1999).
4. A. V. Kitaev, *Quadratic transformations for the sixth Painlevé equation.* — Lett. Math. Phys. **21** (1991), 105–111.
5. Yu. I. Manin, *Sixth Painlevé equations, universal elliptic curve, and mirror of* $\mathbb{P}^2$*.* — In: Geometry of Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **186** Providence, RI, 131–151 (1998).
6. T. Tsuda, K. Okamoto, and H. Sakai, *Folding transformations of the Painlevé equations.* — University of Tokyo, Preprint UTMS 2003-42, 1–25 (2003).
7. A. V. Kitaev, *Grothendieck's Dessins d'Enfants, Their Deformations and Algebraic Solutions of the Sixth Painlevé and Gauss Hypergeometric Equations.* — Algebra Analiz **17**, No.1 (2005), 224–273.
8. A. I. Bobenko and U. Eitner, *Painlevé Equations in the Differential Geometry of Surfaces.* — Lect. Notes Math. **1753** (2000).
9. M. Jimbo and T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II.* — *Physica* **2D** (1981), 407–448.
10. А. В. Китаев, *Метод изомонодромных деформаций и асимптотики решений "полного" третьего уравнения Пенлеве.* — Матем. сборник **134**, No. 3 (1987), 421–444.
11. В. И. Громак, *О приводимости уравнений Пенлеве.* — Дифференц. уравнения **11**, No. 2 (1975), 373–376.
12. В. И. Громак, *К теории уравнений Пенлеве.* — Дифференц. уравнения **20**, No. 10 (1984), 1674–1683.
13. A. V. Kitaev and A. H. Vartanian, *Connection formulae for asymptotics of solutions of the degenerate third Painlevé equation. I.* — Inverse Problems **20**, No. 4 (2004), 1165–1206.
14. Л. А. Бордаг и А. В. Китаев, *Преобразование решений третьего и пятого уравнений Пенлеве и их частные решения.* — Сообщения ОИЯИ, Дубна: P5-85-740 (1985), 1–17.
15. N. S. Witte, *New transformations for Painlevé's third transcendent.* — Proc. Amer. Math. Soc. **132**, No. 6 (2004), 1649–1658.

Kitaev A. V. Quadratic transformations for the third and fifth Painlevé equations.

Quadratic transformations for the third and fifth Painlevé equations are constructed via the method of RS-transformations. This method can be viewed as a prolongation of the quadratic transformations for the

Painlevé equations to the associated linear ODEs, whose isomonodromy deformations are governed by the corresponding Painlevé equations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
School of Mathematics and Statistics,
University of Sydney,
AUSTRALIA

Поступило 26 июня 2004 г.