Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

А. Б. Хасанов, Г. У. Уразбоев

РЕШЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КДФ В КЛАССЕ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В 1967 году Гарднер, Грин, Крускал, Миура (ГГКМ) [1] предложили метод обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля как метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Вскоре после этого Лакс [2] указал на общий характер этого метода. Несколько лет спустя, Захаров и Шабат [3] путем нетривиального распространения методов ГГМК и Лакса смогли решить задачу Коши для другого важного нелинейного эволюционного уравнения – так называемого нелинейного уравнения Шредингера. Тем самым был открыт путь для построения некоторых других классов уравнений, решаемых этими методами. Подробному изложению связей обратной задачи с нелинейными уравнениями математической физики посвящены, например, книги [4–8].

В работе [9] была установлена важная роль, которую играют квадраты собственных функций в задачах на собственные значения для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Ньюэлл [7] показал, что именно квадраты собственных функций, а не сами собственные функции, существенны при интегрировании с помощью метода обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля. Строгое доказательство этого факта приведено в книге [8].

В работах [10–12] были рассмотрены уравнения КдФ с самосогласованным источником, где в частности, были получены законы эволюции данных рассеяния. Оказалось, что в общем случае в уравнениях КдФ с правой частью дискретные собственные значения рассматриваемой задачи не инвариантны по t. Эта ситуация возникает в задачах, для которых полюс дисперсионного соотношения [7] совпадает с одним из значений дискретного спектра, при этом соответствующий солитон по-прежнему сохраняет свою индивидуальность, но теперь это изменяющаяся индивидуальность.

В работе [13] с помощью метода обратной задачи рассеяния была решена задача Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа "ступеньки" и построено асимптотическое решение при $t \to \infty$ в окрестности переднего фронта. Эта задача впервые рассматривалась в работе [14], где приближенным методом Уизема было построено асимптотическое решение, выраженное через эллиптические функции Якоби с медленно меняющимися параметрами.

В работах [15, 16] были проинтегрированы уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе начальных данных типа "ступеньки", в частности, были выведены законы эволюции данных рассеяния.

Пусть

$$L(t) = -D^2 + u, \quad H = -\frac{1}{2}D^3 + 2uD + u',$$

где $u = u(x,t)$, $D = \frac{d}{dx}$. Согласно [17] существуют полиномы P_k (от u и производных u по x) такие, что $H_x P_k = P'_{k+1}$.

Так, например,

$$P_0 = -\frac{1}{2}, \quad P_1 = -\frac{1}{2}u, \quad P_2 = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{3}{4}u^2,$$

$$P_3 = -\frac{1}{8}u_{xxxx} + \frac{5}{4}uu_{xx} + \frac{5}{8}(u_x)^2 - \frac{5}{4}u^3$$

и т.д. Оператор (см. [17])

$$B_q = \sum_{k=0}^{q}\left(\frac{1}{2}P'_k - P_k\frac{d}{dx}\right)(2L)^{q-k} \tag{1.1}$$

удовлетворяет соотношению Лакса

$$[B_q, L] \equiv B_q L - LB_q \equiv -P'_{k+1}. \tag{1.2}$$

Обозначим через $c_0, c_1, \ldots, c_p$ произвольные действительные числа и введем обозначения

$$X_q = -P'_{q+1}, \quad Y_p = \sum_{q=0}^{p} c_q B_q, \quad Z_p = \sum_{q=0}^{p} c_q X_q.$$

Согласно (1.2),

$$[Y_p, L] = Z_p. \tag{1.3}$$

Уравнение

$$u_t = Z_p(u) \tag{1.4}$$

называется общим уравнением КдФ.

В частности, при $p = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 4$ мы получаем классическое уравнение КдФ.

В монографии [17] показано, что "быстроубывающие" по x решения уравнения (1.4) могут быть найдены с помощью метода обратной задачи рассеяния.

В настоящей работе мы покажем, что ступенчатые решения, т.е. решения, обладающие требуемой гладкостью и удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{0} (1-x)|u(x,t)|dx + \int_{0}^{\infty} (1+x)|u(x,t)-c^2|dx+$$
$$+\sum_{k=1}^{2p+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right| dx < \infty, \quad (c>0) \tag{1.5}$$

общего уравнения КдФ (1.4) и общего уравнения КдФ с правой частью могут быть найдены методом обратной задачи рассеяния. В этих задачах простой непрерывный спектр оператора Штурма–Лиувилля, заполняющий интервал $(0; c^2)$, является причиной возникновения бесконечного числа невзаимодействующих солитонов в окрестности переднего фронта при $t \to \infty$.

Приведем сначала необходимые для дальнейшего сведения, касающиеся прямой и обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля с потенциалом ступенчатого вида.

2. Задача рассеяния

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля на всей оси ($x \in R^1$)

$$Ly \equiv -y'' + u(x)y = k^2 y, \tag{2.1}$$

с вещественным, локально суммируемым потенциалом $u(x)$, имеющим разные пределы на бесконечностях

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = c^2 \quad (c>0). \tag{2.2}$$

Будем полагать, что $u(x)$ достаточно быстро стремится к своим пределам, так что

$$\int_{-\infty}^{0}(1-x)|u(x)|dx<\infty, \quad \int_{0}^{\infty}(1+x)|u(x)-c^2|dx<\infty. \tag{2.3}$$

Задача рассеяния для уравнения (2.1) при условии (2.3) рассматривалась в работах [13, 18, 19].

Положим $\ell=\sqrt{k^2-c^2}$ выбирая ветвь корня в плоскости с разрезом $[-c,c]$ такую, что $\operatorname{Im}\ell>0$ при $\operatorname{Im}k>0$ и $\operatorname{sign}\ell=\operatorname{sign}k$ при действительных k и $|k|>c$.

Обозначим через $f^+(x,k)$ и $f^-(x,k)$ решения Йоста для уравнения (2.1) с асимптотиками

$$\begin{gathered}\lim_{x\to\infty} f^+(x,k)\exp(-i\ell x)=1, \quad (\operatorname{Im}\ell\geqslant 0),\\ \lim_{x\to-\infty} f^-(x,k)\exp(ikx)=1, \quad (\operatorname{Im}k\geqslant 0).\end{gathered} \tag{2.4}$$

При условии (2.3) такие решения существуют, единственны и являются регулярными функциями ℓ и k при $\operatorname{Im}\ell>0$ и $\operatorname{Im}k>0$, соответственно. Для них справедливы представления с помощью операторов преобразования:

$$\begin{gathered}f^+(x,k)=\exp(i\ell x)+\int_x^{\infty}A_1(x,z)\exp(i\ell z)dz,\\ f^-(x,k)=\exp(-ikx)+\int_{-\infty}^{x}A_2(x,z)\exp(-ikz)dz.\end{gathered} \tag{2.5}$$

В этих представлениях ядра $A_1(x,z)$ и $A_2(x,z)$ – вещественные функции, связанные с потенциалом $u(x)$ равенствами

$$u(x)=2\frac{dA_2(x,x)}{dx}, \quad u(x)=c^2-2\frac{dA_1(x,x)}{dx}. \tag{2.6}$$

При вещественных $k\neq 0$ функции $f^-(x,-k)=\overline{f^-(x,k)}$ и $f^+(x,-k)=\overline{f^+(x,k)}$ $(\operatorname{Im}f^+(x,k)=0$ при $|k|\leqslant c)$ также являются решениями (2.1), т.е. пары функций $\{f^+(x,k),f^+(x,-k)\}$ и

$\{f^-(x,k), f^-(x,-k)\}$ являются парами линейно независимых решений уравнения (2.1), поэтому

$$f^+(x,k) = C_{11}(k)f^-(x,k) + C_{12}(k)f^-(x,-k), \quad (|k| > 0), \tag{2.7}$$

$$f^-(x,k) = C_{22}(k)f^+(x,k) + C_{21}(k)f^+(x,-k), \quad (|k| > c), \tag{2.8}$$

Согласно (2,7) и (2.8),

$$C_{11}(k) = \frac{1}{2ik}W\{f^+(x,k), f^-(x,-k)\}, \quad (k \neq 0) \tag{2.9}$$
$$C_{12}(k) = \frac{1}{2ik}W\{f^-(x,k), f^+(x,k)\},$$

$$\begin{aligned} C_{22}(k) &= -\frac{1}{2i\ell}W\{f^-(x,k), f^+(x,-k)\}, \quad (k > c) \\ C_{21}(k) &= -\frac{1}{2i\ell}W\{f^+(x,k), f^-(x,k)\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

С помошью (2.10), коэффициенты $C_{22}(k)$ и $C_{21}(k)$ можно доопределить и при $|k| \leqslant c$. При действительных k

$$C_{ij}(-k) = \overline{C_{ij}(k)}, \ kC_{12}(k) = \ell C_{21}(k), \ -kC_{11}(-k) = \ell C_{22}(k), \tag{2.11}$$

при $|k| \leqslant c$

$$C_{11}(k) = \overline{C_{12}(k)}, \quad C_{22}(k) = -C_{21}(k). \tag{2.12}$$

Положим

$$\begin{aligned} S_{11}(k) &= \frac{1}{C_{21}(k)}, \quad S_{12}(k) = \frac{C_{22}(k)}{C_{21}(k)}, \\ S_{21}(k) &= \frac{C_{11}(k)}{C_{12}(k)}, \quad S_{22}(k) = \frac{1}{C_{12}(k)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Будем предполагать, что $f^+(x,k)$ и $f^-(x,k)$ при $k = 0$ линейно независимы.

Коэффициенты $S_{ij}(k)$ являются непрерывными функциями k $(-\infty < k < \infty)$. $S_{11}(k)$ и $S_{22}(k)$ являются предельными значениями функций, мероморфных в верхней полуплоскости с простыми полюсами в точках $k_n = i\chi_n$, $(\chi_n > 0)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, причем $\lambda_n = -\chi_n^2$ является собственным значением оператора L. Заметим также, что $S_{22}(0) = 0$. При выполнении условия (2.3), существуют решения $\psi_1(x,k)$ и $\psi_2(x,k)$ уравнения (2.1) с асимптотиками

$$\psi_1(x,k) \sim \begin{cases} e^{ikx} + S_{21}(k)\, e^{-ikx}, & x \to -\infty, \\ S_{22}(k)\, e^{i\ell x}, & x \to \infty, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\psi_2(x,k) \sim \begin{cases} S_{11}(k)\, e^{-ikx}, & x \to -\infty, \\ e^{-i\ell x} + S_{12}(k)\, e^{i\ell x}, & x \to \infty, \quad (|k| > c). \end{cases} \tag{2.15}$$

Матрица $\left\| S_{ij} \right\|_{i,j=1,2}$ называется S-матрицей уравнения (2.1). S-матрицу можно восстановить по элементу $S_{21}(k)$ и полюсам $S_{22}(k)$ с помощью следующих формул

$$|S_{22}(k)| = \sqrt{(1 - |S_{21}(k)|^2 \frac{k}{\ell}} \quad \text{при} \quad |k| > c, \tag{2.16}$$

$$\arg S_{22}(k) = \frac{1}{2} \arg S_{21}(k) \quad \text{при} \quad |k| \leqslant c. \tag{2.17}$$

Рассмотрим функцию

$$W(k) = \frac{i}{\sqrt{k^2 - c^2}} \ln \left[\prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\chi_n}{k + i\chi_n} S_{22}(k) \right].$$

Тогда при $\operatorname{Im} k > 0$, по теореме Коши,

$$W(k) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} W(k')}{k' - k}\, dk',$$

где

$$\operatorname{Im} W(k') = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k'^2 - c^2}} \ln |S_{22}(k')|, & |k'| > c, \\ \dfrac{1}{\sqrt{c^2 - k'^2}} \left[\arg S_{22}(k') + \sum\limits_{n=1}^{N} 2 \arg(k' - i\chi_n) \right], & |k'| \leqslant c. \end{cases} \tag{2.18}$$

Окончательно, имеем

$$\begin{gathered} W(k) = \lim_{\varepsilon \to +0} W(k + i\varepsilon), \\ S_{22}(k) = \prod_{n=1}^{N} \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n} \exp\left\{ \frac{\sqrt{k^2 - c^2}}{i} W(k) \right\}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Остальные элементы S-матрицы определяются по формулам

$$S_{ij}(-k)=\overline{S_{ij}(k)},\quad \ell S_{22}(k)=kS_{11}(k),$$
$$\sqrt{\frac{k}{\ell}}\,S_{11}(k)S_{21}(-k)+\sqrt{\frac{\ell}{k}}\,S_{12}(k)S_{22}(-k)=0.$$

Согласно (2.9),

$$f^-(x,i\chi_n)=B_nf^+(x,i\chi_n). \tag{2.20}$$

Элементы S-матрицы позволяют определить потенциал $u(x)$ уравнения (2.1).

Пусть

$$m_n^\pm=\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^\pm(x,i\chi_n)^2dx\Big)^{-1},\quad n=1,2,\ldots,N,$$
$$\Omega_1(x)=\sum_{n=1}^{N}m_n^+\,e^{-\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,x}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{12}(k)\,e^{i\ell x}\,d\ell+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{c}|S_{22}(k)|^2\,e^{-\sqrt{c^2-k^2}\,x}\,dk,$$
$$\Omega_2(x)=\sum_{n=1}^{N}m_n^-\,e^{\chi_nx}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{21}(k)\,e^{-ikx}\,dk.$$

Ядра $A_1(x,y)$ и $A_2(x,y)$ являются решениями интегральных уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко

$$A_1(x,y)+\Omega_1(x+y)+\int\limits_{x}^{\infty}\Omega_1(z+y)A_1(x,z)dz=0\quad(y>x),$$
$$A_2(x,y)+\Omega_2(x+y)+\int\limits_{-\infty}^{x}\Omega_2(z+y)A_2(x,z)dz=0\quad(x>y).$$

Теперь потенциал $u(x)$ определяется из формул (2.6).

S-матрицу и набор $\{\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_N,m_1^\pm,m_2^\pm,\ldots,m_N^\pm\}$ назовем данными рассеяния уравнения (2.1).

3. Преобразование данных рассеяния

Пусть потенциал $u(x,t)$ уравнения (2.1) зависит от t и является решением уравнения (1.4) в классе функций (1.5). Определим зависимость от t данных рассеяния в этом случае. Аналогично "быстроубывающему" случаю ($c=0$) можно показать, что в этом случае собственные значения оператора $L(t)$ не зависят от времени, т.е.

$$\frac{d\chi_n}{dt}=0, \quad n=1,2,\dots,N. \tag{3.1}$$

Согласно определению полиномов $P_k(u)$ и условию (1.5)

$$\lim_{x\to\infty} P_s'=0, \tag{3.2}$$

$$\lim_{x\to\infty} P_s=-\frac{(2s)!}{2^{s+1}(s!)^2}c^{2s}, \quad s=0,1,2,\dots,p. \tag{3.3}$$

Таким образом, по определению B_q,

$$\lim_{x\to\infty} B_q f^+(x,k)=i\ell\sum_{s=0}^{q}\frac{(2s)!(2k^2)^{q-s}c^{2s}}{2^{s+1}(s!)^2}\exp(i\ell x),$$

и поэтому

$$\lim_{x\to\infty} Y_p f^+(x,k)=i\ell\sum_{q=0}^{p}c_q\eta_q(k)\exp(i\ell x), \tag{3.4}$$

где

$$\eta_q(k)=\sum_{s=0}^{q}\frac{(2s)!(2k^2)^{q-s}c^{2s}}{2^{s+1}(s!)^2}. \tag{3.5}$$

Заметим, что $\eta_q(-k)=\eta_q(k)$.

Так как среди полиномов P_k только $P_0=-\frac{1}{2}$ не стремится к нулю при $x\to-\infty$, то

$$\lim_{x\to-\infty} Y_p f^-(x,k)=-\frac{1}{2}ik\sum_{q=0}^{p}c_q(2k^2)^q\exp(-ikx). \tag{3.6}$$

Продифференцировав по t равенство

$$-f^{+\prime\prime}(x,k,t)+u(x,t)f^+(x,k,t)=k^2f^+(x,k,t),$$

получим

$$-f_t^{+\prime\prime}+u_tf^++uf_t^+=k^2f_t^+.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$u_t f^+ + (L - k^2) f_t^+ = 0,$$

или, согласно (1.4),

$$Z_p(u) f^+ + (L - k^2) f_t^+ = 0.$$

На основании (1.3) равенство (3.7) примет вид

$$(Y_p L - L Y_p) f^+ + (L - k^2) f_t^+ = 0,$$

откуда

$$(L - k^2)\big[f_t^+ - Y_p f^+\big] = 0.$$

Поэтому $f_t^+ - Y_p f^+$ – есть решение уравнения $Ly = k^2 y$. Таким образом,

$$f_t^+(k) - Y_p f^+(k) = A f^-(k) + B f^-(-k). \tag{3.8}$$

Согласно (2.7) и (3.6), переходя в последнем равенстве к пределу $x \to -\infty$, получим

$$\frac{\partial C_{11}(k,t)}{\partial t}\, e^{-ikx} + \frac{\partial C_{12}(k,t)}{\partial t}\, e^{ikx} + \frac{1}{2} ik \sum_{q=0}^{p} c_q (2k^2)^q\, e^{-ikx} C_{11}(k,t) -$$

$$-\frac{1}{2} ik \sum_{q=0}^{p} c_q (2k^2)^q\, e^{ikx} C_{12}(k,t) = A e^{-ikx} + B e^{ikx},$$

откуда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C_{11}(k)}{\partial t} + \frac{1}{2} ik \sum_{q=0}^{p} c_q (2k^2)^q C_{11}(k) = A, \\ &\frac{\partial C_{12}(k)}{\partial t} - \frac{1}{2} ik \sum_{q=0}^{p} c_q (2k^2)^q C_{12}(k) = B. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Аналогично, используя (2.8) и (3.4) при $x \to \infty$ и $|k| > c$, получим

$$- i\ell \sum_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k)\, e^{i\ell x} =$$

$$A\Big(C_{22}(k)\, e^{i\ell x} + C_{21}(k)\, e^{-i\ell x}\Big) + B\Big(C_{22}(-k)\, e^{-i\ell x} + C_{21}(-k)\, e^{i\ell x}\Big),$$

следовательно,

$$\begin{cases} AC_{22}(k) + BC_{21}(-k) = -i\ell \sum\limits_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k), \\ AC_{21}(k) + BC_{22}(-k) = 0. \end{cases}$$

Так как при $|k| > c$

$$|C_{21}(k)|^2 - |C_{22}(k)|^2 = \frac{\ell}{k},$$

то решая последнюю систему уравнений при $|k| > c$, получим

$$\begin{cases} A = -i\ell \sum\limits_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k) C_{11}(k), \\ B = -i\ell \sum\limits_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k) C_{12}(k). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в (3.9), получим закон преобразования $C_{11}(k,t)$ и $C_{12}(k,t)$ при $|k| > c$

$$C_{11}(k,t) = C_{11}(k,0) \exp\left\{ -\sum_{q=0}^{p} c_q \left(\frac{1}{2} ik(2k^2)^q + i\ell\eta_q(k) \right) t \right\},$$

$$C_{12}(k,t) = C_{12}(k,0) \exp\left\{ \sum_{q=0}^{p} c_q \left(\frac{1}{2} ik(2k^2)^q - i\ell\eta_q(k) \right) t \right\},$$

а в силу (2.11),

$$C_{21}(k,t) = \frac{k}{\ell} C_{12}(k,t) = C_{21}(k,0) \exp\left\{ \sum_{q=0}^{p} c_q \left(\frac{1}{2} ik(2k^2)^q - i\ell\eta_q(k) \right) t \right\},$$

$$C_{22}(k,t) = \frac{k}{\ell} C_{11}(-k,t) = C_{22}(k,0) \exp\left\{ \sum_{q=0}^{p} c_q \left(\frac{1}{2} ik(2k^2)^q + i\ell\eta_q(k) \right) t \right\}.$$

Таким образом, из (2.13) при $|k| > c$, имеем

$$S_{21}(k,t) = S_{21}(k,0) \exp\left\{ -ik \sum_{q=0}^{p} c_q (2k^2)^q t \right\}, \tag{3.10}$$

$$S_{12}(k,t) = S_{12}(k,0) \exp\left\{ 2i\ell \sum_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k) t \right\}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим случай $|k| \leqslant c$. Равенства (3.9) при этом сохранятся. При $x \to \infty$ и $|k| \leqslant c$ решение $f^+(x,k)$ экспоненциально убывает, а т.к. решения $f^-(x,k)$ и $f^-(x,-k)$ линейно независимы, то, по крайней мере, одно из них экспоненциально растет. Так как согласно (2.12), $C_{12}(k) = \overline{C_{11}(k)} = 0$ при $|k| \leqslant c$ ($\operatorname{Im} k = 0$), то на основании (2.7) оба эти решения растут

$$f^-(x,k) \sim ae^{\sqrt{c^2-k^2}\,x}, \quad f^-(x,-k) \sim be^{\sqrt{c^2-k^2}\,x}, \quad x \to \infty.$$

Поэтому, в силу (2.7) и (3.8),

$$Aa + Bb = 0, \quad C_{11}(k)a + C_{12}(k)b = 0,$$

и, следовательно,

$$C_{11}(k)B - C_{12}(k)A = 0.$$

Учитывая это равенство, из (3.9) имеем

$$C_{11}\frac{\partial C_{12}}{\partial t} - C_{12}\frac{\partial C_{11}}{\partial t} - ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q C_{12}C_{11} = 0,$$

или, согласно обозначению (2.13),

$$S_{21}(k,t) = S_{21}(k,0)\exp\left\{-ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q t\right\}$$

Таким образом, равенство (3.10) выполняется при всех действительных k. Закон преобразования $S_{22}(k,t)$ при $|k| \leqslant c$ установим с помощью формул (2.16)–(2.19).

Согласно (3.10), при $|k| > c$

$$|S_{22}(k,t)| = \sqrt{\left(1 - |S_{21}(k,t)|^2\right)\frac{k}{\ell}} = |S_{22}(k,0)|,$$

а при $|k| \leqslant c$

$$\arg S_{22}(k,t) = \frac{1}{2}\arg S_{21}(k,t) = \arg S_{22}(k,0) - \frac{k}{2}\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q\, t.$$

Следовательно, на основании (2.18), (2.19),

$$W(k,t) = -\frac{t}{\pi}\sum_{q=0}^{p} 2^{q-1}c_q\,\text{v.p.}\int_{-c}^{c}\frac{{k'}^{2q+1}}{\sqrt{c^2-{k'}^2}\,(k'-k)}dk' -$$
$$- it\sum_{q=0}^{p}\frac{2^{q-1}c_q k^{2q+1}}{\sqrt{c^2-k^2}} + F(k),$$

где $F(k)$ члены, не зависящие от t.

Интеграл

$$I_q = \text{v.p.}\int_{-c}^{c}\frac{{k'}^{2q+1}}{\sqrt{c^2-{k'}^2}\,(k'-k)}dk'$$

определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$I_q = \frac{c^{2q}\sqrt{\pi}}{q!}\Gamma\Big(q+\frac{1}{2}\Big) + k^2 I_{q-1}, \quad I_0 = \sqrt{\pi},$$

где Г-гамма функции Эйлера.

Таким образом, при $|k| \leqslant c$

$$S_{22}(k,t) = S_{22}(k,0)\exp\bigg\{-\sum_{q=0}^{p}2^{q-1}c_q\bigg(\frac{\sqrt{c^2-k^2}}{\pi}I_q + ik^{2q+1}\bigg)t\bigg\}. \tag{3.12}$$

Также как и в случае непрерывного спектра для дискретного спектра

$$f_t^-(x,i\chi_n,t) - Y_p(x,i\chi_n,t)$$

является решением уравнения $Ly = -\chi_n^2 y$, поэтому согласно равенству (3.6) (которое справедливо и при $k = i\chi_n$) получим

$$f_t^-(x,i\chi_n,t) - Y_p\,f^-(x,i\chi_n,t) = -\frac{1}{2}\chi_n\sum_{q=0}^{p}c_q(-2\chi_n^2)^q f(x,i\chi_n,t).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу $x\to\infty$. Для этого воспользуемся (3.4) и (2.19). В результате получим следующее равенство

$$\frac{dB_n}{dt} + \sqrt{\chi_n^2+c^2}\sum_{q=0}^{p}c_q\eta_q(i\chi_n)B_n = -\frac{1}{2}\chi_n\sum_{q=0}^{p}c_q(-2\chi_n^2)^q B_n,$$

или

$$B_n(t) = B_n(0)\exp\Big\{\sum_{q=0}^{p} c_q\Big((-2)^{q-1}\chi_n^{2q+1} - \sqrt{\chi_n^2+c^2}\,\eta_q(i\chi_n)\Big)t\Big\}.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если потенциал $u(x,t)$ оператора $L(t)$ является решением уравнения (1.4) в классе функций (1.5), то $S_{21}(k,t)$, $S_{22}(k,t)$, $\chi_n(t)$ и $B_n(t)$ меняются во времени следующим образом* $(\operatorname{Im} k = 0)$

$$S_{21}(k,t) = S_{21}(k,0)\exp\Big\{-ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q t\Big\};$$

при $|k| > c$

$$S_{22}(k,t) = S_{22}(k,0)\exp\Big\{\sum_{q=0}^{p} c_q\Big(i\ell\eta_q(k) - \frac{1}{2}ik(2k^2)^q\Big)t\Big\};$$

а при $|k| \leqslant c$

$$S_{22}(k,t) = S_{22}(k,0)\exp\Big\{-\sum_{q=0}^{p} 2^{q-1}c_q\Big(\frac{\sqrt{c^2-k^2}}{\pi}I_q + ik^{2q+1}\Big)t\Big\};$$

$$\chi_n(t) = \chi_n(0);$$

$$B_n(t) = B_n(0)\exp\Big\{\sum_{q=0}^{p} c_q\Big((-2)^{q-1}\chi_n^{2q+1} - \sqrt{\chi_n^2+c^2}\,\eta_q(i\chi_n)\Big)t\Big\},$$

где

$$\eta_q(k) = \sum_{s=0}^{q}\frac{(2s)!(2k^2)^{q-s}\,c^{2s}}{2^{s+1}(s!)^2},$$

$$I_q = \frac{c^{2q}\sqrt{\pi}}{q!}\Gamma\Big(q+\frac{1}{2}\Big) + k^2 I_{q-1},\ I_0 = \sqrt{\pi}.$$

Следствие. *Нормировочные константы $m_n^+(t)$ и $m_n^-(t)$ меняются по t следующим образом*

$$m_n^-(t) = m_n^-(0)\exp\Big\{\sum_{q=0}^{p} c_q(-2)^q\chi_n^{2q+1}\,t\Big\},$$

$$m_n^+(t) = m_n^+(0)\exp\Big\{-2\sqrt{\chi_n^2+c^2}\sum_{q=0}^{p} c_q\eta_q(i\chi_n)t\Big\},\quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши для уравнения (1.4) в классе функций (1.5).

4. Общее уравнение КдФ с правой частью

В этом параграфе мы будем рассматривать общее уравнение КдФ с правой частью

$$u_t - Z_p(u) = G(x,t), \tag{4.1}$$

в классе функций (1.5), где $G(x,t)$ – заданная, гладкая функция с достаточно быстрым стремлением к нулю при $x \to \pm\infty$. Найдем эволюцию данных рассеяния уравнения (2.1) с потенциалом $u(x,t)$, являющимся решением уравнения (4.1).

Будем искать пару Лакса (см. [11]) для уравнения (4.1) в виде

$$-f^-_{xx}(x,k,t) + u(x,t)f^-(x,k,t) = k^2 f^-(x,k,t), \tag{4.2}$$

$$f^-(x,k,t) = Y_p f^-(x,k,t) + F. \tag{4.3}$$

Тогда для определения F получим уравнение

$$-F'' + uF = -Gf^-(k). \tag{4.4}$$

Будем искать решение (4.4) в виде

$$F = A(x)f^-(k) + B(x)f^-(-k),$$

тогда для определения $A(x)$ и $B(x)$ получим систему уравнений $(f^+ = f^+(k))$

$$\begin{cases} A'f^- + B'\overline{f^-} = 0, \\ A'f^{-\prime} + B'\overline{f^{-\prime}} = Gf^- \end{cases}$$

решение которой, согласно (3.6) и (4.3), имеет вид

$$A = -\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x} Gf^-\overline{f^-}\,dx + \frac{1}{2}ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q,$$

$$B = \frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x} G(f^-)^2\,dx.$$

Таким образом, второе уравнение пары Лакса имеет вид:

$$f_t^- = Y_p f^- - \left(\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x} G|f^-|^2\,dx - \frac{1}{2}ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q\right)f^- +$$
$$+\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x} G(f^-)^2\,dx\overline{f^-}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу $x\to\infty$ и используя (2.8) и (3.4), при $|k|>c$ получим

$$\begin{aligned}\frac{dC_{22}(k,t)}{dt} &= i\ell\sum_{q=0}^{p} c_q\eta_q(k)C_{22}(k,t)-\\ &-\left(\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G|f^-|^2\,dx - \frac{1}{2}ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q\right)C_{22}(k,t)+\\ &+\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f^-)^2\,dx\,\overline{C_{21}(k,t)},\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{dC_{21}(k,t)}{dt} &= -i\ell\sum_{q=0}^{p} c_q\eta_q(k)C_{21}(k,t)\\ &-\left(\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G|f^-|^2\,dx - \frac{1}{2}ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q\right)C_{21}(k,t)+\\ &+\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f^-)^2\,dx\,\overline{C_{22}(k,t)}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Умножая (4.5) на C_{21} и вычитая из него (4.6), умноженное на C_{22}, учитывая равенство $|C_{21}|^2-|C_{22}|^2=\frac{\ell}{k}$, получим

$$C_{21}\frac{dC_{22}}{dt}-C_{22}\frac{dC_{21}}{dt} = 2i\ell\sum_{q=0}^{p} c_q\eta_q(k)C_{22}C_{21}+\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f^-)^2\,dx.$$

Поделив это равенство на C_{21}^2, согласно обозначению (2.13), будем иметь при $|k| > c$ $(\operatorname{Im} k = 0)$

$$\frac{dS_{12}}{dt} = 2i\ell \sum_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k) S_{12} + \frac{1}{2i\ell C_{21}^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(f^-)^2 \, dx. \tag{4.7}$$

Согласно (2.8), последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{dS_{12}}{dt} = \frac{1}{2i\ell} \int_{-\infty}^{\infty} G\big(\overline{f^+}\big)^2 dx + \left(2i\ell \sum_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k) + \frac{1}{2i\ell} \int_{-\infty}^{\infty} G\big|f^+\big|^2 \, dx\right) S_{12} +$$
$$+ \frac{1}{2i\ell} \int_{-\infty}^{\infty} G\big(f^+\big)^2 \, dx \, S_{12}^2.$$

Если мы будем искать пару Лакса в виде

$$-f^+_{xx} + uf^+ = k^2 f^+, \quad f^+_t = Y_p f^+ + H, \tag{4.8}$$

то для определения H получим уравнения

$$-H'' + uH = -Gf^+. \tag{4.9}$$

При $|k| > c$ будем искать решение (4.9) в виде

$$H = A_1 f^+ + B_1 \overline{f^+}.$$

Определяя A_1 и B_1, получим второе уравнение пары Лакса

$$f^+_t = Y_p f^+ - \left(\frac{1}{2i\ell} \int_{x}^{\infty} G|f^+|^2 \, dx + i\ell \sum_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k)\right) f^+ +$$
$$+ \frac{1}{2i\ell} \int_{x}^{\infty} G\big(f^+\big)^2 \, dx \, \overline{f^+}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу $x \to -\infty$ с учетом (2.7) и

(3.6), получим

$$\begin{cases} \dfrac{dC_{11}(k,t)}{dt} = \left(-\sum\limits_{q=0}^{p} c_q \left(\dfrac{1}{2} ik(2k^2)^q + i\ell\eta_q(k) \right) - \dfrac{1}{2i\ell} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G|f^+|^2\, dx \right) \times \\ \times\, C_{11}(k,t) + \dfrac{1}{2i\ell} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G\big(f^+\big)^2\, dx\, \overline{C_{12}(k,t)}, \\ \dfrac{dC_{12}(k,t)}{dt} = \left(\sum\limits_{q=0}^{p} c_q \left(\dfrac{1}{2} ik(2k^2)^q - i\ell\eta_q(k) \right) - \dfrac{1}{2i\ell} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G|f^+|^2\, dx \right) \times \\ \times\, C_{12}(k,t) + \dfrac{1}{2i\ell} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G\big(f^+\big)^2\, dx\, \overline{C_{11}(k,t)}, \end{cases}$$

откуда, используя равенство $|C_{12}|^2 - |C_{11}|^2 = \frac{\ell}{k}$, получим

$$\frac{dS_{21}}{dt} = -ik \sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2) S_{21} + \frac{1}{2ikC_{12}^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f^+)^2\, dx.$$

Согласно (2.7), его можно переписать в виде

$$\frac{dS_{21}}{dt} = \left(-ik \sum_{q=0}^{p} (2k^2)^q + \frac{1}{2ik} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G|f^-|^2\, dx \right) S_{21} +$$
$$+ \frac{1}{2ik} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f^-)^2\, dx\, S_{21}^2 + \frac{1}{2ik} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\overline{f^-})^2\, dx.$$

При $|k| \leqslant c$ решение (4.9) будем искать в виде

$$H = A_1 f^+ + B_1 f^-.$$

В этом случае

$$A_1 = -\frac{1}{2i\ell C_{21}(k)} \int\limits_{x}^{\infty} G f^+ f^-\, dx - i\ell \sum_{q=0}^{p} c_q \eta_q(k),$$

$$B_1 = \frac{1}{2i\ell C_{21}(k)} \int\limits_{x}^{\infty} G(f^+)^2\, dx.$$

В результате второе уравнение пары Лакса примет вид

$$f_t^+ = Y_p f^+ - \left(\frac{1}{2i\ell C_{21}}\int\limits_x^\infty G f^+ f^-\,dx + i\ell\sum_{q=0}^p c_q\eta_q(k)\right)f^+ +$$
$$+\frac{1}{2i\ell C_{21}}\int\limits_x^\infty G(f^+)^2\,dx\,f^-.$$

С учетом (2.7) при $x\to-\infty$, получим

$$\frac{dC_{11}}{dt} = -\sum_{q=0}^p c_q\left(\frac{1}{2}ik(2k^2)^q - i\ell\eta_q(k)\right)C_{12} -$$
$$-\frac{1}{2i\ell C_{21}}\int\limits_{-\infty}^\infty G f^+(C_{11}f^- - f^+)\,dx, \qquad (4.11)$$

$$\frac{dC_{12}}{dt} = \sum_{q=0}^p c_q\left(\frac{1}{2}ik(2k^2)^q - i\ell\eta_q(k)\right)C_{12} -$$
$$-\frac{C_{12}}{2i\ell C_{21}}\int\limits_{-\infty}^\infty G f^+ f^-\,dx, \qquad (4.12)$$

Так как $C_{11}f^- - f^+ = -C_{12}\overline{f^-}$, то из (4.11) и (4.12), с учетом (2.13) получим

$$\frac{dS_{21}}{dt} = -ik\sum_{q=0}^p c_q(2k^2)S_{21} + \frac{1}{2ikC_{12}^2}\int\limits_{-\infty}^\infty G(f^+)^2\,dx, \qquad (4.13)$$

т.е. эволюция S_{21} при $|k|\leqslant c$ точно такая же как и в случае $|k|>c$ ($\operatorname{Im}k=0$).

Закон преобразования $S_{22}(k,t)$ при $|k|\leqslant c$ установим с помощью формул (2.16)–(2.19).

Используя (2.11) и (2.13), равенство (4.13) при $|k|\leqslant c$ можно переписать в виде

$$\frac{dS_{21}}{dt} = -i\left(k\sum_{q=0}^p c_q(2k^2)^q + \frac{k}{2\ell^2|C_{21}|^2}\int\limits_{-\infty}^\infty G(f^+)^2\,dx\right)S_{21},$$

поэтому (так как при $|k| \leqslant c$ мы имеем равенство $\operatorname{Im} f^+(k) = 0$) последнее равенство можно переписать в виде

$$S_{21}(k,t) =$$
$$S_{21}(k,0)\exp\left\{-i\left(k\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q + \frac{k}{2\ell^2}\int_0^t\left\{\frac{1}{|C_{21}|^2}\int_{-\infty}^{\infty} G|f^+|^2\,dx\right\}dt\right)\right\}.$$

Из последнего равенства, используя (2.11), (2.14) и (2.16), при $|k| \leqslant c$ получим

$$\arg S_{22}(k,t) =$$
$$\arg S_{22}(k,0) - \frac{k}{2}\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q t - \frac{1}{4k}\int_0^t\left\{\int_{-\infty}^{\infty} G|\psi_1|^2\,dx\right\}dt. \quad (4.12)$$

Согласно (4.10) при $|k| > c$

$$\frac{d|C_{12}|^2}{dt} = \frac{1}{2i\ell}\int_{-\infty}^{\infty} G\left((f^+)^2\frac{\overline{C}_{11}}{C_{12}} - (\overline{f^+})^2\frac{C_{11}}{C_{12}}\right)dx|C_{11}|^2$$

или на основании (2.11) и (2.13)

$$\frac{d}{dt}|C_{12}|^2 = \frac{1}{2i\ell}\int_{-\infty}^{\infty} G\Big(-(f^+)^2 S_{12} + (\overline{f^+})^2\overline{S}_{12}\Big)dx|C_{12}|^2.$$

Так как из (2.15) $\psi_2(x,k) = \overline{f^+} + S_{12}f^+$, то последнее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}|C_{12}|^2 = -\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{\ell}Gf^+\psi_2 dx\right\}|C_{12}|^2.$$

Следовательно, при $|k| > c$

$$|S_{22}(k,t)| = |S_{22}(k,0)|\exp\left\{\frac{1}{2\ell}\operatorname{Im}\left\{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} Gf^+\psi_2\,dx dt\right\}\right\}.$$

Таким образом (т.к. $S_{22}(0) = 0$), при $|k| \leqslant c$

$$W(k,t) = -\frac{t}{\pi}\sum_{q=0}^{p} 2^{q-1}c_q \,\mathrm{v.p.}\int_{-c}^{c}\frac{{k'}^{2q+1}}{\sqrt{c^2 - {k'}^2}\,(k'-k)}dk' - it\sum_{q=0}^{p}\frac{2^{q-1}c_q k^{2q+1}}{\sqrt{c^2-k^2}}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t \text{v.p.}\int\limits_{-c}^{c}\left\{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G|\psi_1|^2\,dx}{k'\sqrt{c^2-k'^2}(k'-k)}\right\}dk'dt - \frac{i}{4k\sqrt{c^2-k^2}}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty} G|\psi_1|^2 dx dt$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\frac{\arg S_{22}(k',0)+2\sum\limits_{n=1}^{N}\arg(k'-i\chi_n)}{\sqrt{c^2-k'^2}\,(k'-k-i\varepsilon)}dk'+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{-c}+\int\limits_{c}^{\infty}\right)\frac{\ln|S_{22}(k',0)|}{\sqrt{k'-c^2}\,(k'-k)}dk'+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \operatorname{Im}\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{-c}+\int\limits_{c}^{\infty}\right)\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} Gf^+\psi_2\,dx}{(k'^2-c^2)(k'-k)}\,dk'\right\}dt.$$

Введем следующие обозначения

$$J_1(t) = \text{ v.p.}\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G|\psi_1|^2\,dx}{k'\sqrt{c^2-k'^2}(k'-k)}dk', \tag{4.15}$$

$$J_2(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{-c}+\int\limits_{c}^{\infty}\right)\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} Gf^+\psi_2\,dx}{(k'^2-c^2)(k'-k)}\,dk'. \tag{4.16}$$

Согласно эти обозначениям

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\pi}\sum_{q=0}^{p}2^{q-1}c_q I_q - i\sum_{q=0}^{p}\frac{2^{q-1}c_q k^{2q+1}}{\sqrt{c^2-k^2}}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}J_1 - \frac{i}{4k\sqrt{c^2-k^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G|\psi_1|^2\,dx - \sum_{n=1}^{N}\frac{2ik}{\sqrt{c^2-k^2}\,(k^2+\chi_n^2)}\,\frac{d\chi_n}{dt}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\left\{\text{ v.p.}\int\limits_{-c}^{c}\frac{k'dk'}{(k'^2+\chi_n^2)\sqrt{c^2-k'^2}\,(k'-k)}\,\frac{d\chi_n}{dt}\right\}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}J_2. \tag{4.17}$$

Согласно (2.19) при $|k| \leqslant c$

$$\frac{1}{S_{22}}\,\frac{dS_{22}}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2ik}{k^2+\chi_n^2}\,\frac{d\chi_n}{dt} + \sqrt{c^2-k^2}\,\frac{dW}{dt},$$

поэтому на основании (4.17) при $|k| \leqslant c$

$$\frac{dS_{22}}{dt} = -\sum_{q=0}^{p} 2^{q-1} c_q \left(\frac{\sqrt{c^2-k^2}\, I_q}{\pi} + ik^{2q+1} \right) - \frac{\sqrt{c^2-k^2}}{4\pi} J_1 - \tag{4.18}$$

$$-\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G|\psi_1|^2\,dx - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi_n \sqrt{c^2-k^2}}{\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,(k^2+\chi_n^2)}\,\frac{d\chi_n}{dt} + \frac{\sqrt{c^2-k^2}}{2\pi}\,\mathrm{Im}\,J_2.$$

В последнем равенстве было использовано тождество

$$\text{v.p.} \int_{-c}^{c} \frac{k'}{(k'^2+\chi_n^2)\sqrt{c^2-k'^2}\,(k'-k)} dk' = \frac{\pi\chi_n}{\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,(k^2+\chi_n^2)}.$$

Заметим также, что согласно (2.11), (2.13) и (2.15), из второго равенства (4.10) при $|k| > c$

$$\frac{dS_{22}}{dt} = \left(\sum_{q=0}^{p} c_q \Big(i\ell\eta_q(k) - \frac{1}{2} ik(2k^2)^q \Big) + \frac{1}{2i\ell} \int_{-\infty}^{\infty} G f^+ \psi_2\,dx \right) S_{22}.$$

Займемся эволюцией $B_n(t)$ и собственных значений.

Легко заметить, что функция

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{dk}(f^-(x,k) - B_n f^+(x,k)\Big|_{k=i\chi_n}}{\dot{C}_{12}(i\chi_n)} \tag{4.19}$$

является решением уравнения $Ly = -\chi_n^2 y$. (Здесь и дальше точка означает производную по k.)

Согласно (2.9), при $\mathrm{Im}\,k > 0$

$$f^+(x,k) \sim C_{12}(k)\,e^{ikx}, \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

$$f^-(x,k) \sim \frac{k}{\ell} C_{12}(k)\,e^{-i\ell x}, \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

поэтому из (4.19) следует, что

$$h_n(x) \sim -B_n\, e^{-\chi_n x}, \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$
$$h_n(x) \sim \frac{\chi_n}{\sqrt{\chi_n^2 + c^2}}\, e^{\sqrt{\chi_n^2+c^2}\, x}, \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

В общем случае собственные значения оператора $L(t)$ зависят от t, поэтому, продифференцировав равенство $f^-(x,k_n,t) = B_n(t) f^+(x,k_n,t)$ по t, получим

$$\frac{\partial f^-(x,k_n,t)}{\partial t} + \frac{\partial f^-}{\partial k}\Big|_{k=k_n} \cdot \frac{dk_n}{dt} =$$
$$= \frac{dB_n}{dt} f^+(x,k_n,t) + B_n \frac{\partial f^+(x,k_n,t)}{\partial t} + B_n \frac{\partial f^+}{\partial k}\Big|_{k=k_n} \frac{dk_n}{dt},$$

или, согласно обозначению (4.19),

$$\frac{\partial f^-(x,i\chi_n,t)}{\partial t} = \frac{dB_n}{dt} f^+(x,i\chi_n,t) + B_n \frac{\partial f^+(x,i\chi_n,t)}{\partial t} - $$
$$-i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{C}_{12}(i\chi_n) h_n(x,t). \tag{4.22}$$

Аналогично непрерывному спектру в случае дискретного спектра будем искать пару Лакса в виде

$$\begin{aligned} &-f^-_{xx}(x,i\chi_n,t) + u(x,t) f^-(x,i\chi_n,t) = -\chi_n^2 f^-(x,i\chi_n,t), \\ &\frac{\partial f^-(x,i\chi_n,t)}{\partial t} = Y_p f^-(x,i\chi_n,t) + F_n. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Тогда для определения F_n получим уравнение

$$-F_n'' + (u + \chi_n^2) F_n = -G f^-(x,i\chi_n,t),$$

решение которого будем искать в виде

$$F_n = a_n f^-(x,i\chi_n,t) + b_n h_n(x,t).$$

Используя (4.20) и (3.6) точно также, как и в случае непрерывного спектра, имеем

$$a_n = -\frac{1}{2\chi_n B_n} \int\limits_{-\infty}^{x} G f_n^- h_n\, dx - \frac{1}{2}\chi_n \sum_{q=0}^{p} c_q (-2\chi_n^2)^q,$$

$$d_n = \frac{1}{2\chi_n B_n} \int\limits_{-\infty}^{x} G (f_n^-)^2\, dx.$$

(Здесь и далее $f_n^{\pm}=f_n^{\pm}(x,i\chi_n,t)$.) Таким образом, согласно (4.22) и (4.23), второе уравнение пары Лапласа имеет вид

$$\frac{dB_n}{dt}f_n^{+}+B_n\frac{\partial f^{+}(x,i\chi_n,t)}{\partial t}-i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{C}_{12}(i\chi_n)h_n=$$

$$=B_nY_pf_n^{+}-\frac{1}{2}\chi_n\sum_{q=0}^{p}c_q(-2\chi_n^2)^qB_nf_n^{+}-$$

$$-\frac{1}{2\chi_n}f_n^{+}\int\limits_{-\infty}^{x}Gf_n^{-}h_n\,dx+\frac{1}{2\chi_nB_n}h_n\int\limits_{-\infty}^{x}G(f_n^{-})^2\,dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x\to\infty$ и учитывая асимптотики для $f^{+}(x,k,t)$, f^{+}, h_n и равенство (3.4), получим

$$e^{-\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,x}\frac{dB_n}{dt}-i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{C}_{12}(i\chi_n)\frac{\chi_n}{\sqrt{\chi_n^2+c^2}}e^{\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,x}=$$

$$=-\sqrt{\chi_n^2+c^2}\sum_{q=0}^{p}c_q\eta_q(i\chi_n)\,e^{-\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,x}B_n-$$

$$-\frac{1}{2}\chi_n\sum_{q=0}^{p}c_q(-2\chi_n^2)^qe^{-\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,x}B_n-\frac{1}{2\chi_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Gf_n^{-}h_n\,dx\,e^{-\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,x}+$$

$$+\frac{1}{2\chi_nB_n}\,\frac{\chi_n}{\sqrt{\chi_n^2+c^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(f_n^{-})^2\,dx\,e^{\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,x},$$

откуда находим следующие равенства

$$\frac{dB_n}{dt}=\Big\{-\sum_{q=0}^{p}c_q\Big(\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,\eta_q(i\chi_n)-(-2)^{q-1}\chi_n^{2q+1}\Big)-$$

$$-\frac{1}{2\chi_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Gf_n^{+}h_n\,dx\Big\}B_n,\quad n=1,2,\dots,N,\tag{4.24}$$

$$-i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{C}_{12}(i\chi_n)=\frac{1}{2\chi_nB_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\big(f_n^{-}\big)^2\,dx.\tag{4.25}$$

Пусть $\Phi_n(x,t)$ – нормированная собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n = -\chi_n^2$ такая, что $f_n^- = C_n^-\Phi_n$. Равенство (4.25) примет вид

$$-i\dot{C}_{12}(i\chi_n)\frac{d\lambda_n}{dt} = \frac{(C_n^-)^2}{B_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\Phi_n^2\,dx,$$

которое, согласно равенству $\dot{C}_{12}(i\chi_n) = -i\frac{(C_n^-)^2}{B_n}$ (см. [18, 19]), можно переписать в виде

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G\Phi_n^2\,dx.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если потенциал $u(x,t)$ оператора $L(t)$ является решением уравнения* (4.1) *в классе функций* (1.5), *то $S_{21}(k,t)$, $S_{22}(k,t)$, $B_n(t)$ и $\chi_n(t)$ меняются во времени следующим образом* ($\operatorname{Im} k = 0$)

$$\frac{dS_{21}}{dt} = -ik\sum_{q=0}^{p} c_q(2k^2)^q S_{21} + \frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\psi_1^2\,dx;$$

при $|k| > c$

$$\frac{dS_{22}}{dt} = \left(\sum_{q=0}^{p} c_q\Big(i\ell\eta_q(k) - \frac{1}{2}ik(2k^2)^q\Big) + \frac{1}{2i\ell}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Gf^+\psi_2\,dx\right)S_{22},$$

а при $|k| \leqslant c$

$$\frac{dS_{22}}{dt} = \Bigg(-\sum_{q=0}^{p} 2^{q-1}c_q\Big(\frac{\sqrt{c^2-k^2}}{\pi}\,I_q + ik^{2q+1}\Big) - \frac{\sqrt{c^2-k^2}}{4\pi}J_1 -$$
$$-\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G|\psi_1|^2\,dx + \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\sqrt{c^2-k^2}}{\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,(k^2+\chi_n^2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\Phi_n^2\,dx\right\} +$$
$$+\frac{\sqrt{c^2-k^2}}{2\pi}\operatorname{Im} J_2\Bigg)S_{22};$$

$$\frac{d\chi_n}{dt} = -\frac{1}{2\chi_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\Phi_n^2\,dx;$$

$$\frac{dB_n}{dt} = \Big\{ -\sum_{q=0}^{p} c_q\Big(\sqrt{\chi_n^2+c^2}\,\eta_q(i\chi_n) - (-2)^{q-1}\chi_n^{2q+1}\Big) - \\ -\frac{1}{2\chi_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Gf_n^+ h_n\,dx\Big\} B_n.$$

Здесь $\eta_q(k)$ и I_q те же, что и в теореме 1, а $J_1(t)$, $J_2(t)$ определяются из равенств (4.15) и (4.16), соответственно.

В случае классического уравнения КдФ, положим $G = 2\sum\limits_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}|\varphi_m|^2$, где $\varphi_n(x,t)$ – собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n = -\chi_n^2$, нормированная условием

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi_n(x,t)|^2dx = |A_n(t)|^2, \quad n = 1,2,\dots,N$$

с непрерывной заданной функцией $A_n(t)$. В этом случае мы получим результаты работы [15].

Положив $G = 2\sum\limits_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_m\cdot\psi_m)$, где $\psi_n(x,t)$ – линейное независимое с $\varphi_n(x,t)$ решение уравнения $Ly = -\chi_n^2 y$ такое, что $W\{\varphi_n,\psi_n\} = \omega_n(t)$, а $\omega_n(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_0^t\omega_n(t)dt < -\lambda_n(0)$, получим результат работы [16].

Литература

1. G. S. Gardner, I. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation.* — Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095–1097.
2. P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.* — Comm. Pure Appl. Math **21** (1968), 467–490.
3. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах.* — ЖЭТФ **61** (1971), 118–134.

4. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* Наука, М. (1986).
5. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Ч. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* Мир, М. (1988).
6. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов.* Мир, М. (1983).
7. А. Ньюэлл, *Обратные преобразования рассеяния.* Мир, М. (1983).
8. Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, *Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений.* Мир, М. (1985).
9. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems.* — Stud. Appl. Math. **53** (1974), 249–315.
10. V. K. Melnikov, *Integrable and nonintegrable cases of the Lax equations with a source.* — TMF **99** (1994), 471–477.
11. A. S. Fokas, M. J. Ablowitz, *Forced nonlinear evolution equations and the inverse scattering transforms.* — SIAM Stud. Appl. Math. **80** (1989), 253–272.
12. J. Leon, A. Latifi, *Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves.* — J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 1385–1403.
13. Е. Я. Хруслов, *Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки.* — Мат. сб. **99(141)** (1976), 268–281.
14. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Распад начального разрыва в уравнении Кортевега-де Фриза.* — Письма в ЖЭТФ **17** (1973), 268–271.
15. Г. У. Уразбоев, А. Б. Хасанов, *Об интегрировании уравнения КдФ с самосогласованным источником при начальных данных типа ступеньки.* — Труды международной конференции "Симметрия и дифференциальные уравнения", Красноярск (2000), сс. 248–251.
16. Г. У. Уразбоев, А. Б. Хасанов, *Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа ступеньки.* — ТМФ **129** (2001), 38–64.
17. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля.* "Наука", Москва (1984).
18. В. С. Буслаев, В. Л. Фомин, *К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси.* — Вестн. ЛГУ, Сер. матем., мех., астрон. **17** (1962), 56–64.
19. Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния. II.* — ВИНИТИ, сер. "Современные проблемы математики" **3**, Москва (1974), 93–180.

Khasanov A. B., Urazboev G. U. The solution of general KdV equation in a class of steplike functions.

In this work laws of evolution of the scattering data of the Sturm–Liouville operator with potential being solution of general Korteweg–de Vries equation and general Korteweg–de Vries equation with a source in a class of steplike functions are deduced.

Ургенчский государственный университет, Узбекистан

Поступило 26 октября 2004 г.