Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

А. В. Цыганов

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЕВ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА НА БИ-ГАМИЛЬТОНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ $e(3)$ И $so(4)$

1. Введение

Известно, что интегрируемые случаи Клебша [1] и Стеклова [2] уравнений Эйлера на алгебре $e(3)$ и, соответственно, интегрируемые случаи Шоттки [3] и Стеклова [4] на алгебре $so(4)$, единственные, когда все интегралы движения являются полиномами второго порядка по всем переменных фазового пространства. Других интегрируемых случаев с квадратичными интегралами движения нет.

Как было замечено в [5, 6], случаи Клебша и Шоттки переходят друг в друга при подходящей линейной замене переменных. Аналогичная замена переменных связывает случаи Стеклова [6].

В данной работе мы докажем, что изоморфизмы интегрируемых систем, рассмотренные в работе Бобенко [6], являются скрученными пуассоновыми отображениями би-гамильтоновых многообразий, которые позволяют полностью описать и исследовать соответствующие интегрируемые системы.

Напомним, что многообразие $\mathcal{M}$, снабженное скобкой Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{M}}$ называется пуассоновым многообразием. Отображение $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ пуассоновых многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется пуассоновым, если оно сохраняет скобки Пуассона, т.е.

$$f^*\Big\{\varphi,\psi\Big\}_{\mathcal{N}}=\Big\{f^*\varphi,f^*\psi\Big\}_{\mathcal{M}}$$

для любых $\varphi,\psi\in C^\infty(\mathcal{N})$. Здесь $f^*\varphi=\varphi\circ f$ - подъем функции $\varphi\in C^\infty(\mathcal{N})$ на $\mathcal{M}$.

Многообразие $\mathcal{M}$, снабженное парой совместных скобок Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{M}}$ и $\{.,.\}'_{\mathcal{M}}$, называется би-гамильтоновым. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются би-гамильтоновыми многообразиями, то сохраняющее скобки Пуассона отображение $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ действует одним

Данная работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00888.

из двух возможных способов

$$1.\quad f:\ \begin{array}{c}\{.\,,.\}_{\mathcal M}\leftrightarrow\{.\,,.\}_{\mathcal N}\\ \\ \{.\,,.\}'_{\mathcal M}\leftrightarrow\{.\,,.\}'_{\mathcal N}\end{array}\,,\qquad 2.\quad f:\ \begin{array}{ccc}\{.\,,.\}_{\mathcal M} & & \{.\,,.\}_{\mathcal N}\\ & \times & \\ \{.\,,.\}'_{\mathcal M} & & \{.\,,.\}'_{\mathcal N}\end{array}\,.$$

Для того чтобы отличать эти две возможности, в первом случае мы продолжим использовать термин *пуассоново отображение*, а во втором случае будем использовать термин *скрученное пуассоново отображение*.

С точки зрения пуассоновой геометрии эти случаи полностью эквивалентны, так как они отличаются только нумерацией скобок на многообразиях $\mathcal M$ и $\mathcal N$.

Однако в классической механике стандартный подход к исследованию интегрируемых систем состоит из двух частей – кинематики и динамики. Сначала, при описании фазового пространства, нам необходимо определить "первые" скобки $\{.\,,.\}_{\mathcal M}$ или $\{.\,,.\}_{\mathcal N}$ на пуассоновых многообразиях - обычно это скобки Ли–Пуассона, отвечающие различным алгебрам Ли.

Затем, выбрав какую либо конкретную функцию Гамильтона, мы переходим к рассмотрению уравнений движения, которые являются гамильтоновыми относительно этих "первых" скобок. Только после этого для данной гамильтоновой системы мы ищем "вторые" скобки $\{.\,,.\}'_{\mathcal M}$ или $\{.\,,.\}'_{\mathcal N}$, такие, что данная нам система была бы би-гамильтоновой относительной этой пары скобок Пуассона. При этом общего метода нахождения этих "вторых" скобок не существует.

В этой ситуации пуассоновы отображения просто являются аналогом канонических преобразований, которые связывают интегрируемые системы на двух различных фазовых пространствах $\mathcal M$ и $\mathcal N$. Эти преобразования переводят друг в друга и кинематические "первые" скобки, и не известные нам из кинематики "вторые" скобки.

С другой стороны, скрученные пуассоновы отображения заведомо не являются каноническими преобразованиями, рассматриваемыми в кинематике. Тем не менее, действуя на известные нам из кинематики "первые" скобки эти отображения сразу же порождают некоторые "вторые" скобки. Тем самым скрученные пуассоновы отображения содержат в себе всю информацию о паре скобок и, поэтому, можно предположить, что в них закодирована и вся информация о динамике соответствующих бигамильтоновых систем.

Всюду далее рассматриваются пуассоновы многообразия с линейными скобками Ли–Пуассона, которые отвечают алгебрам Ли $e(3)$ и $so(4)$. Для соответствующих пуассоновых многообразий используются те же обозначения что и для алгебр Ли.

2. Уравнения Эйлера

С алгеброй Ли $e(3)$ группы движения евклидова пространства $E(3)$ связаны многочисленные системы, возникающие в классической механике и гидродинамике. Уравнения Эйлера на алгебре $e(3)^*$

$$\dot{f} = \{H, f\}_e, \quad \dot{f} = \frac{df}{dt}$$

с гамильтонианом $H(p, M)$ и скобкой Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\}_e = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\}_e = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\}_e = 0, \qquad (2.1)$$

имеют вид

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + p \times \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial M}, \qquad (2.2)$$

где $p = (p_1, p_2, p_3)$ и $M = (M_1, M_2, M_3)$ - трехмерные вектора, $x \times y$ – векторное произведение и ε_{ijk} – стандартный полностью кососимметричный тензор. Здесь и далее встречающиеся пространства отождествляются с двойственными к ним с помощью инвариантного скалярного произведения [7].

Функции Казимира скобок Пуассона (2.1) равны

$$\mathcal{A} = |p|^2, \quad \mathcal{B} = \langle p, M \rangle, \qquad (2.3)$$

где $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведения в $\mathbb{R}^3$ и $|x|^2 = \langle x, x \rangle$. Эти функции являются интегралами уравнений (2.2), которые находятся в инволюции с функцией Гамильтона $H(p, M)$ и с любой другой функцией на фазовом пространстве. Таким образом, для полной интегрируемости системы достаточно найти еще один интеграл движения в дополнение к интегралу энергии H.

Если функция Гамильтона $H(p, M)$ является специальным квадратичным полиномом, то уравнения Эйлера на алгебре $e(3)$ совпадают с уравнениями Кирхгофа, описывающими движение твердого тела в идеальной несжимаемой и покоящейся на бесконечности жидкости. Современная точка зрения, рассматривающая уравнения Кирхгофа как уравнения Эйлера на $e(3)$ предложена С. П. Новиковым [7].

Другой интересный тип систем, также имеющий приложение к гидродинамике, описывается уравнениями Эйлера на $so(4)$. Алгебра Ли $so(4)$ изоморфна прямой сумме двух алгебр $so(3)$ и везде в дальнейшем мы будем использовать именно это представление. Уравнения Эйлера

$$\dot{s} = \{H, s\} = s \times \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \dot{t} = \{H, t\} = t \times \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.4}$$

являются гамильтоновыми уравнениями относительно скобок Ли–Пуассона

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk}\, s_k, \quad \{s_i, t_j\} = 0, \quad \{t_i, t_j\} = \varepsilon_{ijk} t_k, \tag{2.5}$$

обладающих двумя функциями Казимира

$$\mathcal{A}' = |s|^2, \quad \mathcal{B}' = |t|^2, \tag{2.6}$$

которые находятся в инволюции с любой функцией на фазовом пространстве. Так же как и в случае с алгеброй $e(3)$, мы имеем гамильтонову систему с двумя степенями свободы, для интегрирования которой, помимо интеграла энергии H, необходим еще один интеграл движения.

Если функция Гамильтона $H(s,t)$ является специальным квадратичным полиномом, то уравнения Эйлера на $so(4)$ описывают движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

3. Скрученные пуассоновы отображения

Два линейных отображения пуассоновых многообразий $so(4) \to e(3)$, рассмотренных в работе Бобенко [6], имеют вид

$$f_1 : p = \mathbf{A}(s - t), \quad M = \mathbf{A}^{\vee}(s + t), \tag{3.7}$$

и

$$f_2 : p = s, \quad M = -\mathbf{B}s - 2\mathbf{A}^{\vee} t. \tag{3.8}$$

Здесь $\mathbf{A}$ – невырожденная матрица, $\mathbf{A}^{\vee} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}$ – матрица алгебраических дополнений, а матрица $\mathbf{B}$ равна $\mathbf{B} = \mathrm{tr}\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^2$.

Основной целью данной работы является доказательство того, что преобразования (3.7) и (3.8) являются скрученными пуассоновыми отображениями би-гамильтоновых многообразий, которые позволяют полностью описать и исследовать соответствующие интегрируемые системы.

Замечание 1. Используя канонические преобразования $so(4)$, матрицу $\mathbf{A}$ всегда можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,(w_1, w_2, w_3), \tag{3.9}$$

Далее мы также будем использовать обозначения $\mathbf{w} = \det \mathbf{A} = w_1 w_2 w_3$ и

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{diag}(w_3^2 + w_2^2, w_1^2 + w_3^2, w_2^2 + w_1^2), \\ \mathbf{C} &= \mathrm{diag}(w_3^2 - w_2^2, w_1^2 - w_3^2, w_2^2 - w_1^2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь w_1, w_2, w_3, – три произвольных числовых параметра, которые могут быть параметризованы эллиптическими функциями Якоби [6]

$$w_1(\mu) = \frac{1}{\mathrm{sn}(\mu,\kappa)}, \quad w_2(\mu) = \frac{\mathrm{dn}(\mu,\kappa)}{\mathrm{sn}(\mu,\kappa)}, \quad w_3(\mu) = \frac{\mathrm{cn}(\mu,\kappa)}{\mathrm{sn}(\mu,\kappa)},$$

μ меняется на торе.

Используется так же и другая параметризация [8, 11, 12]

$$w_1(\mu) = \sqrt{\mu - a_1}, \quad w_2(\mu) = \sqrt{\mu - a_2}, \quad w_3(\mu) = \sqrt{\mu - a_3}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2. Преобразование (3.7) допускает обобщение, так как алгебра Ли $so(4)$ изоморфна прямой сумме двух алгебр $so(3)$. Обобщенное обратное преобразование

$$f_1^{-1}\colon s = \frac{1}{2\mathbf{w}}\left(\mathbf{A}M + \mathbf{A}^\vee p\right) \qquad t = \frac{1}{2\widetilde{\mathbf{w}}}\left(\widetilde{\mathbf{A}}M - \widetilde{\mathbf{A}}^\vee p\right)$$

зависит от шести параметров, определяющих различные диагональные матрицы $\mathbf{A}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$. В работе [8] Кеттер использовал это преобразование для интегрирования уравнений движения, а в работе [9] это преобразование применялось для построения двухпараметрического семейства матриц Лакса.

3.1. Случаи Клебша и Шоттки. Всюду далее $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – диагональные матрицы, определяемые соотношениями (3.9) и (3.10).

Предложение 1. *Отображения f_1 и обратное ему f_1^{-1} являются скрученными пуассоновыми отображениями, которые связывают би-Гамильтоновы многообразия $so(4)$ и $e(3)$.*

Доказательство. Скобки Пуассона (2.5) на многообразии $so(4)$ и преобразование f_1 (3.7) порождают вторые скобки Пуассона на многообразии $e(3)$

$$\{M_i, M_j\}'_e = \varepsilon_{ijk}\mathbf{A}_k^2 M_k, \quad \{M_i, p_j\}'_e = \varepsilon_{ijk}\mathbf{A}_j p_k, \quad \{p_i, p_j\}'_e = \varepsilon_{ijk} M_k. \tag{3.12}$$

Эти скобки совместны с исходными скобками (2.1) на многообразии $e(3)$, т.е. любая их линейная комбинация также является скобками Пуассона.

Скобки Пуассона (2.1) на многообразии $e(3)$ и обратное преобразование f_1^{-1} порождают вторые скобки Пуассона на многообразии $so(4)$

$$\begin{aligned}
\{s_i, s_j\}' &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{4}\left(\mathbf{A}_k^{-2}(s_k+t_k) + \mathbf{B}_k \mathbf{A}^{\vee}{}_k^{-1}(s_k - t_k)\right), \\
\{s_i, t_j\}' &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{4}\left(\mathbf{A}_k^{-2}(s_k+t_k) + \mathbf{C}_k \mathbf{A}^{\vee}{}_k^{-1}(s_k - t_k)\right), \\
\{t_i, t_j\}' &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{4}\left(\mathbf{A}_k^{-2}(s_k+t_k) - \mathbf{B}_k \mathbf{A}^{\vee}{}_k^{-1}(s_k - t_k)\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Эти скобки совместны с исходными скобками (2.5) на многообразии $so(4)$.

Совместность скобок означает что многообразия $e(3)$ с парой скобок (2.1), (3.12) и многообразие $so(4)$ со скобками (2.5), (3.13) являются би-гамильтоновыми многообразиями, а преобразования f_1 (3.7) и f_1^{-1} - скрученные пуассоновы отображения.

Рассмотрим теперь интегрируемые системы, интегралы движения которых находятся в инволюции относительно обоих скобок Пуассона на $e(3)$ и $so(4)$. Пусть $\mathcal{P}_e$ и $\mathcal{P}'_e$ два тензора Пуассона на би-гамильтоновом многообразии $e(3)$ отвечающие скобкам (2.1) и (3.12)

$$\mathcal{P}_e = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \\ -\mathbf{P} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}'_e = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{A}^2\mathbf{P} \\ -\mathbf{A}^2\mathbf{P} & \mathbf{w}^2\mathbf{A}^{-2}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-2} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 \\ -M_3 & 0 & M_1 \\ M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оба тензора $\mathcal{P}_e$ и $\mathcal{P}'_e$ вырождены и, поэтому, мы не можем использовать соответствующий оператор рекурсии $\mathcal{N}_e = \mathcal{P}_e^{-1}\mathcal{P}'_e$ для построения цепочки Ленарда, стартуя с известных операторов Казимира (2.3).

Тем не менее мы можем легко найти функцию Казимира для пуассонова пучка $\mathcal{P}_e(\lambda) = \mathcal{P}'_e - \lambda\mathcal{P}_e$, где λ произвольный параметр. Например, для этих целей можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

Предложение 2. *На би-гамильтоновом многообразии $e(3)$ кубический полином*

$$C_e(\lambda) = H_3\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_1\lambda + H_0,$$

является функцией Казимира для пуассонова пучка $\mathcal{P}_e(\lambda) = \mathcal{P}'_e - \lambda\mathcal{P}_e$, т.е.

$$\mathcal{P}_e(\lambda)\, dC_e(\lambda) = 0. \tag{3.14}$$

Коэффициенты полинома $C_e(\lambda)$

$$\begin{aligned} &H_3 = \langle p, p\rangle, && H_2 = -\langle M, M\rangle - \langle p, \mathbf{B}p\rangle, \\ &H_0 = 2\langle p, M\rangle, && H_1 = \langle \mathbf{A}M, \mathbf{A}M\rangle + \langle \mathbf{A}^\vee p, \mathbf{A}^\vee p\rangle, \end{aligned} \tag{3.15}$$

образуют рекуррентную цепочку Ленарда

$$\mathcal{P}'_e d\, H_0 = 0, \quad \mathcal{P}'_e dH_{i+1} = \mathcal{P}_e dH_i, \quad \mathcal{P}_e dH_3 = 0$$

и являются интегралами движения для системы Клебша [1].

Пусть $\mathcal{P}$ тензора Пуассона отвечающий стандартным скобкам Ли–Пуассона (2.5)

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & t_3 & -t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отвечающий вторым скобкам (3.13) тензор Пуассона $\mathcal{P}'$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' = &\frac{\mathrm{tr}\mathbf{A}^{-2}}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{S}-\mathbf{T} & \mathbf{S}+\mathbf{T} \\ -\mathbf{S}-\mathbf{T} & \mathbf{T}-\mathbf{S} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{w}^{-2}\,\mathbf{A}^2\mathbf{T}\,\mathbf{A}^2 & -\mathbf{A}^{-2}\mathbf{T} - \mathbf{S}\mathbf{A}^{-2} \\ -\mathbf{T}\mathbf{A}^{-2} - \mathbf{A}^{-2}\mathbf{S} & \mathbf{w}^{-2}\,\mathbf{A}^2\mathbf{S}\,\mathbf{A}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как и ранее оба тензора $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ вырождены.

Предложение 3. *На би-гамильтоновом многообразии $so(4)$ кубический полином*

$$C(\lambda) = J_3\lambda^3 + J_2\lambda^2 + J_1\lambda + J_0,$$

является функцией Казимира для пуассонова пучка $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P} - \lambda\mathcal{P}'$. Коэффициенты полинома $C(\lambda)$

$$\begin{aligned} &J_3 = \langle \mathbf{A}(s-t), \mathbf{A}(s-t)\,\rangle, \\ &J_2 = -\langle \mathbf{A}^\vee(s+t), \mathbf{A}^\vee(s+t)\rangle - \langle \mathbf{A}^2(s-t), \mathbf{B}(s-t)\rangle, \\ &J_0 = 2\mathbf{w}\Big(\langle s,s\rangle - \langle t,t\rangle\Big), \quad J_1 = 2\mathbf{w}^2\Big(\langle s,s\rangle + \langle t,t\rangle\Big)\rangle, \end{aligned} \tag{3.16}$$

образуют рекуррентную цепочку Ленарда

$$\mathcal{P}dJ_0 = 0, \quad \mathcal{P}dJ_{i+1} = \mathcal{P}'J_i, \quad \mathcal{P}'J_3 = 0$$

и являются интегралами движения для системы Шоттки [3].

Скрученное пуассоново отображение f_1 (3.7) переводит траектории гамильтониана J_i в случае Шоттки на $so(4)$ относительно скобок (3.13) и (2.5) в траектории гамильтониана $H_i = f^*J_i$ в случае Клебша на $e(3)$ относительно скобок (2.1) и (3.12). То есть в этом случае имеет место обобщение обычного понятия траекторной эквивалентности интегрируемых систем на случай би-гамильтоновых многообразий.

Согласованные с исходными скобки Пуассона (3.12) и (3.13) и их многомерные обобщения изучались в работе [10]. В работе [11] построен алгоритм построения гиперэллиптических матриц Лакса, отвечающих данным скобкам. Согласно [6] эти матрицы Лакса можно использовать для интегрирования уравнений движения методом обратной задачи.

3.2. Случаи Стеклова.

Предложение 4. *Отображения f_2 и обратное ему f_2^{-1} являются скрученными пуассоновыми отображениями, которые связывают би-Гамильтоновы многообразия $so(4)$ и $e(3)$.*

Доказательство. Преобразование f_2 (3.8) отображает скобки Пуассона (2.5) на многообразии $so(4)$ и скобки Пуассона (2.1) на многообразии $e(3)$ в скобки Пуассона следующего вида

$$\begin{aligned} &\{M_i, M_j\}_e^* = -\varepsilon_{ijk}\Big(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j\,p_k + 2\mathbf{A}_k^2 M_k\Big), \\ &\{M_i, p_j\}_e^* = \varepsilon_{ijk}\mathbf{B}_j p_k, \quad \{p_i, p_j\}_e' = \varepsilon_{ijk}p_k, \end{aligned} \tag{3.17}$$

и

$$\begin{aligned} &\{s_i, s_j\}^* = 0, \quad \{s_i, t_j\}^* = \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\mathbf{w}^{-1}\mathbf{A}_j\,s_k, \\ &\{t_i, t_j\}^* = \frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\left(\mathbf{w}^{-1}\mathbf{A}_k\,s_k - \mathbf{A}_k^{-2}\,t_k\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Прямыми вычислениями доказывается, что эти скобки совместны с исходными скобками. Совместность скобок означает что многообразия $e(3)$ с парой скобок (2.1) (3.17) и многообразие $so(4)$ со скобками (2.5), (3.18) являются би-гамильтоновыми многообразиями, а преобразование f_2 (3.8) – скрученное пуассоново отображение.

Рассмотрим теперь интегрируемые системы, интегралы движения которых находятся в инволюции относительно обоих скобок Пуассона на $e(3)$ и $so(4)$. На многообразии $e(3)$ новым скобкам (3.17) отвечает тензор Пуассона $\mathcal{P}_e^*$

$$\mathcal{P}_e^* = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{PB} \\ \mathbf{PB} & -\mathbf{CPC} - 2w^2\mathbf{A}^{-2}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-2} \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, из-за вырожденности тензоров, мы не можем использовать оператор рекурсии $\mathcal{N}_e$ для построения цепочки Ленарда, стартуя с известных операторов Казимира (2.3).

Предложение 5. *На би-гамильтоновом многообразии $e(3)$ кубический полином*

$$\widetilde{C}_e(\lambda) = \widetilde{H}_3\lambda^3 + \widetilde{H}_2\lambda^2 + \widetilde{H}_1\lambda + \widetilde{H}_0$$

является функцией Казимира для пуассонова пучка $\widetilde{\mathcal{P}}_e(\lambda) = \mathcal{P}_e^* - \lambda\mathcal{P}_e$. Коэффициенты полинома $\widetilde{C}_e(\lambda)$

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}_3 = \langle p, p\rangle, \quad \widetilde{H}_2 = \langle p, M\rangle + \operatorname{tr}\mathbf{A}^2\langle p, p\rangle, \\ &\widetilde{H}_0 = \big\langle \mathbf{A}(M + \mathbf{B}p), \mathbf{A}(M + \mathbf{B}p)\big\rangle, \\ &\widetilde{H}_1 = \frac{1}{2}\big\langle M + \mathbf{B}p, M + \mathbf{B}p + 4\mathbf{A}^2 p\big\rangle \end{aligned} \tag{3.19}$$

образуют рекуррентную цепочку Ленарда

$$\mathcal{P}_e^* d\,\widetilde{H}_0 = 0, \quad \mathcal{P}_e^* d\widetilde{H}_{i+1} = \mathcal{P}_e d\widetilde{H}_i, \quad \mathcal{P}_e d\widetilde{H}_3 = 0$$

и являются интегралами движения для системы Стеклова–Ляпунова [2].

На многообразии $so(4)$ вторым скобкам Пуассона (3.18) отвечает тензор

$$\mathcal{P}^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -w^{-1}\mathbf{SA} \\ w^{-1}\mathbf{SA} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{SA}^{-1} - w^{-2}\mathbf{A}^2\mathbf{TA}^2 \end{pmatrix}.$$

Предложение 6. *На би-гамильтоновом многообразии $so(4)$ кубический полином*

$$\widetilde{C}(\lambda) = \widetilde{J}_3\lambda^3 + \widetilde{J}_2\lambda^2 + \widetilde{J}_1\lambda + \widetilde{J}_0,$$

является функцией Казимира для пуассонова пучка $\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda) = \mathcal{P} - \lambda\mathcal{P}^*$. Коэффициенты полинома $\widetilde{C}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_3 &= \langle s, s\rangle, & \widetilde{J}_2 &= \frac{1}{4}\langle \mathbf{A}s, \mathbf{A}s\rangle - \frac{1}{2}\langle s, \mathbf{A}^\vee t\rangle, \\ \widetilde{J}_0 &= \mathbf{w}\,\langle t, t\rangle, & \widetilde{J}_1 &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}^\vee t, \mathbf{A}^\vee t\rangle - \mathbf{w}\,\langle s, \mathbf{A}t\rangle \end{aligned} \tag{3.20}$$

образуют рекуррентную цепочку Ленарда

$$\mathcal{P}d\widetilde{J}_0 = 0, \quad \mathcal{P}d\widetilde{J}_{i+1} = \mathcal{P}^*\widetilde{J}_i, \quad \mathcal{P}^*\widetilde{J}_3 = 0$$

и являются интегралами движения для системы Стеклова [4].

Так же как и для систем Клебша и Шоттки данная пара скобок Пуассона может быть использована для построения гиперэллиптических матриц Лакса. Затем эти матрицы Лакса можно использовать для интегрирования уравнений движения методом обратной задачи [6].

Хотя пары скобок Пуассона (3.17), (3.18), а также их многомерные обобщения, и изучались в работе [12], но пуассоновы свойства самого отображения f_2 в этой работе не рассматривались.

4. Волчок Ковалевской

В заключение мы кратко обсудим не каноническое преобразование $f_3 : e(3) \to e(3)$ связывающее волчок Ковалевской и систему Неймана на на алгебре $e(3)$, которое было построено в работе [13].

Пусть L_k и γ_k координаты на втором экземпляре алгебры $e(3)$. В этом случае преобразование f_3 имеет вид

$$p = \alpha \left(-i\frac{L_1}{L_2},\ \frac{L_1^2 + L_2^2 + 1}{2L_2},\ i\frac{L_1^2 + L_2^2 - 1}{2L_2} \right), \qquad \alpha \in \mathbb{C},$$

и

$$M = \left(-i\frac{c\gamma_3}{L_2},\ \frac{2c\gamma_3 L_1 - L_3(L_1^2 + L_2^2 - 1)}{2L_2},\ i\frac{2c\gamma_3 L_1 - L_3(L_1^2 + L_2^2 + 1)}{2L_2} \right),$$

так что

$$A = |p|^2 = \alpha, \qquad B = \langle p, M \rangle = 0.$$

Согласно [13], это преобразование связывает две гамильтоновых системы - волчок Ковалевской с гамильтонианом

$$H = L_1^2 + L_2^2 + 2L_3^2 + 2c\gamma_1$$

и систему Неймана, для которой функция Гамильтона имеет вид

$$\widetilde{H} = \langle M, M \rangle + \langle \mathbf{A}\, p, p \rangle.$$

В работе [13] показано как это преобразование можно использовать для интегрирования уравнений движения волчка Ковалевской.

Мы можем доказать, что данное преобразование также является скрученным пуассоновым отображением. Однако, в отличие от рассматриваемых ранее отображений, соответствующие вторые скобки на многообразии $e(3)$ кубические, а не линейные. Мы выпишем только некоторые из них

$$\{p_i, p_j\}' \equiv f_3^* \{p_i(\gamma, L), p_j(\gamma, L)\} = \varepsilon_{ijk}\, p_k\, (M_2 + iM_3)(p_2 + ip_3).$$

Более подробно свойства этого преобразования рассмотрены в работе [14].

5. Заключение

В данной заметке мы рассмотрели несколько скрученных пуассоновых отображений би-гамильтоновых многообразий и доказали, что эти отображения позволяют полностью описать и исследовать соответствующие интегрируемые системы.

Литература

1. A. Clebsch, *Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit.* — Math. Annalen **3** (1870), 238–262.
2. В. А. Стеклов, *О движении твердого тела в жидкости.* — Харьков (1893).
3. F. Schottky, *Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen.* — Sitzungsberichte drer Königligh preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin **XIII** (1981), 227–232.
4. V. A. Steklov, *Sur la mouvement d'un corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes.* — Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse, Ser. 3 **1** (1909), 145–256.
5. В. Г. Барьяхтар, Е. Д. Белоколос, П. И. Голод, Препринт ИТФ-84-128Р, Киев (1984).
6. А. И. Бобенко, *Уравнения Эйлера на алгебрах* $e(3)$ *и* $so(4)$*. Изоморфизм интегрируемых случаев.* — Функц. анализ и его прил. **20** (1986), 64–66.
7. С. П. Новиков, *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.* — УМН **37** (1982), 3–49.
8. F. Kötter, *Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit.* I. II. — J. Reine und Angew. Math. **109** (1892), 51–81, 89–111.
9. M. Adler, P. van Moerbeke, *The Kowalewski and Hénon-Heiles motion as Manakov geodesic flow on* $SO(4)$ *and a two-dimensional family of Lax pairs.* — Commun. Math. Phys., **113** (1988), 659–700.
10. А. В. Болсинов, *Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **55** (1991), 68–92.
11. А. В. Болсинов, А. В. Борисов, *Представление Лакса и согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли.* — Мат. Замет. **72** (2002), 11–34.
12. Yu. N. Fedorov, *Integrable systems, Poisson pensils and hyperelliptic Lax pairs.* — Reg. Chaotic Dyn. **5** (2000), 171–180.
    A. V. Bolsinov, Yu. N. Fedorov, *Steklov–Lyapunov type systems.* Preprint (2003).
13. L. Haine, E. Horozov, *A Lax pair for the Kowalewski top.* — Physica D. **29**, (1987), 173–180.
14. I. V. Komarov, A. V. Tsiganov, *On integration of the Kowalevski gyrostat and the Clebsch problems.* — Reg. Chaotic Dyn. **9** (2004), 169–189.

Tsiganov A. V. On isomorphism of integrable cases of the Euler equations on the bi-hamiltonian manifolds $e(3)$ and $so(4)$.

The Poisson maps between the Clebsch model and the Schottky system, two Steklov systems, the Kowalevski top and the Neumann system are considered. We prove that these non-canonical transformations of variables are the twisted Poisson maps, which completely define the corresponding pairs of integrable systems.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Поступило 26 октября 2004 г.