Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 318, 2004 г.

**Г. И. Бижанова**

# О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ ДВУХФАЗНЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Посвящается памяти**
**Ольги Александровны Ладыженской**

## §1. Введение

Хорошо известны автомодельные решения одномерных задач со свободной границей Стефана [1, 2] и Н. Н. Веригина [3] для уравнений теплопроводности. Решение уравнений выражалось через интегралы вероятности, а свободная граница $\alpha(t)$ – в виде $\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}$, где коэффициент $\alpha_0$ находился из трансцендентного уравнения.

Работа посвящена нахождению точных решений одномерных двухфазных задач со свободной границей для параболических уравнений – задачи Стефана, вырожденной задачи Стефана, поставленной В. А. Флориным [4], задачи Веригина. В §2 построены автомодельные решения этих задач в случае вырождения в начальный момент времени одной из фаз – области $\Omega_1(t) = (0, \alpha(t))$ и рассогласования начального и краевых условий. В §3 найдены решения задач Стефана, Флорина, Веригина, а также задачи Стефана с "переохлаждением" и вырожденной задачи Стефана с "переохлаждением" [5–7], когда начальные и краевые данные не согласованы. В частности, показано, при каких соотношениях между данными задачи Стефана с "переохлаждением" вещество, находящееся в жидком состоянии, становится "переохлажденным", т.е. его температура в начальный момент времени будет меньше температуры плавления (кристаллизации) $u^*$, а твердое вещество – "перегретым" с температурой, большей, чем $u^*$. В §4 получены решения задач Стефана с "переохлаждением" в случае вырождения области $\Omega_1(t)$ при $t = 0$ и рассогласования начального и краевых условий. Во всех этих задачах свободная граница $\alpha(t)$ имеет вид $\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}$, где коэффициент $\alpha_0$ является корнем трансцендентного уравнения.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\beta_m = \frac{\alpha_0}{2a_m} + \frac{b_m}{a_m}, \quad \mu_m = \frac{b_m}{a_m}, \quad m = 1, 2,$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \operatorname{erf} x,$$

$$\operatorname{ierfc} x = \int\limits_x^\infty \operatorname{erfc} \xi \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc} x,$$

где $\operatorname{erfc} x$, и $\operatorname{ierfc} x$ – функции Хартри соответственно нулевого и первого порядков [8].

## §2. Задачи с вырождением одной из фаз и рассогласованием начальных и краевых данных

Рассмотрим три одномерные двухфазные задачи со свободной границей – задачи Стефана, Флорина и Веригина с рассогласованием начальных и краевых данных и вырождением одной фазы при $t = 0$. Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\alpha(t) > 0$, удовлетворяющие следующим параболическим уравнениям

$$\partial_t u_1 - a_1^2 \, \partial_x^2 u_1 - \frac{b_1}{\sqrt{t}} \, \partial_x u_1 = 0, \quad x \in (0, \alpha(t)) =: \Omega_1(t), \quad t > 0 \tag{2.1}$$

$$\partial_t u_2 - a_2^2 \, \partial_x^2 u_2 - \frac{b_2}{\sqrt{t}} \, \partial_x u_2 = 0, \quad x \in (\alpha(t), \infty) =: \Omega_2(t), \quad t > 0, \tag{2.2}$$

начальным и граничному условиям

$$\alpha|_{t=0} = 0, \ u_2|_{t=0} = c_2, \ x \in (0, \infty), \tag{2.3}$$

$$u_1|_{x=0} = c_1, \ t > 0. \tag{2.4}$$

Задаются условия на свободной границе $x = \alpha(t)$, $t > 0$

$$u_1 = u_2 = u_0, \tag{2.5}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2 \, \partial_x u_2 = -æ \frac{d\alpha}{dt} \tag{2.6}$$

в задаче Стефана (задача I);

$$u_1 = u_2 = u_0, \tag{2.7}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2 \, \partial_x u_2 = 0 \tag{2.8}$$

в задаче Флорина (задача II) и

$$u_1 = u_2, \tag{2.9}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 = \lambda_2 \, \partial_x u_2 = -æ \frac{d\alpha}{dt} \tag{2.10}$$

в задаче Веригина (задача III).

Здесь все коэффициенты, а также $c_1$, $c_2$, $u_0$ являются постоянными величинами, причем $a_m$, $\lambda_m$, $m = 1, 2$, æ – положительными.

Из постановок задач видно, что в силу условия $\alpha(0) = 0$ первая фаза $\Omega_1(t)$ отсутствует в начальный момент времени. Задача Стефана (2.1)–(2.6) описывает, например, процесс плавления вещества. В этом случае $u_1$ является температурой вещества в жидкой фазе, $u_2$ – температурой в твердой фазе, причем при $t = 0$ вещество находится в твердом состоянии, и жидкой фазы нет. Если поставить знак "+" в условии (2.6) перед коэффициентом æ, то $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ будут заняты твердой и жидкой фазами соответственно.

Построим точные (автомодельные) решения задач I–III, в которых начальные и граничные данные не согласованы.

**Теорема 2.1.** *Пусть*

$$æ > 0, \quad c_1 > u_0 \geqslant c_2,$$

*тогда задача Стефана* (2.1)–(2.6) *имеет решение в виде*

$$u_1(x,t) = c_1 - \frac{c_1 - u_0}{\operatorname{erf} \beta_1 - \operatorname{erf} \mu_1} \Big( \operatorname{erf} \Big( \frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1 \Big) - \operatorname{erf} \mu_1 \Big), \tag{2.11}$$

$$u_2(x,t) = c_2 + \frac{u_0 - c_2}{\operatorname{erfc} \beta_2} \operatorname{erfc} \Big( \frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2 \Big), \tag{2.12}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sqrt{t}, \quad \alpha_0 > 0, \tag{2.13}$$

*где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* (2.20).

**Теорема 2.2.** *Пусть*

$$c_1 > u_0 > c_2 \quad \textit{или} \quad c_1 < u_0 < c_2,$$

*тогда задача Флорина* (2.1)–(2.4), (2.7), (2.8) *имеет решение в виде* (2.11)–(2.13), *где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* (2.21).

**Теорема 2.3.** *Пусть*

$$æ > 0; \quad c_1 > c_2,$$

*тогда задача Веригина* (2.1)–(2.4), (2.9), (2.10) *имеет решение в виде*

$$u_1(x,t) = c_1 - \frac{æ\sqrt{\pi}a_1\alpha_0}{2\lambda_1}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1\right) - \operatorname{erf}\mu_1\right)e^{\beta_1^2}, \qquad (2.14)$$

$$u_2(x,t) = c_2 + \frac{æ\sqrt{\pi}a_2\alpha_0}{2\lambda_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2\right)e^{\beta_2^2}, \qquad (2.15)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}, \quad \alpha_0 > 0, \qquad (2.16)$$

*где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* (2.22).

**Доказательство теорем 2.1–2.3.** Найдем сначала функции $u_1$, $u_2$ и $\alpha(t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям (2.1), (2.2) и условиям (2.3), (2.4). Для этого произведем замену переменных $y = x/(2a_m\sqrt{t})$ в уравнениях, тогда для функции $v_m(y)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v_m'' + 2(y + \frac{b_m}{a_m})v_m' = 0,$$

решение которого имеет вид

$$v_m(y) = A_m + B_m \operatorname{erf}\left(y + \frac{b_m}{a_m}\right), \quad m = 1, 2,$$

где $A_m$, $B_m$ – произвольные постоянные.

Возвращаясь к переменным $(x,t)$, получим функции $u_m(x,t)$

$$u_m(x,t) = A_m + B_m \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_m\sqrt{t}} + \frac{b_m}{a_m}\right), \quad m = 1, 2, \qquad (2.17)$$

которые, как легко проверить, удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.2).

Из условий (2.3), (2.4) найдем коэффициенты $A_1$, $A_2$, тогда функции (2.17) примут вид

$$u_1(x,t) = c_1 + B_1\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1\right) - \operatorname{erf}\mu_1\right), \tag{2.18}$$

$$u_2(x,t) = c_2 - B_2\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2\right). \tag{2.19}$$

Свободную границу $\alpha(t)$ будем искать в виде $\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}$, $\alpha_0 > 0$.

**1.** Рассмотрим задачу I. Подставив функции (2.18), (2.19) в условия (2.5), найдем коэффициенты $B_1$, $B_2$, а вместе с ними и решение (2.11), (2.12), из условия Стефана (2.6) получим трансцендентное уравнение для определения коэффициента $\alpha_0$

$$f_1(\alpha_0) := \frac{\lambda_1}{a_1}\frac{c_1 - u_0}{\operatorname{erf}\beta_1 - \operatorname{erf}\mu_1}\,e^{-\beta_1^2} - \frac{\lambda_2}{a_2}\frac{u_0 - c_2}{\operatorname{erfc}\beta_2}\,e^{-\beta_2^2} = æ\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha_0. \tag{2.20}$$

a) Легко видеть, что если $c_1 > u_0$, $u_0 > c_2$, то $f_1(\alpha_0) \to \infty$ при $\alpha_0 \to +0$; $f_1(\alpha_0) \to -\infty$ при $\alpha_0 \to \infty$, кроме того, производная $f_1'(\alpha_0)$

$$\begin{aligned} f_1'(\alpha_0) = &-\frac{\lambda_1}{a_1^2}\frac{c_1 - u_0}{(\operatorname{erf}\beta_1 - \operatorname{erf}\mu_1)^2}\left(\operatorname{ierfc}\beta_1 + \beta_1\operatorname{erfc}\mu_1\right)e^{-\beta_1^2} - \\ &- \frac{\lambda_2}{a_2^2}\frac{u_0 - c_2}{\operatorname{erfc}^2\beta_2}\operatorname{ierfc}\beta_2\,e^{-\beta_2^2} \end{aligned}$$

отрицательна при $\forall\alpha_0 > 0$, т. е. функция $f_1(\alpha_0)$ монотонно убывает от $\infty$ до $-\infty$. Но тогда ее график пересечет прямую $y = æ\sqrt{\pi}\alpha_0/2$ в некоторой точке, и уравнение (2.20) имеет единственный корень в области $\alpha_0 > 0$.

b) Пусть $c_1 = u_0$, $u_0 > c_2$. Тогда $f_1(\alpha_0) \to -\lambda_2(u_0 - c_1)/(a_2\operatorname{erfc}\mu_2)\,e^{-\mu_2^2} < 0$ при $\alpha_0 \to +0$; $f_1(\alpha_0) \to -\infty$ при $\alpha_0 \to \infty$ и $f_1'(\alpha_0) < 0$ при $\alpha_0 > 0$. Отсюда следует, что уравнение (2.20) не имеет решения в области $\alpha_0 > 0$.

c) Пусть $c_1 > u_0$, $u_0 = c_2$. В этом случае $f_1(\alpha_0) \to \infty$ при $\alpha_0 \to +0$; $f_1(\alpha_0) \to +0$ при $\alpha_0 \to \infty$, $f_1'(\alpha_0) < 0$ при $\alpha_0 > 0$, и уравнение (2.20) имеет единственное решение в области $\alpha_0 > 0$.

Таким образом, при согласовании краевого и начального данных $u_0 = c_2$ решение задачи также существует. При согласовании $c_1 = u_0$ задача I не имеет решения.

Этот факт имеет обоснование с точки зрения физики. Как было упомянуто, задача I описывает процесс плавления вещества, которое находилось в твердом состоянии в начальный момент времени, т.е. жидкая фаза отсутствовала при $t = 0$, причем температура плавления вещества $u_0$ больше или равна начальной температуре в твердой фазе ($u_0 \geqslant c_2$). Для существования решения требуется, чтобы температура на границе области $x = 0$ была строго больше температуры плавления ($c_1 > u_0$). Это означает, что граничная температура $c_1$ является единственным источником тепла, приводящим к продвижению свободной границы и возникновению жидкой фазы.

**2.** Рассмотрим задачу II. Мы нашли коэффициенты $B_1$ и $B_2$ решения (2.18), (2.19) задачи I из условий (2.5). Так как в задаче II условия (2.7) точно такие же, что и условия (2.5), то решение $u_m$, $m = 1, 2$ задачи II имеет вид (2.11), (2.12). Для коэффициента $\alpha_0$ мы получим из условия (2.8) трансцендентное уравнение (2.20) с $æ = 0$

$$f_1(\alpha_0) := \frac{\lambda_1}{a_1} \frac{c_1 - u_0}{\operatorname{erf}\beta_1 - \operatorname{erf}\mu_1}\, e^{-\beta_1^2} - \frac{\lambda_2}{a_2} \frac{u_0 - c_2}{\operatorname{erfc}\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = 0. \qquad (2.21)$$

Пусть $c_1 > u_0$, $u_0 > c_2$. Функция $f_1(\alpha_0)$ непрерывна и монотонно убывает от $\infty$ до $-\infty$, тогда она обратится в нуль в некоторой точке $\alpha_0 > 0$, которая и будет единственным корнем уравнения (2.21) в области $\alpha_0 > 0$.

При $c_1 = u_0$, $u_0 > c_2$ и $c_1 > u_0$, $u_0 = c_2$ функция $f_1(\alpha_0)$ не пересекает ось абсцисс в области $\alpha_0 > 0$, и уравнение (2.21) не имеет положительного корня (см. п. 1: b), c)).

Пусть $c_1 < u_0$, $u_0 < c_2$. В этом случае $f_1(\alpha_0) \to -\infty$ при $\alpha_0 \to +0$; $f_1(\alpha_0) \to \infty$ при $\alpha_0 \to \infty$; $f_1'(\alpha_0) > 0$ при $\forall \alpha_0 > 0$. Отсюда следует, что функция $f_1(\alpha_0)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $\infty$ и существует точка $\alpha_0$, в которой она будет равна нулю. Это означает, что уравнение (2.21) имеет положительный корень.

Известно, что задача Флорина II описывает, в частности, процесс фильтрации жидкостей и газов в пористых телах с давлением $u_1$ и $u_2$, например, в воде и жидкой нефти. При $c_1 > u_0$, $u_0 > c_2$ давление в воде $c_1$ больше давления $c_2$ в нефти, в результате чего граница раздела жидкостей начнет продвигаться в сторону нефти ($\alpha_0 > 0$). Случай $c_1 < u_0$, $u_0 < c_2$, когда давление в воде $c_1$ меньше давления $c_2$ в нефти, теоретически приводит к существованию решения задачи, однако в данном примере оно не имеет объяснения.

**3.** Обратимся к задаче III. Из условий (2.10) найдем коэффициенты $B_1$, $B_2$ функций (2.18), (2.19), а вместе с ними и решение (2.14), (2.15). Из условия (2.9) получим трансцендентное уравнение для определения коэффициента $\alpha_0$

$$f_2(\alpha_0) := \lambda_1\lambda_2 \frac{c_1 - c_2}{a_1\lambda_2\,(\operatorname{erf}\beta_1 - \operatorname{erf}\mu_1)\,e^{\beta_1^2} + a_2\lambda_1 \operatorname{erfc}\beta_2\, e^{\beta_2^2}} = æ\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha_0. \quad (2.22)$$

Пусть $c_1 > c_2$. Тогда $f_2(\alpha_0) \to \lambda_2(c_1 - c_2)/(a_2 \operatorname{erfc}\mu_2)\,e^{\mu_2^2} > 0$ при $\alpha_0 \to +0$; $f_2(\alpha_0) \to +0$ при $\alpha_0 \to \infty$ и абсцисса точки пересечения графиков функции $y = f_2(\alpha_0)$ и прямой $y = æ\sqrt{\pi}\alpha_0/2$ будет положительным корнем уравнения (2.22).

В случаях $c_1 \leqslant c_2$ либо $æ = 0$ уравнение (2.22) не имеет решения в области $\alpha_0 > 0$. □

**Замечание 2.1.** Если положить $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ в уравнениях (2.1), (2.2) задач I и III, то мы получим из формул (2.11)–(2.13), (2.20) и (2.14)–(2.16), (2.22) известные автомодельные решения задач Стефана [2] и Веригина [3].

## §3. Задачи с рассогласованием начальных и краевых данных

Изучим задачи со свободной границей, в которых начальные и краевые данные не согласованы, но в начальный момент времени существуют обе фазы.

Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\alpha(t)$, удовлетворяющие следующим параболическим уравнениям:

$$\partial_t u_1 - a_1^2\,\partial_x^2 u_1 - \frac{b_1}{\sqrt{t}}\,\partial_x u_1 = 0, \ \ x \in (-\infty, \alpha(t)), \ \ t > 0, \qquad (3.1)$$

$$\partial_t u_2 - a_2^2\,\partial_x^2 u_2 - \frac{b_2}{\sqrt{t}}\,\partial_x u_2 = 0, \ \ x \in (\alpha(t), \infty), \quad t > 0, \qquad (3.2)$$

начальным условиям

$$\alpha|_{t=0} = 0, \qquad (3.3)$$

$$u_1|_{t=0} = c_1, \ \ x \in (-\infty, 0), \quad u_2|_{t=0} = c_2, \ \ x \in (0, \infty), \qquad (3.4)$$

и условиям на свободной границе $x = \alpha(t)$, $t > 0$

$$u_1 = u_2 = u_0, \tag{3.5}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2\, \partial_x u_2 = -æ \frac{d\alpha}{dt} \tag{3.6}$$

в задаче Стефана (задача IV);

$$u_1 = u_2 = u_0, \tag{3.7}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2\, \partial_x u_2 = 0 \tag{3.8}$$

в задаче Флорина (задача V);

$$u_1 = u_2, \tag{3.9}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 = \lambda_2\, \partial_x u_2 = -æ \frac{d\alpha}{dt} \tag{3.10}$$

в задаче Веригина (задача VI);

$$u_1 = u_2 = u_0 - \gamma\sqrt{t}\, \frac{d\alpha}{dt}, \tag{3.11}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2\, \partial_x u_2 = -æ \frac{d\alpha}{dt} \tag{3.12}$$

в задаче Стефана с “переохлаждением” (задача VII);

$$u_1 = u_2 = u_0 - \gamma\sqrt{t}\, \frac{d\alpha}{dt}, \tag{3.13}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2\, \partial_x u_2 = 0 \tag{3.14}$$

в вырожденной задаче Стефана с “переохлаждением” (задача VIII).

Здесь $c_1$, $c_2$, $u_0$ и все коэффициенты постоянные, причем $a_m > 0$, $\lambda_m > 0$, $m = 1, 2$, $æ > 0$.

Задача Стефана (3.1)–(3.4), (3.11), (3.12) описывает, в частности, процесс плавления вещества с учетом явления “переохлаждения”, при котором температура в жидкой (твердой) фазе может быть меньше (больше) температуры плавления или кристаллизации.

**Теорема 3.1.** *Пусть*

$$æ > 0; \quad g_1(0) \neq 0; \quad c_1 \geqslant u_0 > c_2 \quad \textit{или} \quad c_1 > u_0 \geqslant c_2,$$

*где функция* $g_1(\alpha_0)$ *определена в формуле (3.25).*

*Тогда задача Стефана* (3.1)–(3.6) *имеет решение в виде*

$$u_1(x,t) = c_1 - \frac{c_1 - u_0}{1 + \operatorname{erf}\beta_1}\Big(1 + \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1\Big)\Big), \tag{3.15}$$

$$u_2(x,t) = c_2 + \frac{u_0 - c_2}{\operatorname{erfc}\beta_2}\operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2\Big), \tag{3.16}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}, \tag{3.17}$$

*где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* (3.25), *причем* $\alpha_0 > 0$ *при* $g_1(0) > 0$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $g_1(0) < 0$.

**Теорема 3.2.** *Пусть*

$$g_1(0) \neq 0; \quad c_1 > u_0 > c_2 \quad \textit{или} \quad c_1 < u_0 < c_2,$$

*где функция* $g_1(\alpha_0)$ *определена в формуле* (3.26).

*Тогда задача Флорина* (3.1)–(3.4), (3.7), (3.8) *имеет решение в виде* (3.15)–(3.17), *где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* (3.26), *причем если* $c_1 > u_0 > c_2$, *то* $\alpha_0 > 0$ *при* $g_1(0) > 0$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $g_1(0) < 0$; *если* $c_1 < u_0 < c_2$, *то* $\alpha_0 > 0$ *при* $g_1(0) < 0$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $g_1(0) > 0$.

**Теорема 3.3.** *Пусть*

$$æ > 0; \quad c_1 \neq c_2.$$

*Тогда задача Веригина* (3.1)–(3.4), (3.9), (3.10) *имеет решение в виде*

$$u_1(x,t) = c_1 - \frac{æ\sqrt{\pi}a_1\,\alpha_0}{2\lambda_1}\Big(1 + \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1\Big)\Big)\,e^{\beta_1^2}, \tag{3.18}$$

$$u_2(x,t) = c_2 + \frac{æ\sqrt{\pi}a_2\,\alpha_0}{2\lambda_2}\operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2\Big)\,e^{\beta_2^2}, \tag{3.19}$$

$\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}$, *где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* (3.27), *причем* $\alpha_0 > 0$ *при* $c_1 > c_2$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $c_1 < c_2$.

**Теорема 3.4.** *Пусть*

$$æ > 0; \quad g_3(0) \neq 0; \quad c_1 \geqslant c_2,$$

*где функция* $g_3(\alpha_0)$ *определена в формуле* (3.28).

*Тогда задача Стефана с "переохлаждением"* (3.1)–(3.4), (3.11), (3.12) *имеет решение в виде*

$$u_1(x,t) = c_1 - \frac{c_1 - u_0 + \gamma\alpha_0/2}{1 + \mathrm{erf}\beta_1}\big(1 + \mathrm{erf}(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1)\big), \tag{3.20}$$

$$u_2(x,t) = c_2 + \frac{u_0 - c_2 - \gamma\alpha_0/2}{\mathrm{erfc}\,\beta_2}\,\mathrm{erfc}\,(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2), \tag{3.21}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}, \tag{3.22}$$

*где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* (3.28), *причем в случае* $c_1 > c_2$, *если* $\gamma > 0$, *то* $\alpha_0 > 0$ *при* $g_3(0) < 0$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $g_3(0) > 0$; *если* $\gamma < 0$, *то* $\alpha_0 > 0$ *при* $g_3(0) > 0$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $g_3(0) < 0$; *в случае* $c_1 = u_0 = c_2$ *и* $\gamma > 0$, *если уравнение* (3.29) *имеет единственный ненулевой корень, то коэффициент* $\alpha_0$ *определен и равен этому корню.*

**Теорема 3.5.** *Пусть*

$$g_3(0) \neq 0; \; c_1 > c_2 \quad \text{или} \quad c_1 < c_2,$$

*где функция* $g_3(\alpha_0)$ *определена в формуле* (3.30).

*Тогда вырожденная задача Стефана с "переохлаждением"* (3.1)–(3.4), (3.13), (3.14) *имеет решение в виде* (3.20)–(3.22), *где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения (3.30), причем если* $\gamma > 0$, *то* $\alpha_0 > 0$ *при* $g_3(0) < 0$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $g_3(0) > 0$; *если* $\gamma < 0$, *то* $\alpha_0 > 0$ *при* $g_3(0) > 0$ *и* $\alpha_0 < 0$ *при* $g_3(0) < 0$.

**Замечание 3.1.** Так как постановки задач IV и VII с $æ > 0$ предполагают, что область $(-\infty, \alpha(t))$, в частности, занята жидкостью, а $(\alpha(t), \infty)$ – твердым веществом, то в этих задачах ставится условие $c_1 > c_2$ или $c_1 \geqslant c_2$.

**Доказательство теорем 3.1–3.5.** В §2 были получены решения уравнений (3.1), (3.2) в виде (2.17). Из условий (3.4) найдем коэффициенты $A_m$, тогда функции $u_m$, $m = 1, 2$ принимают вид

$$u_1(x,t) = c_1 + B_1\left(1 + \mathrm{erf}\Big(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1\Big)\right), \quad -\infty < x < \alpha(t), \tag{3.23}$$

$$u_2(x,t) = c_2 - B_2 \,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2\right), \quad \alpha(t) < x < \infty. \qquad (3.24)$$

Свободную границу $\alpha(t)$ будем искать в виде $\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}$, где коэффициент $\alpha_0$ не равен нулю и может принимать любой знак в отличие от задач I–III.

**1.** Рассмотрим задачу Стефана IV. Из условий (3.5), (3.6) найдем коэффициенты $B_m$ функций (3.23), (3.24) и тем самым решение (3.15), (3.16) задачи, а для коэффициента $\alpha_0$ – трансцендентное уравнение

$$g_1(\alpha_0) := \frac{\lambda_1}{a_1}\frac{c_1 - u_0}{1 + \mathrm{erf}\beta_1}\, e^{-\beta_1^2} - \frac{\lambda_2}{a_2}\frac{u_0 - c_2}{\mathrm{erfc}\,\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = æ\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha_0, \qquad (3.25)$$

здесь $\beta_m = \alpha_0/(2a_m) + b_m/a_m$, $m = 1, 2$

a) Пусть $c_1 > u_0$, $u_0 > c_2$. Из формулы (3.25) видно, что $g_1(\alpha_0) \to \infty$ при $\alpha_0 \to -\infty$; $g_1(\alpha_0) \to -\infty$ при $\alpha_0 \to \infty$ и

$$\begin{aligned} g_1'(\alpha_0) = &-\frac{\lambda_1}{a_1^2}\frac{c_1 - u_0}{(1 + \mathrm{erf}\beta_1)^2}\mathrm{ierfc}\,(-\beta_1)\, e^{-\beta_1^2} - \\ &-\frac{\lambda_2}{a_2^2}\frac{u_0 - c_2}{\mathrm{erfc}^2\beta_2}\,\mathrm{ierfc}\,\beta_2\, e^{-\beta_2^2} < 0 \quad \forall \alpha_0 \in \mathbb{R}^1, \end{aligned}$$

т.е. функция $g_1(\alpha_0)$ монотонно убывает от $\infty$ до $-\infty$, но тогда график функции $y = g_1(\alpha_0)$ пересечет прямую $y = æ\,\sqrt{\pi}\alpha_0/2$ в некоторой точке, абсцисса которой будет корнем уравнения (3.25), причем этот корень положителен при $g_1(0) > 0$ и отрицателен при $g_1(0) < 0$ (в чем легко можно убедиться, построив схематически графики функций). Очевидно при $g_1(0) = 0$ корень уравнения (3.25) равен нулю.

b) Пусть $c_1 = u_0$, $u_0 > c_2$. В этом случае $g_1(\alpha_0) \to -0$ при $\alpha_0 \to -\infty$; $g_1(\alpha_0) \to -\infty$ при $\alpha_0 \to \infty$, $g_1'(\alpha_0) < 0$ при $\forall \alpha_0 \in \mathbb{R}^1$, $g_1(0) < 0$, и уравнение (3.25) имеет единственный отрицательный корень.

c) При $c_1 > u_0$, $u_0 = c_2$ функция $g_1(\alpha_0)$ монотонно убывает от $\infty$ до $+0$ при изменении $\alpha_0$ от $-\infty$ до $\infty$, $g_1(0) > 0$, и уравнение (3.25) имеет единственный положительный корень.

Заметим, что случай согласования данных $c_1 = u_0$, $u_0 = c_2$ приводит к нулевому решению уравнения (3.25).

Как было отмечено, задача Стефана моделирует, в частности, процесс плавления (кристаллизации) вещества. В рассматриваемой модели $u_1$ может быть температурой в жидкой фазе, $u_2$ –

температурой в твердой фазе. Полученное решение имеет следующую физическую интерпретацию. В случаях a) при $g_1(0) > 0$ и c) корень уравнения (3.25) $\alpha_0$ положителен и начнется процесс плавления вещества. В случаях a) при $g_1(0) < 0$ и b) коэффициент $\alpha_0$ отрицателен, и будет происходить процесс кристаллизации.

**2.** Рассмотрим задачу Флорина V. Ее решение имеет вид (3.15)–(3.17), где $\alpha_0$ является корнем уравнения (3.25) с $æ = 0$

$$g_1(\alpha_0) := \frac{\lambda_1}{a_1}\frac{c_1 - u_0}{1 + \mathrm{erf}\beta_1}\, e^{-\beta_1^2} - \frac{\lambda_2}{a_2}\frac{u_0 - c_2}{\mathrm{erfc}\,\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = 0. \tag{3.26}$$

Согласно п. 1: a) доказательства теоремы 3.1 при $c_1 > u_0$, $u_0 > c_2$ функция $g_1(\alpha_0)$ монотонно убывает от $\infty$ до $-\infty$, поэтому найдется точка $\alpha_0$, в которой она обратится в нуль, причем $\alpha_0 > 0$, если $g_1(0) > 0$ и $\alpha_0 < 0$, если $g_1(0) < 0$. В случаях п. 1: b) и c) график функции $g_1(\alpha_0)$ не пересечет ось абсцисс, и уравнение (3.26), а значит, и задача V не имеют решения.

Пусть $c_1 < u_0$, $u_0 < c_2$. В этом случае $g_1(\alpha_0) \to -\infty$ при $\alpha_0 \to -\infty$; $g_1(\alpha_0) \to \infty$ при $\alpha_0 \to \infty$; $g_1'(\alpha_0) > 0$ при $\forall \alpha_0 \in \mathbb{R}^1$, и уравнение (3.26) имеет единственное решение $\alpha_0$, причем $\alpha_0 > 0$ при $g_1(0) < 0$ и $\alpha_0 < 0$ при $g_1(0) > 0$.

В случае $c_1 = u_0$, $u_0 \neq c_2$ и $c_1 \neq u_0$, $u_0 = c_2$, а также при согласовании данных $c_1 = u_0 = c_2$ решение уравнения (3.26), а значит и задачи V не существует.

**3.** Обратимся к задаче Веригина VI. Используя представление решения в виде (3.23), (3.24), из условий (2.10), (2.9) найдем функции (3.18), (3.19) и трансцендентное уравнение для коэффициента $\alpha_0$

$$g_2(\alpha_0) := \lambda_1\lambda_2 \frac{c_1 - c_2}{a_1\lambda_2\,(1 + \mathrm{erf}\beta_1)\, e^{\beta_1^2} + a_2\lambda_1\, \mathrm{erfc}\,\beta_2\, e^{\beta_2^2}} = æ\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha_0. \tag{3.27}$$

Из формулы (3.27) видно, что $g_2(\alpha_0) \to +0\,\mathrm{sgn}\,(c_1 - c_2)$ при $\alpha_0 \to \pm\infty$, функция $g_2(\alpha_0)$ знакопостоянна для $\forall \alpha_0 \in \mathbb{R}^1$, ее знак зависит от знака разности $c_1 - c_2$. Отсюда следует, что график функции $g_2(\alpha_0)$ расположен сверху при $c_1 > c_2$ или снизу при $c_1 < c_2$ оси абсцисс, и уравнение (3.27) имеет положительный корень при $c_1 > c_2$ и отрицательный – при $c_1 < c_2$.

Известно, что задача Веригина моделирует, в частности, процесс фильтрации жидкостей в пористых средах, например, воды и нефти. Если $u_1$ – давление в воде, а $u_2$ – в нефти, то при $u_1|_{t=0} = c_1 > u_2|_{t=0} = c_2$ корень $\alpha_0$ уравнения (3.27) положителен, и свободная граница $x = \alpha_0 \sqrt{t}$ начнет продвигаться в сторону нефти, а при $c_1 < c_2$ – в сторону воды, т.к. коэффициент $\alpha_0$ будет отрицательным.

**4.** Решение (3.20), (3.21) задачи Стефана с "переохлаждением" VII находится сразу из формул (3.23), (3.24) после определения коэффициентов $B_m$, $m = 1, 2$, из условий (3.11); из условия Стефана (3.12) получим уравнение для коэффициента $\alpha_0$

$$\begin{aligned} g_3(\alpha_0) :&= \frac{\lambda_1}{a_1} \frac{c_1 - u_0 + \gamma\, \alpha_0/2}{1 + \operatorname{erf}\beta_1}\, e^{-\beta_1^2} - \\ &- \frac{\lambda_2}{a_2} \frac{u_0 - c_2 - \gamma\, \alpha_0/2}{\operatorname{erfc}\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = æ\, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha_0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Легко видеть, что $g_3(\alpha_0) \to -\infty \operatorname{sgn}\gamma$ при $\alpha_0 \to -\infty$; $g_3(\alpha_0) \to \infty \operatorname{sgn}\gamma$ при $\alpha_0 \to \infty$ и $g_3(\alpha_0) = O(\alpha_0^2)$ при $\alpha_0 \to \pm\infty$. Это означает, что графики функции $y = g_3(\alpha_0)$ и прямой $y = æ\sqrt{\pi}\alpha_0/2$ пересекутся в некоторой точке, абсцисса которой $\alpha_0$ будет корнем уравнения (3.28), причем, если $\gamma > 0$, то $\alpha_0 > 0$ при $g_3(0) < 0$ и $\alpha_0 < 0$ при $g_3(0) > 0$; если $\gamma < 0$, то $\alpha_0 > 0$ при $g_3(0) > 0$ и $\alpha_0 < 0$ при $g_3(0) < 0$.

При $c_1 = u_0$, $c_2 = u_0$ уравнение (3.28) имеет один корень $\alpha_0$, равный нулю, остальные корни определяются из уравнения

$$g_4(\alpha_0) := \frac{\lambda_1}{a_1} \frac{\gamma}{1 + \operatorname{erf}\beta_1}\, e^{-\beta_1^2} + \frac{\lambda_2}{a_2} \frac{\gamma}{\operatorname{erfc}\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = æ\sqrt{\pi}. \tag{3.29}$$

Отсюда видно, что функция $g_4(\alpha_0)$ знакопостоянна, причем $g_4(\alpha_0) \to \infty \operatorname{sgn}\gamma$ при $\alpha_0 \to \pm\infty$ и производная

$$g_4'(\alpha_0) = -\frac{\lambda_1}{a_1^2} \frac{\gamma}{(1 + \operatorname{erf}\beta_1)^2} \operatorname{ierfc}(-\beta_1)\, e^{-\beta_1^2} + \frac{\lambda_2}{a_2^2} \frac{\gamma}{\operatorname{erfc}^2\beta_2} \operatorname{ierfc}\beta_2\, e^{-\beta_2^2}$$

меняет знак в некоторой точке $\alpha_0$. В силу условия $æ > 0$ уравнение (3.29) при $\gamma > 0$ будет иметь либо два корня, если график функции $y = g_4(\alpha_0)$ пересечет прямую $y = æ\sqrt{\pi}$ в двух точках, либо ни одного, когда они не перецекаются, либо один, если прямая коснется график функции $y = g_4(\alpha_0)$ в точке ее минимума, абсцисса которой $\alpha_0$ и будет корнем уравнения (3.29). Задача будет иметь решение только в случае, если этот корень не равен нулю.

Эта задача, как и задача задача Стефана IV, описывает, в частности процесс плавления или кристаллизации вещества при условии, что область $(-\infty, \alpha(t))$ занята жидкой фазой, а $(\alpha(t), \infty)$ – твердой фазой. Температура плавления (кристаллизации) вещества согласно условию (3.11) равна $u^* = -\gamma\alpha_0/2 + u_0$. Посмотрим, как влияют данные задачи на процесс фазового перехода в этом примере.

Пусть $\gamma > 0$. При $1_1$) $c_1 > u_0$, $c_2 < u_0$, $g_3(0) > 0$; $2_1$) $c_1 > u_0$, $c_2 \geqslant u_0$ имеем $\alpha_0 < 0$, $u^* > u_0$, и температура в жидкой фазе в начальный момент времени $c_1$ может быть меньше температуры кристаллизации $u^*$ ($c_1 < u^*$), т.е жидкость будет "переохлажденной"; при $3_1$) $c_1 > u_0$, $c_2 < u_0$, $g_3(0) < 0$; $4_1$) $c_1 \leqslant u_0$, $c_2 < u_0$ получим, что $\alpha_0 > 0$, $u^* < u_0$, и температура в твердой фазе в начальный момент времени $c_2$ может быть больше температуры плавления $u^*$ ($c_2 > u^*$), т.е твердое вещество будет "перегретым" в процессе плавления.

Пусть теперь $\gamma < 0$. При $1_2$) $c_1 > u_0$, $c_2 < u_0$, $g_3(0) > 0$; $2_2$) $c_1 > u_0$, $c_2 \geqslant u_0$ корень $\alpha_0$ положителен, $u^* > u_0$, и начнется процесс плавления вещества, причем температура в жидкой фазе $c_1$ при $t = 0$ может быть меньше температуры плавления $u^*$ ($c_1 < u^*$), и жидкость будет "переохлажденной" в процессе плавления; при $3_2$) $c_1 > u_0$, $c_2 < u_0$, $g_3(0) < 0$; $4_2$) $c_1 \leqslant u_0$, $c_2 < u_0$ имеем отрицательный коэффициент $\alpha_0$, $u^* < u_0$, и начнется процесс кристаллизации вещества, причем температура в твердой фазе $c_2$ при $t = 0$ может быть больше температуры кристаллизации $u^*$ ($c_2 > u^*$), т.е твердое вещество окажется "перегретым" в процессе кристаллизации.

Кроме того, в случаях $2_1$), $2_2$) и $4_1$), $4_2$) не исключаются неравенства $c_2 > u^*$ и $c_1 < u^*$ соответственно, которые означают, что твердое вещество является "перегретым", а жидкость – "переохлажденной" в процессах плавления и кристаллизации.

Таким образом, теоретически решение задачи Стефана с "переохлаждением" существует во всех случаях соотношений между данными задачи при условии, что $c_1 \geqslant c_2$, причем жидкость может быть "переохлажденной" ($c_1 < u^*$) в процессах кристаллизации в случаях $1_1$), $2_1$), $4_2$) и плавления в случаях $4_1$), $1_2$), $2_2$), а твердое вещество – "перегретым" ($c_2 > u^*$) в процессах плавления в случаях $3_1$), $4_1$), $2_2$) и кристаллизации в случаях $2_1$), $3_2$), $4_2$). Это означает, что не выполняется основной постулат равновесной термодинамики, согласно которому температура в жидкой фазе должна быть больше или равна температуре фазового перехода ($c_1 \geqslant u^*$), а в твердой фазе – меньше или равна этой температуре ($c_2 \leqslant u^*$).

**5.** Рассмотрим вырожденную задачу Стефана с "переохлаждением" VIII. Ее решение имеет вид (3.20)–(3.22). Положив в формуле (3.28) æ равным нулю, получим уравнение для коэффициента $\alpha_0$

$$\begin{aligned} g_3(\alpha_0) : = \frac{\lambda_1}{a_1} \frac{c_1 - u_0 + \gamma\, \alpha_0 /2}{1 + \mathrm{erf}\beta_1}\, e^{-\beta_1^2} - \\ - \frac{\lambda_2}{a_2} \frac{u_0 - c_2 - \gamma\, \alpha_0/2}{\mathrm{erfc}\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Оно имеет решение $\alpha_0$, определяемое геометрически точкой пересечения графика функции $y = g_3(\alpha_0)$ с осью абсцисс, причем, как и в задаче VII, знак коэффициента $\alpha_0 > 0$ зависит от знаков величин $\gamma$ и $g_3(0)$. В этой задаче помимо соотношения между данными задачи VII $c_1 > c_2$ (см. п. 4: $1_m$)–$4_m$), $m = 1, 2$) не исключается также неравенство $c_1 < c_2$.

Случай $c_1 = c_2 = u_0$ не приводит к ненулевому корню $\alpha_0$, т.к. уравнение (3.30) сводится к уравнению

$$\frac{\lambda_1}{a_1} \frac{1}{1 + \mathrm{erf}\beta_1}\, e^{-\beta_1^2} + \frac{\lambda_2}{a_2} \frac{1}{\mathrm{erfc}\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = 0,$$

которое не имеет решения в $\mathbb{R}^1$ при $\forall\gamma$. □

## §4. Задачи Стефана с "переохлаждением"

Рассмотрим две нерегулярные задачи Стефана с "переохлаждением", в которых требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\alpha(t) > 0$, удовлетворяющие следующим параболическим уравнениям, начальным и граничному условиям:

$$\partial_t u_1 - a_1^2\, \partial_x^2 u_1 - \frac{b_1}{\sqrt{t}}\, \partial_x u_1 = 0, \ \ x \in (0, \alpha(t)) \quad t > 0 \tag{4.1}$$

$$\partial_t u_2 - a_2^2\, \partial_x^2 u_2 - \frac{b_2}{\sqrt{t}}\, \partial_x u_2 = 0, \ \ x \in (\alpha(t), \infty) \quad t > 0, \tag{4.2}$$

$$\alpha|_{t=0} = 0, \ u_2|_{t=0} = c_2, \ x \in (0, \infty), \tag{4.3}$$

$$u_1|_{x=0} = c_1, \ t > 0. \tag{4.4}$$

На свободной границе $x = \alpha(t)$, $t > 0$ задаются условия

$$u_1 = u_2 = u_0 - \gamma\sqrt{t}\,\frac{d\alpha}{dt}, \tag{4.5}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2\, \partial_x u_2 = -æ\frac{d\alpha}{dt} \tag{4.6}$$

в задаче Стефана с “переохлаждением” (задача IX) и условия

$$u_1 = u_2 = u_0 - \gamma\sqrt{t}\,\frac{d\alpha}{dt}, \tag{4.7}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2\, \partial_x u_2 = 0 \tag{4.8}$$

в вырожденной задаче Стефана с “переохлаждением” (задача X).

В отличие от задач Стефана с “переохлаждением” VII и VIII, рассмотренных в §3, в этих задачах первая фаза $(0, \alpha(t))$ отсутствует в начальный момент времени, и поэтому свободная граница $\alpha(t)$ должна быть возрастающей функцией, а в силу условия $\alpha(0) = 0$ – положительной, как и в задачах §2.

**Теорема 4.1.** *Пусть* $æ > 0$. *Задача Стефана с “переохлаждением”* (4.1)–(4.6) *имеет решение следующего вида*

$$u_1(x,t) = c_1 - \frac{c_1 - u_0 + \gamma\alpha_0/2}{\mathrm{erf}\beta_1 - \mathrm{erf}\mu_1}\Big(\mathrm{erf}\Big(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \mu_1\Big) - \mathrm{erf}\mu_1\Big), \tag{4.9}$$

$$u_2(x,t) = c_2 + \frac{u_0 - c_2 - \gamma\alpha_0/2}{\mathrm{erfc}\,\beta_2}\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + \mu_2\Big), \tag{4.10}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{t}, \ \alpha_0 > 0, \tag{4.11}$$

*где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения*

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_0) :=& \frac{\lambda_1}{a_1}\frac{c_1 - u_0 + \gamma\alpha_0/2}{\mathrm{erf}\beta_1 - \mathrm{erf}\mu_1}\, e^{-\beta_1^2} - \\ &- \frac{\lambda_2}{a_2}\frac{u_0 - c_2 - \gamma\alpha_0/2}{\mathrm{erfc}\,\beta_2}\, e^{-\beta_2^2} = æ\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha_0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

*если выполнено одно из следующих условий:* a) $c_2 \leqslant c_1 < u_0$, $\gamma > 0$; b) $c_2 < c_1 = u_0$, $\lim\limits_{\alpha_0 \to +0} \varphi(\alpha_0) < 0$, $\gamma > 0$; c) $c_2 \leqslant c_1$, $c_1 > u_0$, $\gamma < 0$.

**Теорема 4.2.** *Вырожденная задача Стефана с "переохлаждением"* (4.1)–(4.4), (4.7), (4.8) *имеет решение в виде* (4.9)–(4.11), *где* $\alpha_0$ *является корнем трансцендентного уравнения* $\varphi(\alpha_0) = 0$, *если выполнено одно из следующих условий:* a) $c_1 < u_0$, $\gamma > 0$; b) $c_1 = u_0$, $c_2 < u_0$, $\lim\limits_{\alpha_0 \to +0} \varphi(\alpha_0) < 0$, $\gamma > 0$; c) $c_1 > u_0$, $\gamma < 0$; d) $c_1 = u_0$, $c_2 > u_0$, $\lim\limits_{\alpha_0 \to +0} \varphi(\alpha_0) > 0$, $\gamma < 0$ *(здесь функция* $\varphi(\alpha_0)$ *определена в формуле* (4.12)*).*

**Доказательство теорем 4.1, 4.2.** Функции (4.9), (4.10) и уравнения (4.12), $\varphi(\alpha_0) = 0$ находятся из формул (2.11), (2.12) и (2.20), (2.21) с $u_0 - \gamma\alpha_0/2$ вместо $u_0$. Далее, заметим, что при $\alpha_0 \to \infty$ $\varphi(\alpha_0) = O(\alpha_0^2)$, $\varphi(\alpha_0) \to \infty\,\mathrm{sgn}\gamma$.

**1.** Рассмотрим задачу IX. На основании предыдущего замечания получим, что уравнение (4.12) имеет положительный корень в случае $\gamma > 0$, если a) $c_1 < u_0$, т.к. $\varphi(\alpha_0) \to -\infty$ при $\alpha_0 \to +0$; b) $c_1 = u_0$, $c_2 < u_0$ и $\lim\limits_{\alpha_0 \to +0} \varphi(\alpha_0) < 0$, а в случае $\gamma < 0$, если c) $c_1 > u_0$, т.к. $\varphi(\alpha_0) \to \infty$ при $\alpha_0 \to +0$.

Учитывая физический смысл задачи, отметим, что в случаях a) и c) возможно явление "переохлаждения" жидкости ($c_1 < u^*$), а в случаях a), b) и c) – "перегрев" твердого вещества ($c_2 > u^*$), здесь $u^* = u_0 - \gamma\alpha_0/2$ – температура плавления.

**2.** Обратимся к задаче X. Уравнение $\varphi(\alpha_0) = 0$ имеет решение в области $\alpha_0 > 0$ во всех случаях a)–c) пункта 1. Кроме того, в этой задаче не исключается случай d) $c_1 = u_0$, $c_2 > u_0$ и $\lim\limits_{\alpha_0 \to +0} \varphi(\alpha_0) > 0$ при $\gamma < 0$, который также приводит к положительному корню $\alpha_0$ уравнения $\varphi(\alpha_0) = 0$. □

## Литература

1. Л. И. Рубинштейн, *Проблема Стефана.* Звайгзне, Рига (1967).
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики.* Наука, М. (1972).
3. Н. Н. Веригин, *Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в условиях повышения прочности и непроницаемости оснований гидротехнических сооружений.* — Известия АН СССР No. 5 (1952), 674–687.
4. В. А. Флорин, *Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды.* – Известия АН СССР No. 1 (1951), 1625–1649.
5. A. Fridman, B. Hu, *The Stefan problem with kinetic condition at the free boundary.* — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **19**, No. 1, (1992), 87–111.

6. И. Г. Гетц, А. М. Мейрманов, *Обобщенное решение задачи Стефана с кинетическим переохлаждением.* — Сибирский журнал индустриальной математики **III**, No. 1 (5), (2000), 66–86..
7. G. I. Bizhanova, A. Sarsekeeva, *On the solvability of free boundary problems with supercooling.* – Far East Journal of Applied Mathematics, **15**, No. 2 (2004), 223–243.
8. *Справочник по специальным функциям* под ред. М. Абрамовца и И. Стиган. Наука, М. (1979).

Bizhanova G. I. On exact solutions of one-dimensional two phase free boundary problems for parabolic equations.

The paper is concerned with auto-modelling solutions of one-dimensional two phase Stefan, Florin, and Verigin free boundary problems for parabolic equations whose initial and boundary data are not adjusted. It is shown that in the Stefan problem with “supercooling” a liquid can have a temperature less than the temperature of the phase transition, i.e., a liqued can be “supercooled” and solid “superheated.”

Институт математики
Министерства образования
и науки Республики Казахстан
*E-mail*: galya@math.kz

Поступило 12 октября 2004 г.