Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 318, 2004 г.

М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина

УСРЕДНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ВНУТРЕННЕЙ ЛАКУНЫ

**Памяти дорогой
Ольги Александровны Ладыженской**

§0. Введение

1. Известную процедуру усреднения для полуограниченных периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ естественно рассматривать как спектральный пороговый эффект вблизи нижнего края спектра. Эта точка зрения последовательно проводится, например, в [5, 6]. В спектре периодических операторов возможны внутренние лакуны, края которых также являются источниками пороговых эффектов. Поэтому естественным является вопрос: можно ли связать с краями внутренних лакун аналоги процедуры усреднения? На простейшем примере одномерного периодического оператора $D_x g(x) D_x$ такие аналоги были описаны в [3], где также отмечалась возможность обобщений. Здесь мы рассматриваем такие обобщения применительно к многомерному периодическому оператору Шредингера при наличии метрики (см. ниже оператор (1.1)). Как постановка задачи, так и характер результатов, примерно те же, что и в [3]. Обнаруживаются, однако, и некоторые новые эффекты. Кроме того, потребовалась и несколько более продвинутая техника, которую удалось заимствовать из работ авторов [2, 8], где рассматривались пороговые эффекты в связи с задачами другого типа. Сравнение одномерного и многомерного случаев удобно отложить (см. п. 3.4). Впрочем, и при $d = 1$, и при $d > 1$, процедура усреднения, связанная с краем

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00798).

внутренней лакуны, несет на себе черты как порогового, так и высокоэнергетического эффектов.

2. В статье три параграфа. В §1 собраны нужные сведения о спектральных свойствах действующего в $L_2(\mathbb{R}^d)$ периодического оператора вида (1.1). В §2 исследуется поведение резольвенты этого оператора вблизи края внутренней спектральной лакуны. В §3 требуемые факты об усреднении выводятся из результатов §2 простым преобразованием масштаба. Кроме того, §3 содержит обсуждение полученных результатов.

3. Ниже через C, c (возможно, с индексами) обозначаются различные постоянные в оценках. Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают стандартное скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^d$. Через $\mathbf{1}$ обозначается единичная $(d\times d)$-матрица. Далее, $\nabla = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{D} = -i\nabla_{\mathbf{x}}$; $\Phi = \Phi_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\xi}}$ – оператор Фурье в $\mathbb{R}^d$. Через $\Omega = (0,1)^d$ обозначаем единичный куб в $\mathbb{R}^d$, через $\mathbb{T}^d$ – тор $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ с индуцированной $\mathbb{R}^d$-метрикой. Точки $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d$ обычно (но не всегда) будем реализовывать точками из $\widetilde{\Omega} = [-\pi,\pi)^d$.

Основную решетку периодов Γ в $\mathbb{R}^d$ без ограничения общности будем считать кубической: $\Gamma = \mathbb{Z}^d$. Действительно, сводя линейным преобразованием в $\mathbb{R}^d$ решетку Γ к $\mathbb{Z}^d$, мы преобразуем Γ-периодический оператор (1.1) к $\mathbb{Z}^d$-периодическому оператору того же вида.

Через H^1 ниже обозначается класс Соболева первого порядка гладкости с метрикой L_2-типа; через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ – подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, для которых $\mathbb{Z}^d$-периодическое продолжение принадлежит классу $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Наконец, через $\widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega)$ обозначим совокупность функций вида

$$u(\mathbf{x}) = \exp(i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle)v(\mathbf{x}),\quad v\in\widetilde{H}^1(\Omega),\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d. \tag{0.1}$$

Для функции $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ обозначаем через f^ε функцию

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\quad \varepsilon>0. \tag{0.2}$$

Далее, через $\overline{f}$ для $\mathbb{Z}^d$-периодической функции $f\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ обозначаем среднее значение по кубу Ω:

$$\overline{f} = \int\limits_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{0.3}$$

В связи с обозначением (0.3) мы вынуждены верхний индекс $*$ использовать не только для обозначения сопряженного оператора, но и для обозначения комплексно-сопряженной функции.

Через $[f]$ обозначается оператор умножения на функцию f.

4. В ряде случаев утверждения и формулы статьи содержат двойные индексы "$\pm$". Они *при каждом из двух индексов должны читаться независимо.* Если ссылка на формулу нужна лишь при одном индексе, последний дописывается к номеру формулы.

5. Благодарности. Авторы с благодарностью отмечают, что настоящая работа завершена во время визита авторов в Университет Чалмерс (Гетеборг) при поддержке гранта Шведской Академии Естественных Наук. Особо авторы благодарят проф. Г. Розенблюма (Университет Чалмерс) за гостеприимство и стимулирующие обсуждения.

§1. Спектральные свойства периодического оператора Шредингера

1. Определение оператора. Спектральное разложение. В $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, рассмотрим самосопряженный оператор A, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} + p(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где g – симметричная вещественная измеримая $(d \times d)$-матрица-функция, p – вещественная функция, причем

$$c_0 \mathbf{1} \leq g(\mathbf{x}) \leq c_1 \mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \leq c_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

$$p \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \tag{1.3}$$

$$p(\mathbf{x}+\mathbf{n}) = p(\mathbf{x}), \quad g(\mathbf{x}+\mathbf{n}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.4}$$

Точное определение оператора A дается через полуограниченную замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^d)$ квадратичную форму

$$a[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} (\langle g(\mathbf{x})\nabla u, \nabla u\rangle + p(\mathbf{x})|u|^2)\, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Далее, в $L_2(\Omega)$ рассмотрим семейство замкнутых форм

$$a_{\boldsymbol{\xi}}[u,u] = \int_{\Omega} (\langle g(\mathbf{x})\nabla u, \nabla u\rangle + p(\mathbf{x})|u|^2)\, d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.5}$$

Порожденный полуограниченной формой (1.5) самосопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор обозначим через $A(\boldsymbol{\xi})$. Все операторы $A(\boldsymbol{\xi})$ имеют дискретный спектр. Пусть $E_l(\boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, – последовательные (с учетом кратностей) собственные значения оператора $A(\boldsymbol{\xi})$ и $\psi_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ – соответствующие нормированные собственные функции. Таким образом,

$$E_1(\boldsymbol{\xi}) \leq E_2(\boldsymbol{\xi}) \leq \cdots \leq E_l(\boldsymbol{\xi}) \leq \ldots, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

"Зонные функции" E_l непрерывны (даже липшицевы) и $(2\pi\mathbb{Z})^d$-периодичны. При этом спектр оператора A совпадает с объединением отрезков (зон), являющихся образами функций E_l. Собственные функции ψ_l также можно выбрать $(2\pi\mathbb{Z})^d$-периодическими по $\boldsymbol{\xi}$. В соответствии с (0.1), они имеют представление

$$\psi_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \varphi_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \varphi_l(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{1.6}$$

В силу (1.2)–(1.4) функции ψ_l, φ_l гельдеровски непрерывны по $\mathbf{x}$.

Добавляя, если нужно, к функции p постоянную, *будем, без ограничения общности, считать, что*

$$\inf \operatorname{spec} A = \min_{\boldsymbol{\xi}} E_1(\boldsymbol{\xi}) = 0. \tag{1.7}$$

Сразу же отметим, что $E_1(0) = 0$, $E_1(\boldsymbol{\xi}) > 0$ при $\boldsymbol{\xi} \neq 0 \pmod{(2\pi\mathbb{Z})^d}$ и $\min_{\boldsymbol{\xi}} E_2(\boldsymbol{\xi}) > 0$.

Рассмотрим теперь интегральные операторы Ψ_l,

$$(\Psi_l u)(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_l^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Отображения

$$\Psi_l : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$$

– *частично изометрические отображения "на"*. Операторы $\Psi_l^* \Psi_l$, $l \in \mathbb{N}$, суть ортопроекторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Они попарно ортогональны и

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \Psi_l^* \Psi_l = I.$$

Операторы (1.8) дают диагонализацию оператора A. Именно, справедливо представление

$$A = \sum_{l \in \mathbb{N}} \Psi_l^* [E_l] \Psi_l. \tag{1.9}$$

2. Лакуна. Спектр A может содержать внутренние лакуны помимо полубесконечной (см. (1.7)) лакуны $(-\infty, 0)$. Пусть $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ – лакуна, причем $\lambda_\pm \in \operatorname{spec} A$. В случае внутренней лакуны, очевидно, $\lambda_- > 0$. Чтобы в дальнейшем не исключать полубесконечной лакуны $(-\infty, 0)$, будем для нее полагать $\lambda_+ = 0$ и условимся формально считать $E_0(\boldsymbol{\xi}) = -\infty$, $\lambda_- = -\infty$.

Очевидно, для некоторого значения $s \in \mathbb{Z}_+$ выполнено

$$\lambda_+ = \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^d} E_{s+1}(\boldsymbol{\xi}), \quad \lambda_- = \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^d} E_s(\boldsymbol{\xi}). \tag{1.10}$$

При этом для внутренней лакуны непременно $s \in \mathbb{N}$.

Примем обычное (ср. [1, 2, 8]) предположение "правильности" края лакуны. Именно, введем следующие условия, которые не обязательно предполагаются выполненными одновременно.

Условие 1(+). а) $\min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^d} E_{s+2}(\boldsymbol{\xi}) > \lambda_+$. б) *Минимум в* (1.10) *достигается лишь в конечном числе точек* $\boldsymbol{\xi}_j^{(+)} \in \mathbb{T}^d$, $j = 1, \dots, m_+$, *каждая из которых есть точка невырожденного минимума функции* E_{s+1}.

Условие 1(−). а) $\max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^d} E_{s-1}(\boldsymbol{\xi}) < \lambda_-$. б) *Максимум в* (1.10) *достигается лишь в конечном числе точек* $\boldsymbol{\xi}_j^{(-)} \in \mathbb{T}^d$, $j = 1, \dots, m_-$, *каждая из которых есть точка невырожденного максимума функции* E_s.

Разумеется, условие 1(−) осмыслено лишь при $s \geq 1$. В силу сказанного в п. 1, условие 1(+) при $\lambda_+ = 0$ выполнено автоматически, причем $m_+ = 1$ и $\boldsymbol{\xi}_1^{(+)} = 0$. Для удобства дальнейшего примем обозначения

$$s_+ = s + 1, \quad s_- = s.$$

В силу условия 1(±), п. а, число $\lambda_\pm$ является *простым собственным значением* оператора $A(\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, $j = 1, \dots, m_\pm$. Отсюда следует, что в некоторых (попарно не пересекающихся) окрестностях $\mathcal{E}_j^{(\pm)}$ точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, $j = 1, \dots, m_\pm$, *функция* $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$ *вещественно аналитична.* Условимся считать, что для точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$ принята реализация $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)} \in \widetilde{\Omega}$, а их окрестности $\mathcal{E}_j^{(\pm)}$ реализованы шарами в $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{E}_j^{(\pm)} = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,\ |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}| < \delta\}, \tag{1.11}$$

где δ достаточно мало. Тогда условие $1(\pm)$, п. б, означает, что

$$\pm(E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_\pm) = b_j^{(\pm)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}) + O(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}|^3), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j^{(\pm)}, \\ j = 1, \dots, m_\pm, \tag{1.12}$$

где $b_j^{(\pm)}$ – положительно определенные квадратичные формы в $\mathbb{R}^d$.

Соответствующие собственные функции $\psi_{s_\pm}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ и $\varphi_{s_\pm}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ (они связаны соотношениями вида (1.6)) также можно выбрать вещественно аналитическими в окрестностях (1.11) функциями со значениями в $H^1(\Omega)$.

Заметим, что за счет уменьшения δ можно считать функции $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$, $\psi_{s_\pm}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$, $\varphi_{s_\pm}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ аналитически продолженными на *комплексные δ-шары с центрами* $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$. При таком продолжении $L_2(\Omega)$-нормировка функций $\psi_{s_\pm}$, $\varphi_{s_\pm}$ утрачивается.

Во всем дальнейшем лакуна Λ фиксирована и индекс s часто опускается в обозначениях. Будем также использовать краткие обозначения

$$\psi_{s_\pm}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}) = \psi_j^{(\pm)}(\mathbf{x}) = e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\rangle} \varphi_j^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, m_\pm. \tag{1.13}$$

Напомним, что функции $\psi_j^{(\pm)}$, $\varphi_j^{(\pm)}$ гельдеровски непрерывны.

§2. Аппроксимация резольвенты вблизи края лакуны

1. Как уже упоминалось, вопрос о гомогенизации сводится к изучению поведения резльвенты оператора A вблизи края лакуны. Случаи правого и левого краев лакуны рассматриваются вполне аналогично. Поэтому все рассуждения в этом параграфе проводятся для правого края $\lambda = \lambda_+$. При этом индекс “+” в обозначениях опускается. Кроме того, будем писать $E = E_{s+1}$, $\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \psi_{s+1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\Psi = \Psi_{s+1}$.

Пусть $\lambda - \varkappa^2 \in \Lambda$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ – параметр. Сейчас наша цель – найти подходящую аппроксимацию для резольвенты

$$S(\varepsilon) = (A - (\lambda - \varepsilon^2\varkappa^2)I)^{-1} \tag{2.1}$$

при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d)$ операторы $b_j(\mathbf{D})$, $j = 1, \dots, m$, где b_j – квадратичные формы из $(1.12)_+$. Тогда $b_j(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^*\beta_j\mathbf{D}$, β_j – постоянная положительная матрица, такая что $b_j(\boldsymbol{\eta}) = \langle \beta_j\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\rangle$,

$\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$S^0(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} [\psi_j](b_j(\mathbf{D}) + \varepsilon^2 \varkappa^2 I)^{-1}[\psi_j^*], \qquad (2.2)$$

где $\psi_j(\mathbf{x}) = \psi_j^{(+)}(\mathbf{x})$ – функции, определенные в $(1.13)_+$.

Теорема 2.1. *В обозначениях* (2.1), (2.2) *справедлива оценка*

$$\varepsilon \| S(\varepsilon) - S^0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \qquad (2.3)$$

2. *Дальнейшее содержание* §2 *составляет получение оценки* (2.3).

Предположим, что $\delta > 0$ в $(1.11)_+$ настолько мало, что (см. $(1.12)_+$) выполнено неравенство

$$2(E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda) \geq b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j, \quad j = 1, \dots, m. \qquad (2.4)$$

Пусть $\chi_j(\boldsymbol{\xi})$ – характеристическая функция множества $\mathcal{E}_j$,

$$\chi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(\boldsymbol{\xi}), \quad \widetilde{\chi}(\boldsymbol{\xi}) = 1 - \chi(\boldsymbol{\xi}).$$

Тогда $L_2(\mathbb{R}^d)$-ортопроекторы $F = \Psi^*[\chi]\Psi$ и $F^\perp = I - F$ перестановочны с A. Запишем резольвенту (2.1) в виде

$$S(\varepsilon) = S(\varepsilon)F + S(\varepsilon)F^\perp, \qquad (2.5)$$

где, в соответствии с (1.9),

$$S(\varepsilon)F = \Psi^*[\chi(E - \lambda + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]\Psi, \qquad (2.6)$$

$$S(\varepsilon)F^\perp = \sum_{l \neq s+1} \Psi_l^*[(E_l - \lambda + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]\Psi_l + \Psi^*[\widetilde{\chi}(E - \lambda + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]\Psi. \qquad (2.7)$$

В силу условия 1(+), функции $(E_l(\boldsymbol{\xi}) - \lambda + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}$, $l \neq s+1$, и $\widetilde{\chi}(\boldsymbol{\xi})(E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}$ ограничены равномерно по $\varepsilon > 0$, а потому

$$\|S(\varepsilon)F^\perp\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1. \qquad (2.8)$$

3. Согласно (2.5)–(2.8), дело сводится к аппроксимации оператора (2.6). Запишем (2.6) в виде

$$S(\varepsilon)F = \sum_{j=1}^{m} X_j^*[(E - \lambda + \varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_j, \qquad (2.9)$$

где $X_j : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ – интегральный оператор с ядром

$$(2\pi)^{-d/2}\chi_j(\boldsymbol{\xi})e^{-i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}(\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}))^*, \quad j=1,\dots,m. \tag{2.10}$$

Оператор X_j ограничен. Более того, $\|X_j\| \le 1$. Пусть теперь X_j^0 – (ограниченный) интегральный оператор с ядром

$$(2\pi)^{-d/2}\chi_j(\boldsymbol{\xi})e^{-i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}(\varphi_j(\mathbf{x}))^*, \quad j=1,\dots,m. \tag{2.11}$$

Оценим разность

$$G_j := X_j^*[(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_j-(X_j^0)^*[(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_j^0. \tag{2.12}$$

В силу $(1.12)_+$ и (2.4), при $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}\varepsilon|(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}-(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}| \le \\ c\varepsilon|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^3(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1} \le \\ \left(c|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))^{-1}\right)\left(2\varepsilon|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}\right) \le C_2,\end{gathered}$$

где C_2 не зависит от j, от $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j$ и от $\varepsilon\in(0,1]$. Следовательно, для

$$G_j^{(1)} := X_j^*[(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}-(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_j \tag{2.13}$$

выполнена оценка

$$\varepsilon\|G_j^{(1)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_2, \quad j=1,\dots,m. \tag{2.14}$$

4. Вследствие (2.12), (2.13)

$$G_j = G_j^{(1)}+G_j^{(2)}, \quad j=1,\dots,m, \tag{2.15}$$

где

$$G_j^{(2)} := X_j^*[(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_j-(X_j^0)^*[(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_j^0. \tag{2.16}$$

Оператор (2.16) можно переписать в виде

$$G_j^{(2)} = W_j^*W_j-(W_j^0)^*W_j^0, \quad j=1,\dots,m, \tag{2.17}$$

где ограниченные в $L_2(\mathbb{R}^d)$ операторы W_j, W_j^0 суть

$$W_j = [(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2}]X_j, \quad j=1,\dots,m, \tag{2.18}$$

$$W_j^0 = [(b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varepsilon^2 \varkappa^2)^{-1/2}] X_j^0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.19}$$

Тогда, в соответствии с (2.10), (2.11),

$$W_j - W_j^0 = [(b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varepsilon^2 \varkappa^2)^{-1/2} \chi_j(\boldsymbol{\xi})](X_j - X_j^0), \tag{2.20}$$

причем $X_j - X_j^0$ есть интегральный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с ядром

$$(2\pi)^{-d/2} \chi_j(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} (\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\mathbf{x}))^*, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.21}$$

При анализе ядра (2.21) используем (ср. [2, (4.31)]) элементарное представление

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{d} (\xi^k - \xi_j^k) \gamma_{jk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j, \quad j = 1, \dots, m, \tag{2.22}$$

$$\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_0^1 \partial_k \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j + t(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j))\, dt, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j, \quad j = 1, \dots, m, \tag{2.23}$$

где $\partial_k \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^k}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$. Из (2.23) видно, что функции $\gamma_{jk}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$, вместе с $\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})$, аналитические по $\boldsymbol{\xi}$ в шаре $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j| < \delta$ $\widetilde{H}^1(\Omega)$-значные функции. При этом, как это пояснено в конце §1, шар аналитичности можно считать комплексным. Опираясь на последнее обстоятельство, можно показать, что функции γ_{jk} допускают оценку в классе Соболева любого порядка:

$$\sup_{\mathbf{x}} \|\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{H^r(\mathcal{E}_j)} < \infty, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Соответствующие рассуждения проведены в [2, п. 4.9]. При этом использовались результаты из [7] (см. теорему VII.2.1) о системах уравнений дивергентного вида с одинаковыми главными частями.

При $2r > d$ из (2.24) следует, что каждая из функций $\chi_j(\boldsymbol{\xi}) \gamma_{jk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ является мультипликатором на множестве ядер ограниченных в $L_2(\mathbb{R}^d)$ интегральных операторов. (Подробности по поводу таких мультипликаторов можно найти, например, в обзоре [4, §8,9]).

Из (2.20)–(2.22) видно, что

$$W_j - W_j^0 = \sum_{k=1}^{d} [(b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varepsilon^2 \varkappa^2)^{-1/2} \chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)] U_{jk}, \tag{2.25}$$

где U_{jk} – интегральный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с ядром

$$(2\pi)^{-d/2}\chi_j(\boldsymbol{\xi})e^{-i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}(\gamma_{jk}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}))^*, \quad j=1,\dots,m, \quad k=1,\dots,d. \tag{2.26}$$

Ядро (2.26) отличается от ядра оператора Фурье множителем $\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\gamma_{jk}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}))^*$, который, как было сказано выше, является мультипликатором. Поэтому и каждый из операторов U_{jk} ограничен. Далее,

$$|\xi^k - \xi^k_j|(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2} \le c,$$

и в итоге для операторов (2.25) получается оценка

$$\|W_j - W_j^0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_3, \quad j=1,\dots,m, \tag{2.27}$$

с постоянной, не зависящей от $\varepsilon \in (0,1]$.

5. Поскольку $\varepsilon(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1/2} \le \varkappa^{-1}$, то, в соответствии с (2.18), (2.19), справедливы оценки

$$\varepsilon(\|W_j\| + \|W_j^0\|) \le c, \quad j=1,\dots,m, \tag{2.28}$$

для норм действующих в $L_2(\mathbb{R}^d)$ операторов W_j, W_j^0. Записывая (2.17) в виде

$$G_j^{(2)} = W_j^*(W_j - W_j^0) + (W_j - W_j^0)^* W_j^0,$$

получаем из (2.27), (2.28) оценку

$$\varepsilon\|G_j^{(2)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_4, \quad j=1,\dots,m. \tag{2.29}$$

Наконец, из (2.14), (2.15) и (2.29) находим, что

$$\varepsilon\|G_j\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_2 + C_4, \quad j=1,\dots,m. \tag{2.30}$$

6. В силу (2.9), (2.12) имеем:

$$S(\varepsilon)F = \sum_{j=1}^m S_j(\varepsilon) + \sum_{j=1}^m G_j, \tag{2.31}$$

$$S_j(\varepsilon) := (X_j^0)^*[(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]X_j^0,$$

причем для операторов G_j выполнена оценка (2.30). По определению (2.11) ядер операторов X_j^0 можем написать:

$$S_j(\varepsilon) = [\varphi_j]\Phi^*[(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}\chi_j(\boldsymbol{\xi})]\Phi[\varphi_j^*] = S_j^0(\varepsilon) + \widetilde{S}_j(\varepsilon), \tag{2.32}$$

$$S_j^0(\varepsilon) := [\varphi_j]\Phi^*[(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}]\Phi[\varphi_j^*] = [\psi_j](b_j(\mathbf{D})+\varepsilon^2\varkappa^2 I)^{-1}[\psi_j^*], \tag{2.33}$$

$$\widetilde{S}_j(\varepsilon) := [\varphi_j]\Phi^*[(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varepsilon^2\varkappa^2)^{-1}(1-\chi_j(\boldsymbol{\xi}))]\Phi[\varphi_j^*]. \tag{2.34}$$

Для операторов (2.34) норма, очевидно, оценивается постоянной, не зависящей от ε:

$$\|\widetilde{S}_j(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_5, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.35}$$

Теперь из (2.30)–(2.33) и (2.35) следует, что

$$\varepsilon\|S(\varepsilon)F - S^0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_6. \tag{2.36}$$

(Здесь использовано обозначение (2.2)). Наконец, оценка (2.3) прямо вытекает из (2.5), (2.8) и (2.36). Теорема 2.1 доказана.

§3. Усреднение вблизи края лакуны

1. Сначала займемся правым краем лакуны. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператор $A(\varepsilon)$, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} p^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \varepsilon \in (0,1], \tag{3.1}$$

при записи которого использовано обозначение (0.2). Точное определение оператора $A(\varepsilon)$ дается через соответствующую квадратичную форму. Оператор $A(\varepsilon)$, очевидно, имеет лакуну $\Lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\Lambda$, правый край которой есть $\varepsilon^{-2}\lambda$. Поэтому надо найти подходящее приближение для резольвенты

$$R(\varepsilon) = (A(\varepsilon) - (\varepsilon^{-2}\lambda - \varkappa^2)I)^{-1}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \tag{3.2}$$

при малых ε. Масштабное преобразование сводит дело к теореме 2.1. Пусть T_ε, $\varepsilon > 0$, – семейство унитарных в $L_2(\mathbb{R}^d)$ операторов

$$T_\varepsilon : u(\mathbf{x}) \mapsto \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon\mathbf{x}).$$

Рассмотрим оператор

$$R^0(\varepsilon) = \sum_{j=1}^m [\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[(\psi_j^\varepsilon)^*]. \tag{3.3}$$

Очевидно, для операторов (2.1), (3.2) выполнено

$$R(\varepsilon) = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* S(\varepsilon) T_\varepsilon,$$

и аналогично для операторов (2.2), (3.3)

$$R^0(\varepsilon) = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* S^0(\varepsilon) T_\varepsilon .$$

Теперь из (2.3) непосредственно вытекает результат об усреднении для правого края лакуны. Рассмотрения для левого края лакуны вполне аналогичны, и мы их опускаем. Окончательные результаты мы сформулируем в объединенном виде, для чего вернемся к обозначениям, содержащим индексы “$\pm$”.

2. Пусть $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ – спектральная лакуна для оператора A и число $\varkappa^2$ таково, что

$$\lambda_\pm \mp \varkappa^2 \in \Lambda, \quad \varkappa^2 > 0. \tag{3.4}$$

Используем согласованные с (3.2), (3.3) обозначения

$$R_\pm(\varepsilon) = (A(\varepsilon) - (\varepsilon^{-2}\lambda_\pm \mp \varkappa^2)I)^{-1}, \tag{3.5}$$

$$R_\pm^0(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m_\pm} [(\psi_j^{(\pm)})^\varepsilon](b_j^{(\pm)}(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[((\psi_j^{(\pm)})^\varepsilon)^*]. \tag{3.6}$$

Мы установили следующее утверждение.

Теорема 3.1($\pm$). *Пусть A – оператор, порожденный в $L_2(\mathbb{R}^d)$ выражением* (1.1), *и $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ – лакуна в спектре оператора A. Предположим, что выполнено условие* 1($\pm$), *а также* (3.4)$_\pm$. *Пусть $A(\varepsilon)$ – оператор, порожденный в $L_2(\mathbb{R}^d)$ выражением* (3.1). *Тогда справедлива оценка*

$$\|R_\pm(\varepsilon) \mp R_\pm^0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \tag{3.7}$$

где операторы $R_\pm(\varepsilon)$, $R_\pm^0(\varepsilon)$ определены в (3.5), (3.6).

3. Оператор $\pm R_\pm^0(\varepsilon)$ играет роль “усредненного оператора” для резольвенты $R_\pm(\varepsilon)$. Он, однако, содержит операторы умножения, осциллирующие при $\varepsilon \to 0$. Зависимость от ε можно попытаться устранить, ослабив результат. Именно, можно вычислить слабый $L_2(\mathbb{R}^d)$-предел для $R_\pm(\varepsilon)$. В силу (3.7), для этого достаточно вычислить слабый предел для $R_\pm^0(\varepsilon)$. Оказывается, однако, что этот слабый предел обычно равен нулю, и, таким образом, информация теряется.

Не приводя на этот счет детальных рассуждений (они достаточно элементарны), опишем возможные варианты при вычислении слабого предела. Разумеется, для каждого слагаемого в (3.6) предел вычисляется по отдельности. Напомним, что

$\psi_j^{(\pm)}(\mathbf{x}) = e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\rangle}\varphi_j^{(\pm)}(\mathbf{x})$, где $\varphi_j^{(\pm)}(\mathbf{x})$ – $(\mathbb{Z}^d)$-периодическая функция. Перечислим возможные варианты ответов.

1) Если $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)} \neq 0$, то слабый предел для соответствующего слагаемого в (3.6) равен нулю.

2) Пусть среди $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$ найдется нулевое значение: например, $\boldsymbol{\xi}_1^{(\pm)} = 0$. Тогда $\psi_1^{(\pm)} = \varphi_1^{(\pm)} = (\varphi_1^{(\pm)})^*$, и слабый предел для (3.6) сводится к оператору

$$[\overline{\varphi_1^{(\pm)}}](b_1^{(\pm)}(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\varphi_1^{(\pm)}}], \tag{3.8}$$

который может оказаться отличным от нуля. Однако, если в (3.1) $p = 0$, то в (3.8) снова получится нуль, исключая случай $\lambda_+ = 0$. Причина здесь в следующем. Функция $\varphi_1^{(+)}$ – собственная для оператора $A(0)$, отвечающего форме (1.5) при $\boldsymbol{\xi} = 0$. Поэтому $\varphi_1^{(+)}$ при $p = 0$ ортогональна в $L_2(\Omega)$ к константам, т.е. $\overline{\varphi_1^{(+)}} = 0$.

3) В случае правого края лакуны $(-\infty, 0)$, когда автоматически $m_+ = 1$ и $\boldsymbol{\xi}_1^{(+)} = 0$, предельный оператор $(3.8)_+$ заведомо отличен от нуля. Если при этом $p = 0$, то $\varphi_1^{(+)} = 1$, и в единственном слагаемом оператора $(3.6)_+$ с самого начала нет осциллирующих множителей.

4. Заключительные комментарии.

1) Множитель ε^{-2} при p^ε в (3.1) уравнивает влияние старшего и младшего членов.

2) Сдвиг $\varepsilon^{-2}\lambda_\pm$ в область высоких энергий в случае внутренней лакуны неизбежен. В этом смысле можно говорить, что усреднение вблизи края внутренней лакуны имеет смешанное (пороговое и высокоэнергетическое) происхождение. Лишь при $\lambda_+ = 0$ сдвига нет, и мы имеем усреднение в собственном смысле слова, которое имеет чисто пороговое происхождение.

3) Эффект усреднения определяется поведением дисперсионной функции $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$ вблизи точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, реализующих ее экстремум $\lambda_\pm$. Каждая из резольвент $(b_j^{(\pm)}(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}$ в (3.6) отвечает оператору $b_j^{(\pm)}(\mathbf{D})$ с постоянными коэффициентами. При этом вклады от точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, $j = 1, \ldots, m_\pm$, независимы и суммируются.

4) В оценке (3.7) нельзя избавиться от входящих в (3.6) осциллирующих множителей. Исключение составляет случай $p = 0$ и $\lambda_+ = 0$.

5) Если $\lambda_\pm > 0$, то, в силу вещественности коэффициентов оператора (1.1), край лакуны реализуется одновременно в точках $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$ и $(-\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$. Этот эффект "удвоения" снимается лишь в случае $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)} = -\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)} \pmod{(2\pi\mathbb{Z})^d}$. В случае $d = 1$ удвоения не бывает: всегда $m_\pm = 1$ и либо $\boldsymbol{\xi}_1^{(\pm)} = 0$, либо $\boldsymbol{\xi}_1^{(\pm)} = \pi$. При $d > 1$ обычно бывает $m_\pm > 1$ за счет кристаллографических симметрий; лишь при $\lambda_+ = 0$ всегда $m_+ = 1$.
6) При $\lambda_+ = 0$ аналог оценки $(3.7)_+$ получен в [6] для значительно более общего класса (векторных) дифференциальных операторов. При этом использована иная техника, позволившая, в частности, явно контролировать оценочные постоянные.

Литература

1. М. Ш. Бирман, *Дискретный спектр периодического оператора Шредингера, возмущенного убывающим потенциалом.* — Алгебра и анализ **8**, (1996), вып. 1, 3–20.
2. М. Ш. Бирман, *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шредингера.* II. *Нерегулярные возмущения.* — Алгебра и анализ **9**, (1997), вып. 6, 62–89.
3. М. Ш. Бирман, *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны.* — Алгебра и анализ **15**, (2003), вып. 4, 61–71.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов.* — Успехи мат. наук **32**, (1977), N 1, 17–84.
5. M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximations, Singular Integral Operators and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
6. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения.* — Алгебра и анализ **15**, (2003), вып. 5, 1–108.
7. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М., 1973.
8. Т. А. Суслина, *Дискретный спектр двумерного периодического эллиптического оператора второго порядка, возмущенного убывающим потенциалом.* II. *Внутренние лакуны.* — Алгебра и анализ **14**, (2002), вып. 2, 128–189.

Birman M. Sh., Suslina T. A. Homogenization of a multidimensional periodic elliptic operator in a neighbourhood of the edge of the internal gap.

The homogenization procedure for a multidimensional periodic Schrödinger operator near the edge of an internal gap is discussed. Approximation for the resolvent in the small period limit, with respect to the operator norm in $L_2(\mathbb{R}^d)$, is obtained. This approximation contains oscillations, but in a simpler form than the resolvent of the initial operator.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило 12 марта 2004 г.