Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 318, 2004 г.

В. Г. Осмоловский

ЗАВИСИМОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДВУХФАЗОВОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Памяти
Ольги Александровны Ладыженской

1. Введение

Предположим, что двухфазовая упругая среда, занимающая ограниченную область $\Omega \subset R^m$, описывается квадратичными плотностями энергии (по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до m)

$$F^{\pm}(M) = a^{\pm}_{ijkl}(e(M) - \zeta^{\pm})_{ij}(e(M) - \zeta^{\pm})_{kl}, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $a^{\pm}_{ijkl}$, характеризующие упругие свойства среды каждой из фаз, постоянны в области Ω и удовлетворяют стандартным условиям симметрии и положительной определенности

$$a^{\pm}_{ijkl} = a^{\pm}_{klij} = a^{\pm}_{jikl} = a^{\pm}_{ijlk}, \quad a^{\pm}_{ijkl}\zeta_{ij}\zeta_{kl} \geqslant \delta|\zeta|^2. \tag{1.2}$$

В последнем неравенстве $\delta > 0$, $\zeta \in R^{m\times m}_s$ — пространству симметричных $m \times m$-матриц, а $|\zeta|$ — норма в пространстве $R^{m\times m}_s$, согласованная со скалярным произведением Гильберта–Шмидта

$$< \alpha, \beta >= \operatorname{tr} \alpha\beta, \quad \alpha, \beta \in R^{m\times m}_s. \tag{1.3}$$

Тензоры $\zeta^{\pm} \in R^{m\times m}_s$ называются тензорами остаточной деформации, $e(M) = \frac{1}{2}(M + M^*)$ для любой $m \times m$ матрицы M.

Работа поддержана программой Университеты России
(грант No. 04.01.039).

Согласно модели теории фазовых переходов, изложенной, например, в [1], функционал энергии деформации двухфазовой упругой среды определяется равенством

$$I[u,\chi,\mu,\sigma] \tag{1.4}$$
$$= \int_\Omega \{\chi(x)(F^+(\nabla u(x))+\mu)+(1-\chi(x))F^-(\nabla u(x))\}\,dx+\sigma\int_\Omega |D\chi|,$$

где m – мерная вектор-функция $u(x)=(u^1(x),\dots,u^m(x))$ является полем смещений, $(\nabla u)_{ij}=u^i_{x_j}$, характеристическая функция $\chi(x)$ определяет множество, занимаемое фазой с индексом $+$, число μ интерпретируется как температура (постоянная вдоль всей области) двухфазовой упругой среды.

При $\sigma=0$ функционал (1.4) определим на парах u,χ

$$\begin{gathered} u\in W_2^1(\Omega,R^m),\quad u|_{\partial\Omega}=u_0|_{\partial\Omega},\quad e(\nabla u_0)\equiv e_0\ne e_0(x),\\ \chi\text{ — измеримая характеристическая функция.}\end{gathered} \tag{1.5}$$

Множество измеримых характеристических функций обозначим через Z.

При $\sigma>0$ функционал (1.4) определим на парах

$$\begin{gathered} u\in W_2^1(\Omega,R^m),\quad u|_{\partial\Omega}=u_0|_{\partial\Omega},\quad e(\nabla u_0)\equiv e_0\ne e_0(x),\\ \chi\in BV(\Omega)\text{ — характеристическая функция.}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Множество характеристических функций $\chi\in BV(\Omega)$ обозначим через Z_1.

Напомним, что принадлежность функции χ пространству $BV(\Omega)$ означает, что

$$\int_\Omega |D\chi| \equiv \sup_{h\in C_0^1(\Omega,R^m),|h(x)|\leqslant 1}\int_\Omega \chi\,\mathrm{div}\,h\,dx<\infty.$$

Величина $\int_\Omega |D\chi|$ обобщает на негладкий случай понятие площади границы раздела фаз, а второе слагаемое правой части (1.4) при $\sigma>0$ играет роль поверхностной энергии границы раздела фаз.

Состоянием равновесия двухфазовой упругой среды при $\sigma=0$ назовем пару $\widehat{u},\widehat{\chi}$ из множества (1.5), доставляющую глобальный минимум функционалу энергии на этом множестве. Состоянием равновесия духфазовой упругой среды при $\sigma > 0$ назовем пару $\widehat{u}, \widehat{\chi}$ из множества (1.6), доставляющую глобальный мнимум функционалу энергии на этом множестве. Состояние равновесия назовем однофазовым, если $\widehat{\chi} \equiv 0$ или $\widehat{\chi} \equiv 1$ и двухфазовым в противном случае. Существование состояний равновесия при $\sigma > 0$ установлено, например, в [2]. При $\sigma = 0$ существование состояний равновесия, вообще говоря, не гарантировано.

При исследовании функционала энергии характеристики среды (коэффициенты $a^{\pm}_{ijkl}$ и $\zeta^{\pm}_{ij}$) будем считать фиксированными, а температуру μ, коэффициент поверхностного натяжения σ и тензор e_0 — рассматривать как параметры задачи.

Для удобства формулировки утверждения введем линейные отображения $A : R^{m\times m}_s \to R^{m\times m}_s$ по формуле

$$(A^{\pm}\zeta)_{ij} = a^{\pm}_{ijkl}\zeta_{kl}, \quad \zeta \in R^{m\times m}_s. \tag{1.7}$$

Из предположений (1.2) вытекает симметрия и положительная определенность этих отображений относительно скалярного произведения (1.3). Из положительной определенности $A^{\pm}$ следует существование обратных операторов $(A^{\pm})^{-1}$. Норму отображений $A^{\pm}$ обозначим через $|A^{\pm}|$.

Определим числа

$$\begin{gathered}
\mu_* = \mu_*(e_0) = \\
=< A^-(e_0 - \zeta^-), e_0 - \zeta^- > - < A^+(e_0 - \zeta^+), e_0 - \zeta^+ >, \\
\mu_1^- = \mu_1^-(e_0) = \\
= \mu_* - < (A^-)^{-1}(A^+(e_0 - \zeta^+) - \\
- A^-(e_0 - \zeta^-)), A^+(e_0 - \zeta^+) - A^-(e_0 - \zeta^-) >, \\
\mu_2^- = \mu_2^-(e_0) = \\
= \mu_* + < (A^+)^{-1}(A^+(e_0 - \zeta^+) - \\
- A^-(e_0 - \zeta^-)), A^+(e_0 - \zeta^+) - A^-(e_0 - \zeta^-) >, \\
\mu_1^+ = \mu_1^+(e_0) = \\
= \mu_* - \frac{1}{|A^+| + |A^-|}\left|\frac{\mathrm{tr}(A^+(e_0 - \zeta^+) - A^-(e_0 - \zeta^-))}{m}\right|^2, \qquad (1.8) \\
\mu_2^+ = \mu_2^+(e_0) = \mu_* + \frac{1}{|A^+| + |A^-|}\left|\frac{\mathrm{tr}(A^+(e_0 - \zeta^+) - A^-(e_0 - \zeta^-))}{m}\right|^2,
\end{gathered}$$

удобные для формулировок дальнейших утверждений.

При $\sigma = 0$ функционал (1.4) исследовался в [3]. Там была устновлена справедливость следующего утверждения:

1) *Если*

$$\operatorname{tr} A^{+}(e_0 - \zeta^{+}) \neq \operatorname{tr} A^{-}(e_0 - \zeta^{-}), \tag{1.9}$$

то существуют такие числа $t^{-}(e_0) \in [\mu_1^{-}(e_0), \mu_1^{+}(e_0)]$, $t^{+}(e_0) \in [\mu_2^{+}(e_0), \mu_2^{-}(e_0)]$, *что при* $\mu < t^{-}(e_0)$ *у функционала* (1.4) *с* $\sigma = 0$ *реализуется только однофазовое сотояние равновесия* $\widehat{u} \equiv u_0$, $\widehat{\chi} \equiv 1$, *при* $\mu > t^{+}(e_0)$ — *только однофазовое сотояние равновесия* $\widehat{u} \equiv u_0$, $\widehat{\chi} \equiv 0$, *а при* $\mu \in (t^{-}(e_0), t^{+}(e_0))$ *у этого функционала нет однофазовых сотояний равновесия; при* $\mu = t^{\pm}(e_0)$ *существуют те же однофазовые сотояния равновесия, что и при* $\mu > t^{+}(e_0)$ *и* $\mu < t^{-}(e_0)$, *соответственно.*

2) *Если*

$$A^{+}(e_0 - \zeta^{+}) = A^{-}(e_0 - \zeta^{-}), \tag{1.10}$$

то при $\mu < \mu_*$ *у функционала* (1.4) *с* $\sigma = 0$ *реализуется только однофазовое состояние равновесия* $\widehat{u} \equiv u_0$, $\widehat{\chi} \equiv 1$, *при* $\mu > \mu_*$ — *только однофазовое состояние равновесия* $\widehat{u} \equiv u_0$, $\widehat{\chi} \equiv 0$, *а при* $\mu = \mu_*$ *множество всех состояний равновесия* $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ *исчерпывается парами* $\widehat{u} \equiv u_0$, $\widehat{\chi}$ — *любая функция из множества* Z.

Огрубляя оценки для чисел $t^{\pm}(e_0)$, приходим к выводу, что интервал $[t^{-}(e_0), t^{+}(e_0)]$ лежит внутри интервала

$$\begin{gathered} \mu \in R^1 : \quad |\mu - \mu_*| \leqslant t(e_0), \\ t(e_0) = (|(A^{+})^{-1}| + |(A^{-})^{-1}|)|\gamma|^2, \\ \gamma = A^{+}(e_0 - \zeta^{+}) - A^{-}(e_0 - \zeta^{-}). \end{gathered} \tag{1.11}$$

Нашей задачей является описание множества состояний равновесия функционала (1.4) при $\sigma > 0$.

Теорема. *Пусть выполняется условие* (1.9). *Тогда существует такая липшицева по* $\mu \in R^1$ *функция* $\sigma_0(\mu, e_0)$, *что*

$$\begin{aligned} \sigma_0(\mu, e_0) &= 0 \qquad \textit{при} \qquad \mu \notin (t^{-}(e_0), t^{+}(e_0)), \\ \sigma_0(\mu, e_0) &> 0 \qquad \textit{при} \qquad \mu \in (t^{-}(e_0), t^{+}(e_0)), \end{aligned}$$

$\sigma_0(., e_0)$ *выпукла на каждом из интервалов* $(-\infty, \mu_*]$, $[\mu_*, \infty)$,

$$\sigma_0(\mu_*(e_0), e_0) \leqslant \kappa\left(\frac{|\gamma|^2}{\delta} + t(e_0)\right)\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \equiv \sigma_*(e_0, \Omega) \tag{1.12}$$

(здесь число δ определено в (1.2)*, величины γ и $t(e_0)$ — в* (1.11)*, $\varkappa$ — константа в изопериметрическом неравенстве* (2.5)*, а $|\Omega|$ — мера области Ω), а множество всех состояний равновесия $\widehat{u}_{\mu,\sigma}$, $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ функционала* (1.4) *с $\sigma > 0$ допускает следующее описание:*

$$\begin{gathered}
\text{при}\quad \sigma > \sigma_0(\mu, e_0), \quad \mu \in (-\infty, \mu_*) \\
\text{реализуется только однофазовое состояние равновесия} \\
\widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1, \\
\text{при}\quad \sigma > \sigma_0(\mu, e_0), \quad \mu \in (\mu_*, \infty) \\
\text{реализуется только однофазовое состояние равновесия} \\
\widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0, \\
\text{при}\quad \sigma > \sigma_0(\mu, e_0), \quad \mu = \mu_* \\
\text{реализуются только однофазовые состояния равновесия} \\
\widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1, \qquad \widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0;
\end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered}
\text{при}\quad \sigma = \sigma_0(\mu, e_0), \quad \mu \in (t^-(e_0), t^+(e_0)) \\
\text{существует хотя бы одно двухфазовое состояние равновесия} \\
\widehat{u}_{\mu,\sigma}, \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}, \\
\text{а также состояния равновесия} \\
\widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1 \quad \text{при} \quad t^-(e_0) < \mu < \mu_*, \\
\widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \mu_* < \mu < t^+(e_0), \\
\widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1 \quad \text{и} \quad \widehat{u}_{\mu,\sigma} \equiv u_0, \\
\widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \mu = \mu_*;
\end{gathered} \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered}
\text{при}\quad \sigma \in (0, \sigma_0(\mu, e_0)), \quad \mu \in (t^-(e_0), t^+(e_0)) \\
\text{существуют только двухфазовые состояния равновесия.}
\end{gathered} \tag{1.15}$$

Пусть выполняется условие (1.10)*. Тогда при $\sigma > 0$ у функционала* (1.4) *существуют только однофазовые состояния равновесия $\widehat{u}_{\mu,\sigma}$, $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$, причем $\widehat{u}_{\mu,\sigma} = u_0$, а*

$$\begin{gathered}
\widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1 \quad \text{при} \quad \mu < \mu_*, \qquad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \mu > \mu_*, \\
\widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1 \quad \text{и} \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \mu = \mu_*.
\end{gathered} \tag{1.16}$$

При доказательстве этой теоремы мы будем пользоваться методами, предложенными в [4–6]. Реализация этих методов для плотностей энергии (1.1) с зависящими от $x \in \Omega$ коэффициентами требует определенной малости величины $a^{+}_{ijkl}(x) - a^{-}_{ijkl}(x)$ и не гарантирует финитности функции $\sigma_0(x)$ (см. [7]). Для постоянных $a^{\pm}_{ijkl}$, $\zeta^{\pm}_{ij}$, e_0 этих неприятностей удается избежать. В доказательстве теоремы будет использована вогнутость функции $I[u, \chi, ., .]$. Полезность этого факта отмечалась в [8].

В качестве приложения сформулированной теоремы рассмотрим вопрос о зависимости температур фазовых переходов от размера области Ω. Для фиксированной области $\Omega \subset R^m$ положим

$$\Omega_\lambda = \{\lambda x : x \in \Omega\}, \quad \lambda \in (0, \infty)$$

$$\widetilde{u}(y) = \lambda u(x), \quad \widetilde{\chi}(y) = \chi(x),$$

$$y = \lambda x, \quad y \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega.$$

Указывая среди аргументов функционала область интегрирования, получаем

$$I[\widetilde{u}, \widetilde{\chi}, \mu, \sigma, \Omega_\lambda] = \lambda^m I[u, \chi, \mu, \frac{\sigma}{\lambda}, \Omega]. \tag{1.17}$$

Будем считать, что в (1.6) функция $u_0 \equiv 0$ и выполняется предположение (1.9). Тогда из первого утверждения теоремы и равенства (1.17) вытекает

Следствие. *Существуют такие непрерывные функции $\tau^{\pm}(\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$ и такое положительное число $\lambda_* = \lambda_*(\sigma, \Omega) \leqslant \frac{\sigma}{\sigma_*(0,\Omega)}$, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{gathered}
\tau^-(\lambda) < \tau^+(\lambda) \quad \textit{при} \quad \lambda \in (\lambda_*, \infty), \\
\tau^-(\lambda) \equiv \tau^+(\lambda), \quad \textit{при} \quad \lambda \in (0, \lambda_*], \\
\tau^- \quad \textit{строго монотонно убывает} \quad \textit{при} \quad \lambda \in [\lambda_*, \infty), \\
\tau^-(\lambda) \to t^-(0) \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty, \\
\tau^+ \quad \textit{строго монотонно возрастает} \quad \textit{при} \quad \lambda \in [\lambda_*, \infty), \\
\tau^+(\lambda) \to t^+(0) \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty,
\end{gathered}$$

что у функционала $I[u,\chi,\mu,\sigma,\Omega_\lambda]$, $\mu \in R^1$, $\sigma > 0$, $\lambda \in (0,\infty)$

при $\mu < \tau^-(\lambda)$, $\lambda \in (\lambda_*,\infty)$

множество всех состояний равновесия задается парой

$$\widehat{u} = 0, \quad \widehat{\chi} = 1,$$

при $\mu > \tau^+(\lambda)$, $\lambda \in (\lambda_*,\infty)$

множество всех состояний равновесия задается парой

$$\widehat{u} = 0, \quad \widehat{\chi} = 0,$$

при $\mu \in (\tau^-(\lambda), \tau^+(\lambda)$ $\lambda \in (\lambda_*,\infty)$

существуют только двухфазовые сотояния равновесия,

при $\mu = \tau^\pm(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_*,\infty)$

существуют как двухфазовые, так и однофазовые

$$\widehat{u} = 0, \quad \widehat{\chi} = 0, \quad \widehat{u} = 0, \quad \widehat{\chi} = 1$$

состояния равновесия, соответственно,

при $\mu = \tau^\pm(\lambda) = \mu_*(0)$, $\lambda \in (0,\lambda_*)$

существуют только однофазовые состояния равновесия

$$\widehat{u} = 0, \quad \widehat{\chi} = 1, \quad \widehat{u} = 0, \quad \widehat{\chi} = 1.$$

Данное следствие означает, что температуры фазовых переходов — числа $\tau^\pm(\lambda)$ с расширением области Ω (увеличением параметра λ) стремятся к предельным значениям $t^\pm(0)$, оценки для которых приведены выше, а прм сжатии области Ω (уменьшении параметра λ) начиная с определенного значения параметра $\lambda = \lambda_*(\sigma,\Omega)$ (допускающего оценку сверху) перестают зависеть от λ и совпадают с числом $\mu_*(0)$.

Из второй части теоремы вытекает, что при $u_0 = 0$ и выполнении условия (1.10) температуры фазовых переходов не зависят от области Ω и совпадают с числом $\mu_*(0)$.

Для частного вида плотностей энергии, аналогичный результат был установлен в [9].

2. Доказательство теоремы. Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов.

Лемма 1. 1) *При* $\mu \notin [t^-(e_0), t^+(e_0)]$, $\sigma > 0$ *у функционала* (1.4) *существуют только однофазовые состояния равновесия.*

2) *Для каждого* $\mu \in (t^-(e_0), t^+(e_0))$ *существует такое* $\sigma > 0$, *что у функционала* (1.4) *имеется двухфазовое состояние равновесия.*

3) *Если у функционала* (1.4) *при некоторых* $\mu \in R^1$, $\sigma > 0$ *существует однофазовое состояние равновесия* $\widehat{u}_{\mu,\sigma}$, $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$, *то* $\widehat{u}_{\mu\sigma} \equiv u_0$, *а*

$$\begin{gathered} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1 \quad \text{при} \quad \mu < \mu_*, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \mu > \mu_*, \\ \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 1, \quad \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \mu = \mu_*. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Доказательство. Доказательство утверждений 1), 2) с точностью до обозначений содержатся в лемме 2 работы [9]. Докажем утверждение 3).

Поскольку

$$\begin{gathered} \chi F^+(\nabla u) + (1-\chi) F^-(\nabla u) + \mu\chi = \\ = \chi < A^+ e(\nabla v), e(\nabla v) > + (1-\chi) < A^- e(\nabla v), e(\nabla v) > + (\mu - \mu_*)\chi + \\ + 2\chi < e(\nabla v), \gamma > + 2 < e(\nabla v), A^-(e_0 - \zeta^-) > + \\ + < A^-(e_0 - \zeta^-), e_0 - \zeta^- >, \\ u = v + u_0, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m) \end{gathered}$$

(мы использовали обозначение (1.8), (1.11)) имеем

$$\begin{gathered} I[u, \chi, \mu, \sigma] = |\Omega| < A^-(e_0 - \zeta^-), e_0 - \zeta^- > + \\ + 2 \int\limits_\Omega \chi < e(\nabla v), \gamma > \, dx + \\ + \int\limits_\Omega \{\chi < A^+ e(\nabla v), e(\nabla v) > + (1-\chi) < A^- e(\nabla v), e(\nabla v) > + \\ + (\mu - \mu_*)\chi\} \, D\chi + \sigma \int\limits_\Omega |D\chi|. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Если у этого функционала существует однофазовое состояние равновесия $\widehat{u}_{\mu,\sigma}$, $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$, то

$$\begin{gathered} I[\widehat{u}_{\mu,\sigma}, \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}, \mu, \sigma] = |\Omega| < A^-(e_0 - \zeta^-), e_0 - \zeta^- > + \\ + \int\limits_\Omega \{\widehat{\chi}_{\mu,\sigma} < A^+ e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}) > + \\ + (1 - \widehat{\chi}) < A^- e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}) > + (\mu - \mu_*)\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}\} \, dx. \end{gathered}$$

Следовательно, $\widehat{v}_{\mu,\sigma} \equiv 0$, а для $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ справедлива формула (2.1).•

Лемма 2. 1) *Существует такое число* $\sigma_* = \sigma_*(e_0, \Omega)$, *что при* $\sigma > \sigma_*$ *и всех* $\mu \in R^1$ *у функционала* (1.4) *реализуются только однофазовые состояния равновесия.*

2) *Для каждого* $\sigma > 0$ *существует такое число* $\delta_0 = \delta_0(\sigma, e_0, \Omega) \in (0, \frac{1}{2}]$, *что для любого двухфазового состояния равновесия* $\widehat{u}_{\mu,\sigma}$, $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ *функционала* (1.4) *выполняется оценка*

$$\delta_0 \leqslant \frac{1}{\Omega} \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}\, dx \leqslant 1 - \delta_0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{u}_{\mu,\sigma} = \widehat{v}_{\mu,\sigma} + u_0$, $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ — двухфазовое состояние равновесия. Тогда из очевидных неравенств

$$I[\widehat{u}_{\mu,\sigma}, \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}, \mu, \sigma] \leqslant I[u_0, 0, \mu, \sigma], \quad I[\widehat{u}_{\mu,\sigma}, \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}, \mu, \sigma] \leqslant I[u_0, 1, \mu, \sigma]$$

с помощью представления (2.2) для функционала энергии получаем

$$\int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} < A^+ e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}) > +(1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma})$$

$$< A^- e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}) >\}\, dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}| \leqslant$$

$$\leqslant -2 \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} < e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), \gamma > \; D\chi - (\mu - \mu_*) \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}\, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} < A^+ e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}) > +$$

$$+(1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}) < A^- e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}) >\}\, D\chi + \sigma \int\limits_{\Omega} |D(1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma})| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{\Omega} (1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}) < e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma}), \gamma > \; dx + (\mu - \mu_*) \int\limits_{\Omega} (1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma})\, dx.$$

При выводе последнего неравенства было использовано очевидное соотношение

$$\int\limits_{\Omega} |D\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}| = \int\limits_{\Omega} |D(1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma})|.$$

Из полученных неравенств и положительной определенности операторов $A^{\pm}$ вытекает, что

$$\delta \int\limits_{\Omega} |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})|^2 \, dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} |\gamma| \, |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})| \, dx + |\mu - \mu_*| \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_{\mu,\sigma} \, dx,$$
$$\delta \int\limits_{\Omega} |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})|^2 \, dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D(1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma})| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{\Omega} (1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}) |\gamma| \, |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})| \, dx + |\mu - \mu_*| \int\limits_{\Omega} (1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}) \, dx.$$

Пусть $\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}$ — та из функций $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ или $1 - \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$, для которой

$$\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} \, dx \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда из пары предыдущих неравенств следует соотношение

$$\delta \int\limits_{\Omega} |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})|^2 \, dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{\Omega} \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} |\gamma| \, |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})| \, dx + |\mu - \mu_*| \int\limits_{\Omega} \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} \, dx.$$

Поскольку

$$2 \int\limits_{\Omega} \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} |\gamma| \, |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})| \, dx \leqslant \frac{|\gamma|^2}{\delta} \int\limits_{\Omega} \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} \, dx + \delta \int\limits_{\Omega} |e(\nabla \widehat{v}_{\mu,\sigma})|^2 \, dx$$

(мы воспользовались равенством $\widetilde{\chi}^2_{\mu,\sigma} = \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}$), получаем

$$\sigma \int\limits_{\Omega} |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}| \leqslant \left(\frac{|\gamma|^2}{\delta} + |\mu - \mu_*| \right) \int\limits_{\Omega} \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} \, dx. \tag{2.4}$$

Далее, пользуясь изопериметрическим неравенством (см., например, [5])

$$\left(\int\limits_{\Omega} \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} \, dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \kappa \int\limits_{\Omega} |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}|, \quad \kappa = \kappa(\Omega), \tag{2.5}$$

справедливым, благодаря выбору функции $\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}$, имеем

$$\int\limits_\Omega \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}\,dx = \Big(\int\limits_\Omega \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}\,dx\Big)^{\frac{m-1}{m}}\Big(\int\limits_\Omega \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}\,dx\Big)^{\frac{1}{m}} \leqslant$$

$$\leqslant \kappa\Big(\int\limits_\Omega \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}\,dx\Big)^{\frac{1}{m}}\int\limits_\Omega |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}| \leqslant \kappa\Big(\frac{|\Omega|}{2}\Big)^{\frac{1}{m}}\int\limits_\Omega |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}|. \tag{2.6}$$

Объединяя (2.4), (2.6), приходим к выводу, что

$$\sigma\int\limits_\Omega |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}| \leqslant \kappa\Big(\frac{|\gamma|^2}{\delta}+|\mu-\mu_*|\Big)\Big(\frac{|\Omega|}{2}\Big)^{\frac{1}{m}}\int\limits_\Omega |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}|.$$

Так как состояние равновесия $\widehat{u}_{\mu,\sigma}$, $\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ предполагалось двухфазовым, то (см. лемму 1, п.1 и (1.11))

$$\int\limits_\Omega |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma|} > 0, \quad |\mu-\mu_*| \leqslant t(e_0).$$

Поэтому, сокращая на положительный множитель, получаем

$$0 < \sigma \leqslant \kappa\Big(\frac{|\gamma|^2}{\delta}+t(e_0)\Big)\Big(\frac{|\Omega|}{2}\Big)^{\frac{1}{m}} \equiv \sigma_*(e_0,\Omega).$$

Таким образом, при $\sigma > \sigma_*$ и любом $\mu \in R^1$ у функционала (1.4) нет двухфазовых состояний равновесия.

Пользуясь еще раз неравенствами (2.4), (2.5), получаем

$$\sigma\int\limits_\Omega |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}| \leqslant \Big(\frac{|\gamma|^2}{\delta}+t(e_0)\Big)\int\limits_\Omega \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_*\Big(\frac{2}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}\,dx\Big)^{\frac{1}{m}}\int\limits_\Omega |D\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}|.$$

Тогда

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \widetilde{\chi}_{\mu,\sigma}\,dx \geqslant \frac{1}{2}(\frac{\sigma}{\sigma_*})^m \equiv \delta_0.$$

Поскольку $0 < \sigma \leqslant \sigma_*$, справедливо включение $\delta_0 \in (0,\frac{1}{2}]$. Перебирая варианты $\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} = \widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ и $\widetilde{\chi}_{\mu,\sigma} = 1-\widehat{\chi}_{\mu,\sigma}$ завершим доказательство леммы.•

Лемма 3. *Пусть выполняется предположение* (1.9). *Тогда существует такая непрерывная функция* $\sigma_0(\mu, e_0)$, *удовлетворяющая условию* (1.12) *(кроме выпуклости), что множество всех состояний равновесия функционала* (1.4) *с* $\sigma > 0$ *допускает описание* (1.13)–(1.15).

Доказательство. Существование непрерывной по первому аргументу функции $\sigma_0(\mu, e_0)$, разграничивающей зоны однофазовых и двухфазовых состояний равновесия следует из результатов работы [6], поскольку ограниченность функции $\sigma_0(., e_0)$ и оценка (2.3) получены для плотностей энергии (1.1) независимым образом (лемма 2), не использующим предположение о дополнительной гладкости равновесного поля смещений. Свойства (1.12) (кроме выпуклости) являются следствием леммы 1. Описание (1.13) однофазовых состояний равновесия также вытекает из леммы 1. Описание однофазовых состояний равновесия (1.14) достигается с помощью лемм 1, 2 так же, как в [6].•

Лемма 4. *Функция* $\sigma_0(., e_0)$ *выпукла на каждом из интервалов* $(-\infty, \mu_*]$, $[\mu_*, \infty)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы с точностью до обозначений повторяет доказательство леммы 4 из работы [9].•

Лемма 5. *Функция* $\sigma_0(., e_0)$ *удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Локальная липшицевость функции $\sigma_0(., e_0)$ доказана в [6]. В общем случае (рассматриваемом в [6]) константа Липшица может неограниченно возрастать при приближении аргумента μ к корням функции $\sigma_0(., e_0)$. Поскольку выпуклая функция на внутренности области определения обязана быть липшицевой, липшицевость функции $\sigma_0(., e_0)$, построенной для плотностей энергии (1.1), в окрестности точек $t^{\pm}(e_0)$ гарантирована леммой 4.•

Лемма 5 завершает доказательство теоремы при выполнении условия (1.9). Пусть выполняется условие (1.10). Тогда функционал (1.4) упрощается и может быть записан в виде

$$I[u, \chi, \mu, \sigma] = +|\Omega| < A^-(e_0 - \zeta^-), e_0 - \zeta^- > +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \Big\{ \chi < A^+(e(\nabla v), e(\nabla v) > +(1 - \chi) < A^- e(\nabla v),$$

$$e(\nabla v) > +\chi(\mu - \mu_*)\Big\} dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D\chi|,$$

$$u = v + u_0, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m),$$

откуда следуют соотношения (1.16).

Литература

1. М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошной среды в теории фазовых превращений.* Наука, М. (1990).
2. В. Г. Осмоловский, *Теорема существования и слабая форма уравнений Лагранжа для вариационной задачи теории фазовых превращений.* — Сибирский математический журнал **36**, No. 4 (1994), 836–846.
3. В. Г. Осмоловский, *Зависимость состояний равновесия двухфазовой упругой среды от температуры при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения.* — В кн.: Проблемы математического анализа, **28** (2004), 96–104.
4. В. Г. Осмоловский, *Фазовые переходы для моделей упругой среды с остаточным напряжением.* — В кн.: Проблемы математического анализа, **17** (1997), 153–191.
5. В. Г. Осмоловский, *Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды.* Изд. С.-Пб. гос. университета, С.-Петербург (2000).
6. В. Г. Осмоловский, *Зависимость характера состояний равновесия двухфазовой упругой среды от параметров задачи.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **271** (2000), 56–175.
7. M. Bildhauer, M. Fuchs, V. Osmolovskii, *The effect of a surface term on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potencial.* — Math. Meth. Appl. Sci., No. 25 (2002), 149–178.
8. А. С.Михайлов, В. С. Михайлов, *Фазовые переходы в многофазовых средах.* — В кн.: Проблемы математического анализа, **20** (2000), 120–169.
9. В. Г. Осмоловский, *Зависимость температуры фазовых переходов от размеров области.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **310** (2004), ???–???

Osmolovskii V. G. Dependence of equilibrium states of a two-phase elastic medium on temperature for a positive coefficient of surface tension.

In the paper, homogeneous two-phase elastic media are investigated under the condition that on the boundary it is given a certain deflection field. For such problems, the dependence of equilibrium states on the temperature is analyzed.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 15 марта 2004 г.