Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

М. В. Бондарко, С. В. Востоков, Х. П. Минчев

ОГРАНИЧЕНИЕ СКАЛЯРОВ ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП

Введение

Цель этой работы дать подробные доказательства и обобщить результаты о функторе ограничения скаляров для формальных групп из [2]. Функтор ограничения скаляров для алгебраических многообразий был введен А. Вейлем (см. [3]), который доказал существование ограничения скаляров для квазипроективных многообразий. Изложение для аффинных схем над полем см. в [5]. Случай схем разобран в [4], где есть и изложение критерия Гротендика, обобщающего результат А. Вейля. Для формальных групп функтор ограничения скаляров введен в [2]. В идейном плане изложение здесь следует [3] и [4]. Все используемые определения и результаты о формальных группах можно найти в [1] и [6].

1. Обозначения и терминология

R – коммутативное кольцо (с единицей), $B \supseteq R$ – алгебра над R, свободная и конечного ранга как R-модуль.

Для произвольного коммутативного кольца A определим следующие категории (см. [6]):

1.1. Категория $\mathbf{S}_A$.

Объекты в $\mathbf{S}_A$ – это пары (S, v), где S – коммутативная A-алгебра, v – полная фильтрация на S. Обозначим через $I(S) = I(S, v)$ идеал $\{x \in S \mid v(x) \neq 0\}$. Пусть (S, v), (T, w) – объекты в $\mathbf{S}_A$. Морфизмы в $\mathbf{S}_A$ из (S, v) в (T, w) – это непрерывные гомоморфизмы A-алгебр $f : S \to T$ (относительно топологий, заданных фильтрациями) такие, что $f(I(S)) \subseteq I(T)$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант 04-01-00082а, РФФИ РД No. 02-1.1-37. Третий автор благодарен Санкт-Петербургскому государственному университету за возможность выполнения этой работы.

1.2. Категория $\mathbf{P}_A$.

$\mathbf{P}_A$ – полная подкатегория в $\mathbf{S}_A$, состоящая из объектов (A_n, ord), где (A_n) – кольцо формальных степенных рядов от n переменных над A $(n = 1, 2, \ldots)$, ord – функция порядка на A_n. Отметим (см. [6]), что если $(S, v) \in \mathbf{S}_A$, то любое отображение из множества переменных A_n в $I(S)$ однозначно продолжается до гомоморфизма A_n в S в категории $\mathbf{S}_A$. Таким образом, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_A}(A_n, S) \widetilde{\rightarrow} I(S)^n$.

1.3. Категория $\mathbf{G}_A$.

Это категория, дуальная к $\mathbf{P}_A$. Для любой категории $\mathbf{C}$ дуальную категорию будем обозначать через $\mathbf{C}^\circ$. Объекты в $\mathbf{G}_A$ – конечные наборы переменных (которые мы будем считать столбцами, хотя по типографским причинам будем записывать как строки). Если $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ и $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ – объекты в $\mathbf{G}_A$, то морфизм $f : X \to Y$ – это набор $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (столбец!) рядов без свободных членов $f_i \in A[[X_1, X_2, \ldots, X_m]]$. Мы часто будем записывать это как $Y_i = f_i(X_1, \ldots, X_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)$ – третий объект в $\mathbf{G}_A$ и $g = (g_1, \ldots, g_k)$ – морфизм $g : Y \to Z$. Тогда композиция определяется обычной подстановкой ряда в ряд, т.е. $g \circ f = (g_1(f_1, \ldots, f_n), \ldots, g_k(f_1, \ldots, f_n))$.

Контравариантный функтор из $\mathbf{P}_A$ в $\mathbf{G}_A$, идентифицирующий $\mathbf{G}_A$ с $\mathbf{P}_A^\circ$, отображает $A[[X_1, X_2, \ldots, X_m]]$ в набор переменных $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ и морфизм $\theta : A_n \to A_m$, $A_n = A[[Y_1, \ldots, Y_n]]$ в морфизм $f_\theta : X \to Y$ (здесь $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$), причем $f_\theta = (f_1, \ldots, f_n)$, где $f_i = \theta(Y_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Легко проверяется, что в категории $\mathbf{G}_A$ существуют конечные произведения. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$, Y и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ – **объекты** в $\mathbf{G}_A$ и $f_1 : Y \to X_1, \ldots, f_n : Y \to X_n$, соответственно $g_1 : Y_1 \to X_1, \ldots, g_n : Y_n \to X_n$ – морфизмы. Канонические морфизмы $f_1 \times \cdots \times f_n : Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$ и $g_1 \times \cdots \times g_n : \prod_{i=1}^n Y_i \to \prod_{i=1}^n X_i$ будем обозначать также через $(f_1, \ldots, f_n)$ и $(g_1, \ldots, g_n)$.

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_m)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ – объекты в $\mathbf{G}_A$. Тогда $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_A}(X, Y)$ наделено естественной структурой A-модуля. Если $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_A}(X, Y)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $f_i \equiv a_{i1}X_1 + \cdots + a_{im}X_m \mod (\deg 2)$, то матрица $(a_{ij})_{n \times m}$ обозначается через $\mathbf{J}(f)$ и называется матрицей Якоби морфизма f. Сразу проверяется, что отображение

$$f \mapsto \mathbf{J}(f) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_A}(X, Y) \to \mathrm{M}_{n \times m}(A),$$

где $\mathrm{M}_{n\times m}(A)$ – $n \times m$-матрицы с коэффициентами в A, является гомоморфизмом A-модулей и что $\mathbf{J}(g \circ f) = \mathbf{J}(g) \circ \mathbf{J}(f)$.

1.4. Категории $\mathbf{F}_A$ и $\mathbf{FAb}_A$.

Это категории формальных групп и коммутативных формальных групп над A .

1.5. Кольца характеристики ноль.

Так называется кольцо A, чья аддитивная группа A^+ не содержит ненулевых элементов конечного порядка или, что равносильно, $A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ является вложением ([1]). В таком случае кольцо $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ канонически изоморфно кольцу частных $S_0^{-1}A$, где S_0 – мультипликативная система $\{1, 2, 3, \ldots\}$ в A.

2. Лемма Йонеды и групповые объекты в категориях

Пусть $\mathbf{C}$ – категория, X – объект в $\mathbf{C}$. Тогда X определяет на $\mathbf{C}$ контравариантный функтор $X(-) : \mathbf{C}^{\circ} \to \mathbf{Sets}$, $T \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, X)$, где для $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T', T)$ и $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, X)$ мы определяем $X(f)(g) = g \circ f$. $X(T)$ называется множеством T-значных точек объекта X. Здесь $\mathbf{Sets}$ – категория множеств.

Любой морфизм $h : X \to Y$ определяет посредством композиции морфизм функторов $\varphi_h : X(-) \to Y(-)$.

Лемма 2.1 (Йонеды). *Каноническое отображение* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{Functors}(X(-), Y(-)) : h \mapsto \varphi_h$ *является биекцией.* $\square$

Доказательства см., например, в [4].

2.1. Представимые функторы.

Контравариантный на $\mathbf{C}$ функтор $\mathbf{C}^{\circ} \to \mathbf{Sets}$ называется представимым, если он изоморфен функтору $X(-)$ для некоторого $X \in \mathbf{C}$. Из леммы Йонеды тогда следует, что объект X определен в $\mathbf{C}$ с точностью до изоморфизма.

2.2. Групповые объекты.

По определению (см. [5, 4]) на $X \in \mathbf{C}$ задана структура группового объекта, если для каждого $T \in \mathbf{C}$ на $X(T)$ задана структура группы, совместимая с функтором $X(-)$, т.е. для любого $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T', T)$ $X(h) : X(T) \to X(T')$ есть гомоморфизм групп. Если все группы $X(T)$ – абелевы, то групповой объект называется коммутативным.

Пусть $F(X,Y)$ – m-мерная формальная группа над кольцом A, $X=(X_1,\dots,X_m)$, $Y=(Y_1,\dots,Y_m)$. Тогда F определяет структура группового объекта на $A_m\in\mathbf{P}_A$ в категориях $\mathbf{S}_A^\circ$ и $\mathbf{G}_A=\mathbf{P}_A^\circ$ хорошо известным способом ([6, 1]): Объекту (S,v) категории $\mathbf{S}_A$ соответствует группа $F(S)$, которая **как множество** совпадает с $I(S)^n=\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_A}(A_n,S)$. Закон композиции сопоставляет паре (α,β); $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in F(S)$, элемент $\alpha *_F \beta=F(\alpha,\beta)$ множества $F(S)$. Соответствие $S\mapsto F(S)$ функториально по S. Группы $F(S)$ абелевы, если F коммутативна; закон композиции записывается в этом случае как $\alpha+_F\beta$. Обратно (см. [1]):

Лемма 2.2. *Пусть на A_m задана структура группового объекта в категории $\mathbf{S}_A^\circ$ (или $\mathbf{G}_A=\mathbf{P}_A^\circ$). Тогда существует однозначно определённая m-мерная формальная группа $F\in\mathbf{F}_A$ такая, что функтор $S\mapsto F(S)$ на $\mathbf{S}_A^\circ$ (соответственно – на $\mathbf{P}_A^\circ$) совпадает с функтором $\mathbf{S}_A^\circ\to$ **Groups** ($\mathbf{P}_A^\circ\to$ **Groups**), индуцированным групповым объектом на A_m. Если групповой объект на A_m коммутативен, то $F\in\mathbf{FAb}_A$. Здесь **Groups** – категория групп.*

Доказательство. Пусть $X=(X_1,\dots,X_m)$, $Y=(Y_1,\dots,Y_m)\in\mathbf{G}_A$. В категории $\mathbf{G}_A$ существуют конечные произведения. Согласно лемме Йонеды структуре группового объекта на X соответствует морфизм $F=(F_1,\dots,F_m):X\times X=(X,Y)\to X$.

Равенство $F(F(X,Y),Z)=F(X,F(Y,Z))$, $Z=(Z_1,\dots,Z_m)$ соответствует ассоциативному закону. Для любого $T\in\mathbf{G}_A$ нейтральный элемент в $X(T)$ должен быть $(0,\dots,0)$. Отсюда $F(X,0)=0$ и $F(0,Y)=0$. Таким образом, F – формальная группа. Легко проверяется, что она удовлетворяет всем утверждениям леммы.

3. Расширение и ограничение скаляров

На категории коммутативных R-алгебр функтор расширения скаляров с R до B – это функтор $\mathcal{E}_B(S)=S_B=S\otimes_R B$ (на морфизмах $\mathcal{E}_B(f)=f_B=f\otimes_R \mathrm{id}_B$). В силу свойств алгебры B (конечная и свободная как R-модуль) функтор $\mathcal{E}_B$ – строгий (т.е. унивалентный). Точнее: B – строго плоская R-алгебра.

Лемма 3.1. *Функтор $\mathcal{E}_B$ переводит объекты и морфизмы категории $\mathbf{S}_R$ (соответственно $\mathbf{P}_R$) в объекты и морфизмы категории $\mathbf{S}_B$ (соответственно $\mathbf{P}_B$).*

Доказательство. Пусть $(S,v)\in\mathbf{S}_R$, $I_n=\{x\in S|v(S)\geq n\}$, $n=0,1,2,\ldots$ – идеалы фильтрации v.

Последовательность $0\to R\to S$ точна. Из свойств B следует, что точна последовательность $0\to R\otimes_R B\to S\otimes_R B$, т.е. $0\to B\to S_B$. При этом B отождествляется с $1\otimes B$.

Пусть $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_e$ – базис B над R. Тогда из свойств тензорного произведения следует, что $1\otimes\omega_1,\ldots,1\otimes\omega_e$ будет базисом $S\otimes_R B$ над S. Отсюда следует, что $S\to S\otimes_R B: s\mapsto s\otimes 1$ – вложение. До конца изложения мы **будем отождествлять** S с $S\otimes 1$ и B с $1\otimes B$. Таким образом, S и B – подалгебры S_B, причём $\omega_1,\ldots,\omega_e\in S_B$ – базис S_B над S. Отметим, что таблица умножения этого базиса одна и та же для B над R и для S_B над S.

Положим $J_n=I_n\otimes_R B=\sum_{i=1}^{e}I_n\omega_i$, $n=0,1,2,\ldots$. Это идеал в S_B, порожденный I_n, снова из свойств B. Пусть $v'(x)=\sup\{n|x\in J_n\}$ для $x\in S_B$. Тогда v' есть фильтрация на S_B. Она индуцирует на S_B топологию свободного S-модуля конечного ранга, соответствующую разложению в прямую сумму $S_B=\sum_{i=1}^{e}S\omega_i$. S_B полно в этой топологии, откуда v' – полная фильтрация. Имеем $(S_B,v')\in S_B$. Утверждение о морфизмах легко проверяется. Таким образом, если положим $\mathcal{E}_B((S,v))=(S_B,v')$, получим функтор $\mathcal{E}_B:\mathbf{S}_R\to\mathbf{S}_B$.

Утверждение о категории $\mathbf{P}_R$ становится верным, если отождествить $R_n\otimes_R B$, $R_n=R[[X_1,\ldots,X_n]]$ с $B_n=B[[X_1,\ldots,X_n]]$ при помощи канонического изоморфизма $\varphi: R_n\otimes_R B\to B_n$, $\varphi(\sum f_i\otimes b_i)=\sum f_ib_i$. То, что φ – изоморфизм, следует из того, что любой базис алгебры B над R является базисом $R_n\otimes_R B$ над R_n и базисом B_n над R_n с одной и той же таблицей умножения. Ясно, что φ переводит фильтрацию v' на $R_n\otimes_R B$ в фильтрации ord на B_n.

Определение 3.2. *Функторы $\mathcal{E}_B:\mathbf{S}_R\to\mathbf{S}_B$, $\mathcal{E}_B:\mathbf{P}_R\to\mathbf{P}_B$, как и индуцированные ими функторы $\mathcal{E}_B:\mathbf{S}_R^\circ\to\mathbf{S}_B^\circ$, $\mathcal{E}_B:\mathbf{G}_R\to\mathbf{G}_B$ называются функторами расширения скаляров в соответствующих категориях.*

Особенно просто выглядит расширение скаляров с R до B для категории $\mathbf{G}_R$. Если $X=(X_1,\ldots,X_m)$, $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$ и $f=(f_1,\ldots,f_n):X\to Y$ – объекты и морфизмы в $\mathbf{G}_R$, то $\mathcal{E}_B(X)=X$ и $\mathcal{E}_B(f)=f$. То же самое относится и к категориям $\mathbf{F}_R$ и $\mathbf{FAb}_R$.

Определение 3.3. *Пусть $X=(X_1,\ldots,X_m)\in\mathbf{G}_B$. Определим кон-*

травариантный функтор $\mathbf{G}_R^{\circ} \to \mathbf{Sets} : T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, X)$. *Если он представим объектом* $\mathcal{R}_{B/R}(X)$ *в* $\mathbf{G}_R$, *то* $\mathcal{R}_{B/R}(X)$ *называется ограничением скаляров для* X *от* B *до* R. *Аналогичным образом определяется ограничение скаляров в категории* $\mathbf{S}_B^{\circ}$.

Это определение соответствует определению ограничения скаляров для схем, см. [4]. Существование $\mathcal{R}_{B/R}(X)$ эквивалентно существованию изоморфизма

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}\left(T, \mathcal{R}_{B/R}(X)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, X), \qquad (1)$$

функториального по $T \in \mathbf{G}_R$. В категории $\mathbf{S}_B^{\circ}$ это выглядит так:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_R}\left(\mathcal{R}_{B/R}(S), T\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_B}(S, T \otimes_R B),$$

где $S \in \mathbf{S}_B$, $T \in \mathbf{S}_R$.

4. Основные результаты

Для дальнейшего мы фиксируем базис $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_e)$ алгебры B над R.

Определение 4.1. *Пусть* $X = (X_1, \ldots, X_m) \in \mathbf{G}_B$. *Положим* $\mathcal{R}_\omega(X) = X_\omega = (X_{11}, \ldots, X_{e1}, \ldots, X_{1m}, \ldots, X_{em})$. *Мы будем часто рассматривать* X_ω *как матрицу* $(X_{ij})_{e \times m}$. *Определим морфизмы* $\rho_X : X_\omega \to X$ *и* $\sigma_X : X \to X_\omega$ *в категории* $\mathbf{G}_B$ *следующим образом: пусть* $1 = c_1\omega_1 + \cdots + c_e\omega_e$, $c_i \in R$ – *разложение в базисе* ω. *Тогда*

$$\rho_X = (\omega_1 X_{11} + \cdots + \omega_e X_{e1}, \ldots, \omega_1 X_{1m} + \cdots + \omega_e X_{em}), \qquad (2)$$

$$\sigma_X = (c_1 X_1, \ldots, c_m X_1, \ldots, c_1 X_m, \ldots, c_m X_m). \qquad (3)$$

Сразу проверяется, что $\rho_X \circ \sigma_X = \mathrm{id}_X$.

Предложение 4.2. (i) *Для любого* $X \in \mathbf{G}_B$ *объект* $X_\omega \in \mathbf{G}_R$ *является ограничением скаляров для* X *от* B *до* R, *т.е.* $\mathcal{R}_{B/R}(X) = X_\omega$. *Соответствие* $X \mapsto \mathcal{R}_{B/R}(X)$ *функториально по* X *(при фиксированном* ω*). Соотношение* $g_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(g)$ *эквивалентно равенству* $\rho_Y \circ g_\omega = g \circ \rho_X$. *Функтор* $\mathcal{R}_{B/R} : \mathbf{G}_B \to \mathbf{G}_R$ – *строгий (унивалентный).*

(ii) *Пусть* $f : Z \to X$ *и* $g : Z \to Y$ – *объекты и морфизмы в* $\mathbf{G}_B$. *Тогда* $\mathcal{R}_{B/R}(X \times Y) = \mathcal{R}_{B/R}(X) \times \mathcal{R}_{B/R}(Y)$ *и* $\mathcal{R}_{B/R}(f \times g) = (\mathcal{R}_{B/R}(f), \mathcal{R}_{B/R}(g))$.

(iii) *Функтор* $\mathcal{R}_{B/R}$ *переводит* m*-мерную формальную группу* $F \in \mathbf{F}_B$ *в* em*-мерную формальную группу* $\mathcal{R}_{B/R}(F) \in \mathbf{F}_R$. *При этом*

$F \in \mathbf{FAb}_B$ эквивалентно $\mathcal{R}_{B/R}(F) \in \mathbf{FAb}_R$. Функтор $\mathcal{R}_{B/R}$ переводит гомоморфизмы формальных групп в гомоморфизмы формальных групп.

(iv) *Пусть дополнительно к условиям, которым удовлетворяют R, B и ω, выполнено, что R и B – области целостности с полями частных соответственно K и L. Построим функторы $\mathcal{R}_{L/K}: \mathbf{G}_L \to \mathbf{G}_K$ и $\mathcal{R}_{B/R}: \mathbf{G}_B \to \mathbf{G}_R$ при помощи базиса ω. В таком случае f – морфизм в $\mathbf{G}_B$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_{L/K}(f)$ – морфизм в $\mathbf{G}_R$.* $\square$

Таким образом, определены функторы $\mathcal{R}_{B/R}: \mathbf{F}_B \to \mathbf{F}_R$ и $\mathcal{R}_{B/R}: \mathbf{FAb}_B \to \mathbf{FAb}_R$. Чтобы получить основные свойства последнего функтора, нам понадобится следующее:

Пусть $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(B)$ – $n \times m$-матрица с коэффициентами в B, $X = (X_1, \dots, X_m)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ – объекты в $\mathbf{G}_B$. Обозначим через f морфизм $Y = AX$ (напомним, что X и Y – столбцы!). Тогда $\mathcal{R}_{B/R}(f)$ имеет вид $\mathcal{R}_{B/R}(Y) = A'\mathcal{R}_{B/R}(X)$, где A' – $n \times m$-матрица с коэффициентами в R. Положим $\mathcal{R}_{B/R}(A) = A'$. В этих обозначениях выполняется:

Теорема 4.3 (см. [2], предложение 2.1.2). *Пусть находимся в ситуации предложения 4.2 (iv) $F, G \in \mathbf{FAb}_L$, размерности F и G равны соответственно m и n.*

(i) *$F \in \mathbf{FAb}_B$ эквивалентно $\mathcal{R}_{L/K}(F) \in \mathbf{FAb}_R$.*

(ii) *Пусть $F, G \in \mathbf{FAb}_B$, $f \in \mathrm{Hom}_L(F, G)$. Тогда $f \in \mathrm{Hom}_B(F, G)$ эквивалентно $\mathcal{R}_{L/K}(f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathcal{R}_{L/K}(F), \mathcal{R}_{L/K}(G))$.*

(iii) *Пусть R – кольцо характеристики 0, $F, G \in \mathbf{FAb}_B$ и $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(B)$, $A' = \mathcal{R}_{B/R}(A)$. Существование $f \in \mathrm{Hom}_B(F, G)$ с $\mathbf{J}(f) = A$ эквивалентно существованию такого $f' \in \mathrm{Hom}_R(\mathcal{R}_{B/R}(F), \mathcal{R}_{B/R}(G))$, что $\mathbf{J}(f') = A'$.*

(iv) *Пусть R – кольцо характеристики 0 и $F, G \in \mathbf{FAb}_B$. Формальные группы F и G строго изоморфны над B тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_{B/R}(F)$ и $\mathcal{R}_{B/R}(G)$ строго изоморфны над R.* $\square$

5. Доказательства

Чтобы доказать предложение 4.2, нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 5.1. *Пусть $X = (X_1, \dots, X_m) \in \mathbf{G}_B$, $X_\omega = \mathcal{R}_\omega(X) = (X_{ij})_{e\times m}$. Для $T \in \mathbf{G}_R$ и $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(T, X_\omega)$ положим $\varphi_{X,T}(f) = \rho_X \circ f$. Тогда $\varphi_{X,T}: \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(T, X_\omega) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, X)$ – изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(T, X_\omega)$, $f = (f_{ij})_{e\times m}$. В явном виде $\varphi_{X,T}(f) = (f_1, \dots, f_m)$, где $f_j = \sum_{i=1}^{e} \omega_i f_{ij}$, $f_{ij} \in R[[T]]$, $T = (T_1, \dots, T_k)$.

Очевидно, что отображение $\varphi_{X,T}$ R-линейно. Утверждение, что $\varphi_{X,T}$ – изоморфизм, следует из того, что $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_e)$ является базисом алгебры $B[[T]]$ над $R[[T]]$. $\square$

Доказательство предложения 4.2. (i) Семейство φ_X изоморфизмов $\varphi_{X,T} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(T, X_\omega) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, X)$ из леммы 5.1 есть изоморфизм функторов $\mathbf{G}_R^\circ \to \mathbf{Sets}$. Действительно, пусть $h : T' \to T$ – морфизм в $\mathbf{G}_R$. Нужно проверить равенство $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(h, X) \circ \varphi_{X,T} = \varphi_{X,T'} \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(h, X_\omega)$. Оно сводится к равенству $(\rho_X \circ f) \circ h = \rho_X \circ (f \circ h)$ для $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(T, X_\omega)$, которое очевидно. Следовательно, функтор $T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, X)$, $T \in \mathbf{G}_R$ представим объектом $X_\omega \in \mathbf{G}_R$, т.е. $X_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(X)$.

Пусть $g : X \to Y$ – морфизм в $\mathbf{G}_B$. Тогда g индуцирует морфизм представимых функторов $\mathbf{G}_R^\circ \to \mathbf{Sets}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, g) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, Y).$$

По лемме Йонеды он индуцирован однозначно определенным морфизмом $\mathcal{R}_{B/R}(g) : \mathcal{R}_{B/R}(X) \to \mathcal{R}_{B/R}(Y)$. Аксиомы функтора для $\mathcal{R}_{B/R}$ выполняются снова по лемме Йонеды.

Легко доказать, что $g_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(g)$ эквивалентно равенству $g_\omega = \varphi_Y^{-1}(g \circ \rho_X)$, т. е. $\rho_Y \circ g_\omega = g \circ \rho_X$. Отсюда видно, что отображение $g \mapsto g_\omega$ есть гомоморфизм R-модулей $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(X_\omega, Y_\omega)$. Пусть $g_\omega = 0$. Тогда $g \circ \rho_X = 0$, т.е. $g \circ \rho_X \circ \sigma_X = g = 0$. Следовательно $g \mapsto g_\omega$ – инъекция, т.е. функтор $\mathcal{R}_{B/R}$ – строгий (унивалентный).

Отметим, что чтобы получить $\mathcal{R}_{B/R}(g)$, надо образовать $g \circ \rho_X$ и каждую компоненту $g \circ \rho_X$ разложить по базису $\omega_1, \dots, \omega_e$ алгебры $B[[X_\omega]]$ над $R[[X_\omega]]$. Тогда коэффициенты этого разложения будут соответствующими компонентами $\mathcal{R}_{B/R}(g)$.

(ii) Все утверждения тривиальны.

(iii) Пусть $F \in \mathbf{F}_B$, размерность F равна m. Тогда F задаёт структуру группового объекта на $X = (X_1, \dots, X_m) \in \mathbf{G}_B$. Изоморфизм $\varphi_{X,T} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(T, X_\omega) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(T, X)$ позволяет перенести эту структуру в $\mathbf{G}_R$ и мы получаем структуру группового объекта на X_ω. Согласно лемме 2.2 этой структуре соответствует однозначно определённая формальная группа F' над

R. Рассмотрим F как морфизм $F : X \times X \to X$ и F' как морфизм $F' : X_\omega \times X_\omega \to X_\omega$. По определению $F_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(F)$ и F' задают один и тот же морфизм функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(-, X_\omega \times X_\omega) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_R}(-, X_\omega).$$

По лемме Йонеды $F' = F_\omega$.

Пусть $f : F \to G$ – морфизм формальных групп над алгеброй B. Тогда $f \circ F = G \circ (f \times f)$. Согласно (i) и (ii) отсюда $f_\omega \circ F_\omega = G_\omega \circ (f_\omega \times f_\omega)$, $F_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(F)$, $G_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(G)$, $f_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(f)$. Следовательно, f_ω – гомоморфизм $F_\omega \to G_\omega$ над R. Утверждение, что $F \in \mathbf{FAb}_B$ эквивалентно $F_\omega \in \mathbf{FAb}_R$ – прямое следствие строгости функтора $\mathcal{R}_{B/R}$.

(iv) Пусть f – морфизм в категории $\mathbf{G}_B$. Тогда в категории $\mathbf{G}_L$ выполнено $f \circ \rho_X = \rho_Y \circ \mathcal{R}_{L/K}(f)$ и $f \circ \rho_X = \rho_Y \circ \mathcal{R}_{B/R}(f)$, т.е. $\mathcal{R}_{L/K}(f) = \mathcal{R}_{B/R}(f)$ – морфизм в категории $\mathbf{G}_R$.

Обратно, пусть $\mathcal{R}_{L/K}(f) = f_\omega$ – морфизм в $\mathbf{G}_R$, где $f : X \to Y$ – морфизм в $\mathbf{G}_L$. Тогда $f \circ \rho_X = \rho_Y \circ \mathcal{R}_{L/K}(f)$. Отсюда $f \circ \rho_X \circ \sigma_X = \rho_Y \circ f_\omega \circ \sigma_X$, т.е. $f = \rho_Y \circ f_\omega \circ \sigma_X$ является морфизмом в $\mathbf{G}_B$ как композиция морфизмов в $\mathbf{G}_B$. $\square$

Замечание 5.2. В обозначениях работы [2], §2.1, равенство $\rho_Y \circ g_\omega = g \circ \rho_X$, которое эквивалентно $g_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(g)$, записывается как $g_i(S(X_{lj})) = S_k(g_{ki}(X_{lj}))$, где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, e$, $l = 1, \dots, e$. Здесь S получается распространением линейного оператора $R^e \to B : (a_1, \dots, a_e) \mapsto \sum_{i=1}^{e} a_i \omega_i$ на всевозможные кольца формальных степенных рядов над R и B.

Следствие 5.3. *Пусть X, Y – объекты в $\mathbf{G}_B$ и $f' : X_\omega \to Y_\omega$ – морфизм в $\mathbf{G}_R$, $X_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(X)$, $Y_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(Y)$. Существование морфизма $f : X \to Y$ в $\mathbf{G}_B$ такого, что $\mathcal{R}_{B/R}(f) = f'$ эквивалентно соотношению $\rho_Y \circ f' \circ \sigma_X \circ \rho_X = \rho_Y \circ f'$.*

Доказательство. Если $\mathcal{R}_{B/R}(f) = f'$, то $f = \rho_Y \circ f' \circ \sigma_X$ и $f \circ \rho_X = \rho_Y \circ f'$. Отсюда $\rho_Y \circ f' \circ \sigma_X \circ \rho_X = \rho_Y \circ f'$. Обратно, из соотношения $\rho_Y \circ f' \circ \sigma_X \circ \rho_X = \rho_Y \circ f'$ следует, что $\rho_Y \circ f' = f \circ \rho_X$, где $f = \rho_Y \circ f' \circ \sigma_X$, т.е. $\mathcal{R}_{B/R}(f) = f'$. $\square$

Следствие 5.4. *Пусть $F, G \in \mathbf{FAb}_B$. Тогда отображение $f \mapsto \mathcal{R}_{B/R}(f) : \mathrm{Hom}_B(F, G) \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{R}_{B/R}(F), \mathcal{R}_{B/R}(G))$ является инъективным гомоморфизмом абелевых групп.*

Доказательство. Будем использовать обозначения $F_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(F)$, $G_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(G)$ и $f_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(f)$ для любого $f \in$

$\mathrm{Hom}_B(F,G)$. Пусть $f,g \in \mathrm{Hom}_B(F,G)$. Тогда $f +_G g = G \circ (f \times g)$. Отсюда $(f +_G g)_\omega = G_\omega \circ (f_\omega \times g_\omega) = f_\omega +_{G_\omega} g_\omega$. $\square$

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм в категории $\mathbf{G}_B$. В доказательстве предложения 4.2. (i) задан способ вычисления $f_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(f)$. Из этого способа можем сделать два вывода. Первый – что определение $\mathcal{R}_{B/R}(A)$, где A – $n \times m$-матрица с компонентами в B, корректно.

Второй вывод выглядит так. Пусть f_r обозначает однородную составляющую степени r морфизма f (ее компонентами являются однородные составляющие степени r соответствующих компонент морфизма f). Аналогично пусть $(f_\omega)_r$ – однородная составляющая степени r морфизма f_ω. Тогда выполняется

Следствие 5.5. (i) *$\mathcal{R}_{B/R}(f_r) = (f_\omega)_r$, где r – целое положительное число.*

(ii) *В частности, $\mathcal{R}_{B/R}(\mathbf{J}(f_\omega)) = \mathbf{J}\left(\mathcal{R}_{B/R}(f_\omega)\right)$.* $\square$

Функтор $\mathcal{R}_{B/R}$ зависит от базиса B над R. Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_e)$ и $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_e)$ – два базиса B над R, причем $\omega' = C\omega$, где $C \in \mathrm{M}_{e\times e}(R)$ – матрица перехода. Обозначим через $\mathcal{R}_\omega$ и $\mathcal{R}_{\omega'}$ получающиеся соответствующим образом функторы. Покажем, что они изоморфны. Пусть $X = (X_1, \dots, X_m) \in \mathbf{G}_B$ и $\mathcal{R}_\omega(X) = X_\omega = \mathcal{R}_{\omega'}(X) = X_{\omega'} = (X_{ij})_{e\times m}$. Определим морфизм $\varphi_C(X) : X_\omega \to X_{\omega'}$ формулой $\varphi_C(X) = CX_\omega$ (в матричных обозначениях).

Предложение 5.6. (i) *Морфизмы $\varphi_C(X)$, $X \in \mathbf{G}_B$ определяют изоморфизм функторов $\varphi_C : \mathcal{R}_\omega \to \mathcal{R}_{\omega'}$. Таким образом, если $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_B}(X,Y)$, то $\mathcal{R}_{\omega'}(f) = \varphi_C(Y) \circ \mathcal{R}_\omega(f) \circ \varphi_C(X)^{-1}$.*

(ii) *Пусть F – формальная группа над B, $F : X \times Y \to X$. Тогда $\mathcal{R}_{\omega'}(F) = \varphi_C(X) \circ \mathcal{R}_\omega(f) \circ \left(\varphi_C(X)^{-1} \times \varphi_C(Y)^{-1}\right)$.*

Доказательство. В силу предложения 4.2 достаточно доказать только (i). Пусть $X = (X_1, \dots, X_m)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ и $f : X \to Y$ – объекты и морфизмы в категории $\mathbf{G}_B$. Обозначим $X_\omega = X_{\omega'} = (X_{ij})_{e\times m}$, $Y_\omega = Y_{\omega'} = (Y_{ij})_{e\times n}$, $f_\omega = \mathcal{R}_\omega(f)$, $f_{\omega'} = \mathcal{R}_{\omega'}(f)$. Мы должны доказать, что $\varphi_C(Y) \circ f_\omega = f_{\omega'} \circ \varphi_C(X)$.

Пусть $\rho_X : X_\omega \to X$, $\rho'_X : X_{\omega'} \to X$, $\rho_Y : Y_\omega \to Y$ и $\rho'_Y : Y_{\omega'} \to Y$ суть канонические морфизмы из определения 4.1. Тогда выполняется $\rho_X = \rho'_X \circ \varphi_C(X)$ и $\rho_Y = \rho'_Y \circ \varphi_C(Y)$. Кроме того, $\varphi_C(X)$ –

изоморфизм в $\mathbf{G}_R$, так как C – обратимая матрица. Обозначим $f' = \varphi_C(Y) \circ f_\omega \circ \varphi_C(X)^{-1}$. Тогда $\rho'_Y \circ f' = \rho'_Y \circ \varphi_C(Y) \circ f_\omega \circ \varphi_C(X)^{-1} = \rho_Y \circ f_\omega \circ \varphi_C(X)^{-1} = f \circ \rho_X \circ \varphi_C(X)^{-1} = f \circ \rho'_X$. Так как $f_{\omega'}$ – единственный элемент в $\mathbf{G}_R$, для которого $f \circ \rho'_X = \rho'_Y \circ f_{\omega'}$, то $f_{\omega'} = f'$. Утверждение доказано. $\square$

Теперь рассмотрим поведение функтора $\mathcal{R}_{B/R}$ при замене базы. Пусть $\varphi : R \to R'$ – произвольная R-алгебра, $B' = B \otimes_R R'$. Каноническое отображение $\varphi_B : B \to B'$, $b \mapsto b \otimes 1$ переводит базис $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ R-модуля B над R в базис $\omega' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_m)$ B' над R'. Определим ограничение скаляров $\mathcal{R}_{B/R}$ посредством базиса ω и ограничение скаляров $\mathcal{R}_{B'/R'}$ посредством базиса ω'. В этих обозначениях выполняется:

Предложение 5.7. *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм в $\mathbf{G}_B$ и $f' = \varphi_B * f$ получается применением φ_B к коэффициентам f. Тогда $\mathcal{R}_{B'/R'}(f') = \varphi * \mathcal{R}_{B/R}(f)$. То же самое относится к формальным группам и гомоморфизмам формальных групп.*

Доказательство. Пусть $\rho_X : X_\omega \to X$ и $\rho_Y : Y_\omega \to Y$ канонические отображения в категории $\mathbf{G}_B$ (см. определение 4.1), $X_{\omega'} = \mathcal{R}_{B'/R'}(X)$, $Y_{\omega'} = \mathcal{R}_{B'/R'}(Y)$ и $\rho'_X : X_{\omega'} \to X$ и $\rho'_Y : Y_{\omega'} \to Y$ – соответствующие отображения в $\mathbf{G}_{B'}$. Тогда $\rho'_X = \varphi_B * \rho_X$ и $\rho'_Y = \varphi_B * \rho_Y$. Обозначим $f_\omega = \mathcal{R}_{B/R}(f)$. Так как $f \circ \rho_X = \rho_Y \circ f_\omega$, то после применения φ_B получим $f' \circ \rho'_X = \rho'_Y \circ \varphi * f_\omega$. Отсюда $\mathcal{R}_{B'/R'}(f') = \varphi * f_\omega$. $\square$

Пример 5.8. Пусть G_a^m – m-мерная аддитивная формальная группа над B. Тогда $\mathcal{R}_{B/R}(G_a^m) = G_a^{em}$. Пусть R – кольцо характеристики 0, $R_\mathbb{Q} = R \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, $B_\mathbb{Q} = B \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ и F – коммутативная формальная группа над B размерности m. Пусть $\lambda_F : F \to G_a^m$ - логарифм F. Тогда из предложения 4.2 и следствия 5.5 (ii) получаем, что $\mathcal{R}_{B_\mathbb{Q}/R_\mathbb{Q}}(\lambda_F)$ – логарифм формальной группы $\mathcal{R}_{B/R}(F)$.

Доказательство теоремы 4.3. Оно полностью аналогично доказательству предложения 2.1.2 в [2].

(i) и (ii) – прямые следствия предложения 4.2.

(iii) Если $f \in \mathrm{Hom}_B(F, G)$ и $\mathbf{J}(f) = A$, то $\mathbf{J}(\mathcal{R}_{B/R}(f)) = \mathcal{R}_{B/R}(A)$ согласно следствию 5.5.

Обратно, пусть $f' \in \mathrm{Hom}_B(\mathcal{R}_{B/R}(F), \mathcal{R}_{B/R}(G))$ и $\mathbf{J}(f') = A'$. Так как R – кольцо характеристики 0, то (см. [1]) существует единственный гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_L(F, G)$ такой, что $\mathbf{J}(f) = A$.

Тогда $\mathbf{J}\left(\mathcal{R}_{B/R}(f)\right) = A'$. Но f' – единственный гомоморфизм из $\mathcal{R}_{B/R}(F)$ в $\mathcal{R}_{B/R}(G)$ в категории $\mathbf{FAb}_K$, для которого $\mathbf{J}(f') = A'$. Следовательно, $\mathcal{R}_{L/K}(f) = f'$. Тогда $f \in \mathrm{Hom}_B(F,G)$ согласно пункта (ii).

(iv) Это – частный случай (iii), когда $A = I_m$ (единичная матрица порядка m). □

Следствие 5.9. *Если* $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(L)$ *и* $A' = \mathcal{R}_{L/K}(A) \in \mathrm{M}_{en\times em}(R)$, *то* $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(B)$. □

Следствие 5.10. *Пусть* $\lambda_{F'}$ *– логарифм формальной группы* $F' \in \mathbf{FAb}_R$, R *– кольцо характеристики* 0. *Если в категории* $\mathbf{G}_L$ *существует морфизм* f *такой, что* $\mathcal{R}_{L/K}(f) = \lambda_{F'}$, *то* f *является логарифмом формальной группы* F *над* B *такой, что* $\mathcal{R}_{B/R}(F) = F'$.

Доказательство. Так как $\mathbf{J}(\lambda_{F'})$ – единичная матрица, то $\mathbf{J}(f)$ – тоже единичная матрица (другой размерности). Тогда f является логарифмом формальной группы $F(X,Y) = f^{-1}(f(X), f(Y))$, определённой над L (столбцы X и Y – подходящей размерности). Из предложения 4.2 следует, что $\mathcal{R}_{L/K}(F) = F'$. Тогда согласно теореме 4.3, $F \in \mathbf{FAb}_B$ и $\mathcal{R}_{B/R}(F) = F'$. □

Литература

1. M. Hazewinkel, *Formal groups and applications.* Springer-Verlag (1978).
2. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, *Явная классификация формальных групп над локальными полями.* — Труды МИАН **241**, вып. 2 (2003), 43–67.
3. А. Вейль, *Адели и алгебраические группы.* — Математика 8:4 (1964), 3–74.
4. S. Bosh, W. Lütkebohmert, M. Raynoud, *Neron models.* Springer-Verlag (1990).
5. В. Е. Воскресенский, *Алгебраические торы.* Наука (1977), 224.
6. A. Fröhlich, *Formal groups.* Lecture Notes in Mathematics, **74**, Springer-Verlag (1968).

Bondarko M. V., Vostokov S. V., Minchev Kh. P. Restriction of the scalars for formal groups.

The aim of this work is generalization of the results of restriction of the scalars functor for formal groups in paper "Explicit classification of formal groups over local fields" of first two autors. This results are extended to formal groups over arbitrary commutative ring, which we assume integer domain or ring of characteristic zero if it is needed.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 марта 2004 г.