Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

А. И. Виноградов

ГИПОТЕЗА ЛИННИКА. ЛОКАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Памяти А. И. Скопина
1927–2003

Введение

В этой работе мы получим спектральное разложение суммы Линника [1]:

$$L_{m,n}\big(\frac{1}{2}N,N\big)=\sum_{\frac{1}{2}N<C\leqslant N}\frac{S(m,n;c)}{c},\tag{0.1}$$

на языке локальной Z-функции Сельберга [9], где $S(m,n;c)$ – сумма Клоостермана модуля c и параметров (m,n); $m,n\geqslant 1$ [2, 3]. На самом деле мы взяли в (0.1) полусумму Линника вместо полной суммы $l_{m,n}(N)$ из [8] по соображениям технического удобства, т.к. она легко согласуется с локальной Z-функцией Сельберга [9]. Эти две суммы имеют простую линейную связь:

$$l_{m,n}\big(\frac{1}{2}N,N\big)=l_{m,n}(N)-l_{m,n}\big(\frac{1}{2}N\big).$$

Это равенство можно еще записать как итерационное:

$$l_{m,n}(N)=l_{m,n}\big(\frac{N}{2},N\big)+l_{m,n}\big(\frac{N}{2}\big).$$

Отсюда следует полное итерационное равенство:

$$l_{m,n}(N)=\sum_{0\leqslant k\leqslant[\log_2 N]}l_{m,n}\big(\frac{N_k}{2},N_k\big),\quad N_k=\frac{N}{2^k}.\tag{0.2}$$

Отметим, что спектральное разложение суммы (0.1), полученное на языке локальной Z-функции, будет совпадать с аналогичным разложением [4, 7, 8], полученным на языке глобальной Z-функции Сельберга:

$$Z_{m,n}\big(\frac{1}{2}+s\big)=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{s(m,n;c)}{c^{1+2s}},\quad \operatorname{Re}s>\frac{1}{4}.\tag{0.3}$$

Но в техническом отношении локальный путь существенно другой, т.к. локальная Z-функция регулярна во всей комплексной плоскости, в то время как глобальная функция (0.3) имеет бесконечно много полюсов на мнимой оси и на вещественной отрицательной полуоси.

Аналитический параметр s глобальной Z-функции (0.3) мы взяли с аддитивной нормировкой вида $\left(\frac{1}{2}+s\right)$ по соображениям технического удобства. Поэтому критическая сельберговская прямая [5] смещается влево на мнимую ось $\operatorname{Re} s = 0$.

§1. Локальная Z-функция

Для удобства читателя мы здесь повторим определение и основные спектральные свойства локальной Z-функции Сельберга [9]. Для этого введем гладкую финитную функцию $f(x)$ на полуоси $x \geqslant 0$, которую определим пятью условиями:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ 0 \leqslant &f(x) \leqslant 1, \quad \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ f(x) &= 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 \geqslant &f(x) \geqslant 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{4}, \\ f(x) &= 0, \quad x \geqslant 1+\frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

На интервале подъема $\left(\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ и спуска $\left(1 \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{4}\right)$ будем считать функцию f бесконечно гладкой, монотонной и с ограниченными производными до любого фиксированного порядка включительно. При этом, не нарушая общности рассуждений, можно считать эту функцию симметричной относительно центральной точки ее носителя

$$f(x) = f\left(\frac{3}{2} - x\right). \tag{1.2}$$

При этом, если доопределить функцию $f(x)$ на всей оси $x \in \mathbb{R}$ условием $f(x) = 0$ для $x \leqslant 0$, тогда уравнение (1.2) становится справедливым для любого $x \in \mathbb{R}$.

Для функции f определим Z-функцию равенством

$$Z_{m,n}(f) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{s(m,n;c)}{c^{1+2s}} f\Big(\frac{c}{N}\Big), \tag{1.3}$$

где $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ – целые фиксированные, $N \geqslant 2$ – произвольный вещественный параметр; $s \in \mathbb{C}$ – произвольный комплексный параметр.

Для локальной Z-функции (1.3) нет необходимости держать параметр s в правой полуплоскости, т.к. сумма (1.3) конечна и ее носитель лежит в интервале $\frac{1}{4}N \leqslant c \leqslant \frac{5}{4}N$, что следует из определения функции $f\big(\frac{c}{N}\big)$ в (1.1). Для перевода Z-функции (1.3) на спектральный язык удобно отнормировать ее множителем N^{2s} и привести к стандартной форме:

$$N^{2s} \cdot Z_{m,n}(f) = (2M)^{2s} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \frac{s(m,n;c)}{c} \cdot \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2s} \cdot f\Big(\frac{1}{x \cdot M}\Big), \tag{1.4}$$

где $M = \frac{N}{4\pi\sqrt{m \cdot n}}$, $x = \frac{4\pi\sqrt{m \cdot n}}{c}$ – спектральный параметр из работы [6].

По определению (1.1) функция f финитна, бесконечно гладка и ее носитель отделен от нуля. Поэтому сумма в правой части (1.4) удовлетворяет всем требованиям теоремы 1, [6] с весовой функцией

$$\varphi(x) = \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2s} \cdot f\Big(\frac{1}{x \cdot M}\Big). \tag{1.5}$$

Поэтому левую часть равенства (1.4) можно разложить на три спектральные компоненты (см. [6], равенство (1.19)):

$$N^{2s} Z_{m,n}(f) = (Z_{m,n}^{\mathrm{cusp}} + Z_{m,n}^{\mathrm{disc}} + Z_{m,n}^{\mathrm{con}})(f). \tag{1.6}$$

Наиболее важной составляющей правой части (1.6) является дискретная компонента:

$$Z_{m,n}^{\mathrm{disc}}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot t_j(m) \cdot t_j(n) \cdot \widehat{\varphi}(i\varkappa_j), \tag{1.7}$$

где

$$\alpha_j = |\rho_j(1)|^2 \cdot (\operatorname{ch} \pi \varkappa_j)^{-1},$$

$$\widehat{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w = \varepsilon \in (0, 2^{-4})} M^{2w} \Gamma_f(2(w-s)) \Gamma(w-z) \Gamma(w+z) \cos \pi w dw, \tag{1.8}$$

$$\Gamma_f(s) = \int\limits_0^\infty y^{s-1} f(y) dy. \tag{1.9}$$

В равенстве (1.8) мы привели преобразованную форму весовой функции $\widehat{\varphi}(z)$, по сравнению с равенством (1.19) [6]. В (1.8) исчез множитель M^{-2s}, который сократился с общим множителем M^{2s} в правой части (1.4).

Абсолютную сходимость интеграла (1.8) и ряда (1.7) обеспечивает функция Γ_f в ядре интеграла (1.8) из равенства (1.9). Носитель функции f отделен от нуля, поэтому $\Gamma_f(s)$ регулярна во всей s-плоскости и для нее справедливо равенство:

$$\Gamma_f(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+k)} \cdot \Gamma_{f^{(k)}}(s+k), \tag{1.10}$$

где $\Gamma(s)$ – классическая Γ-функция, $f^{(k)}$ – производная порядка $k \geqslant 0$, при этом считаем, что $f^{(0)} = f$. Поэтому в (1.10) при любом целом $k \geqslant 1$ справедливо равенство:

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+k)} = \prod_{n=0}^{k-1} (s+n)^{-1}. \tag{1.11}$$

Полюса (1.11) в целых точках $s = -n$, для $n \in [0, k-1]$, гасятся нулями $\Gamma_{f^{(k)}}$ в (1.10) в этих же точках

$$\lim_{s \to (-n)} \Gamma_{f^{(k)}}(s+k) = 0,$$
$$n \in [0, k-1], k \geqslant 1.$$

Равенства (1.10) и (1.11) обеспечивают абсолютную сходимость ряда (1.7) при $k \geqslant k_0(v)$, где $v = \operatorname{Re} w$.

Cusp–компонента правой части (1.6) определяется раенством:

$$Z_{m,n}^{\text{cusp}}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \equiv 0 \pmod 2} (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{1 \leqslant j \leqslant \theta_k} a_{j,k}$$
$$\times t_{j,k}^*(m) \cdot t_{j,k}^*(n) \cdot \widetilde{\varphi}(k-1). \tag{1.12}$$

По пути мы упростили правую часть (1.12) по сравнению с (1.19), [6], введя нормированную форму коэффициентов Фурье с помощью равенства:

$$\psi^*_{j,k}(n) = \psi_{j,k}(n) \cdot n^{-\frac{k-1}{2}}. \tag{1.13}$$

В этом случае в равенстве

$$\psi^*_{j,k}(n) = \psi^*_{j,k}(1) \cdot t^*_{j,k}(n) \tag{1.14}$$

появляется нормированное собственное значение оператора Гекке $t^*_{j,k}(n)$, для которого справедлива единая оценка Делиня для всех $k \geqslant 2$:

$$|t^*_{j,k}(n)| \leqslant \tau(n) = \sum_{d/n} 1 \ ,$$

а первый коэффициент Фурье $\psi^*_{j,k}(1)$ из правой части (1.14) мы передали нормировочному коэффициенту $a_{j,k}$:

$$a_{j,k} = |\psi^*_{j,k}(1)|^2 \cdot \Gamma(k) \cdot (4\pi)^{1-k}. \tag{1.15}$$

Весовую функцию $\widetilde{\varphi}(k-1)$ мы также возьмем в преобразованном виде:

$$\widetilde{\varphi}(k-1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, w = -\varepsilon} \Gamma(w + \frac{k-1}{2}) / \Gamma(1 - w + \frac{k-1}{2}) \Gamma_f(2(w-s)) \cdot M^{2w} \cdot dw; \tag{1.16}$$

параметр $\varepsilon > 0$ тот же самый, что и в (1.8).

Абсолютную сходимость интеграла (1.16), обеспечивает та же функция Γ_f, о которой мы подробно говорили в предыдущем случае.

Абсолютную сходимость ряда (1.12) по целым четным $k \geqslant 2$ обеспечивает оценка отношения Г-функций ядра в (1.16):

$$\Gamma(w + \frac{k-1}{2}) / \Gamma(1 - w + \frac{k-1}{2}) \ll k^{-1-2\cdot\varepsilon}. \tag{1.17}$$

При этом константа в оценке (1.17) абсолютная, если $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$.

Непрерывная компонента правой части (1.6) определяется равенством:

$$Z^{\mathrm{con}}_{m,n}(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{\frac{1}{2}+ir}(m) \cdot \tau_{\frac{1}{2}+ir}(n)}{|\zeta(1+2ir)|^2} \widehat{\varphi}(ir) dr, \tag{1.18}$$

где ζ – классическая ζ-функция Римана,

$$\tau_s(m) = m^{s-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{d/m} d^{1-2s}.$$

Отметим, что непрерывная компонента в равенстве (2.14) [5] и (1.19) [6] содержит опечатку. Равенство (1.18) является ее исправленным вариантом для группы $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$.

§2. Сумма Линника

Чтобы получить спектральное разложение суммы Линника, нам осталось проинтегрировать два раза равенство (1.6) по отрезку $\mathrm{Re}\, s = \varepsilon > 0$, $|\mathrm{Im}\, s| \leqslant T$. Первый раз, домножив равенство на $\frac{s^{-1}}{2\pi i}$, а второй – на $\frac{s^{-1}2^{-2s}}{2\pi i}$, и затем из первого интегрального равенства вычесть почленно второе. В результате получится интегральное равенство этой разности:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT} N^{2s} \cdot (1-2^{-2s}) \cdot Z_{m,n}(f) \cdot \frac{ds}{s}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT} (1-2^{-2s}) \cdot [Z_{m,n}^{\mathrm{cusp}} + Z_{m,n}^{\mathrm{disc}} + Z_{m,n}^{\mathrm{con}}](f) \frac{ds}{s}. \qquad (2.1)$$

Подставляя равенство (1.3) в ядро интеграла левой части (2.1) и меняя порядки интегрирования и суммирования, сведем задачу к разности двух стандартных разрывных интегралов конечного типа

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT} \left[\left(\frac{N}{c}\right)^{2s} - \left(\frac{N}{2c}\right)^{2s} \right] \frac{ds}{s},$$

затем используя стандартную процедуру вычисления этих интегралов, получим в левой части (2.1) сумму Линника с остатком:

$$l_{m,n}\big(\frac{N}{2}, N\big) + O\big(\frac{\sqrt{N}}{T} \cdot \log^3 N\big). \qquad (2.2)$$

Все интегралы от спектральных компонент правой части (2.1) вычисляются, в принципе, одинаково. Но наиболее важным является интеграл с дискретной компонентой:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT}(1-2^{-2s})\cdot Z_{m,n}^{\mathrm{disc}}(f)\frac{ds}{s}, \tag{2.3}$$

поэтому его мы и разберем подробно.

Для этого преобразуем интегральную функцию $\widehat{\varphi}(ir)$ из равенства (1.8), сдвинув контур влево на прямую $\operatorname{Re} w=-3/2$. В результате по теореме Коши о вычетах приведем равенство (1.8) к новому виду

$$\widehat{\varphi}(ir)=\widehat{\varphi}_0(ir)+\widehat{\varphi}_{-1}(ir)+\widehat{\varphi}_{-3/2}(ir), \tag{2.4}$$

где $\widehat{\varphi}_0$ – сумма двух вычетов в полюсах $w=\pm ir$, $\widehat{\varphi}_{-1}$ – та же сумма в полюсах $w=1\pm ir$, $\widehat{\varphi}_{-3/2}$ – интеграл (1.8) на прямой $\operatorname{Re} w=-3/2$. Полагая в (2.4) $r=\varkappa_j$ и подставляя (2.4) в (1.7), приведем это равенство к новому виду:

$$Z_{m,n}^{\mathrm{disc}}(f)=\sum_{j=1}^{\infty}(\cdot)\cdot[\widehat{\varphi}_0+\widehat{\varphi}_{-1}+\widehat{\varphi}_{-3/2}](i\varkappa_j), \tag{2.5}$$

где $(\cdot)=\alpha_j\cdot t_j(m)\cdot t_j(n)=\alpha_j(m,n)$.

Вторая и третья суммы (2.5) оцениваются в ядре (2.3) тривиально в силу принципа усиления сходимости Γ-функции на вертикальных прямых при удалении в левую полуплоскость и дают остаток порядка $O(1)$. Поэтому в ядре интеграла (2.3) основной является первая сумма (2.5) с весовой функцией $\widehat{\varphi}_0$. После перемены порядков интегрирования и суммирования интеграл (2.3) станет суммой интегралов вида

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j(m,n)}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT}(1-2^{-2s})\cdot\widehat{\varphi}_0(i\varkappa_j,s)\frac{ds}{s}+O(1). \tag{2.6}$$

В ядре интегралов (2.6) мы добавили второй аргумент s функции $\widehat{\varphi}_0$, который в неявном виде присутствует в исходном определении (1.8):

$$\widehat{\varphi}_0(ir)\equiv\widehat{\varphi}_0(ir,s).$$

Из определения функций $\widehat{\varphi}_0$ в (2.4) получаем ее явный вид:

$$\widehat{\varphi}_0(w,s)=h(w)\cdot\Gamma_f(2(w-s))+h(-w)\cdot\Gamma_f(2(-w-s)), \tag{2.7}$$

где

$$h(w) = M^{2w} \cdot \Gamma(2w) \cdot \cos \pi w, \quad w = ir.$$

Подставляя (2.7) в (2.6), приведем эту сумму к новому виду:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(m,n) \cdot [h(i\varkappa_j) \cdot J(i\varkappa_j) + h(-i\varkappa_j) \cdot J(-i\varkappa_j)], \tag{2.8}$$

где

$$J(w) = \frac{w}{2\pi i} \int_{\varepsilon - iT}^{\varepsilon + iT} (1 - 2^{-2s}) \cdot \Gamma_f(2(w-s)) \frac{ds}{s}. \tag{2.9}$$

В ядро интеграла $J(w)$ подставим явный вид функции Γ_f из равенства (1.10) при $k = 1$:

$$\Gamma_f(2(w-s)) = \frac{\Gamma_{f'}(2(w-s))}{2(w-s)}$$

и поменяем порядки интегрирования (1.9) и (2.9). В результате интеграл (2.9) будет сведен к разности двух интегралов:

$$J(w) = J_1(w) - J_2(w), \tag{2.10}$$

где

$$J_\alpha(w) = \int_0^\infty x^{2w} f'(x) \cdot \xi(\alpha \cdot x) dx \tag{2.11}$$

$$\xi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - iT}^{\varepsilon_i T} \frac{y^{-2s} \cdot ds}{2 \cdot s \cdot (s - w)}. \tag{2.12}$$

Двухпараметрический разрывной интеграл (2.12) вычисляется стандартным образом и в результате получается его явный вид:

$$\begin{gathered} \xi(y) = \frac{\chi(y)}{2 \cdot w}(y^{-2w} - 1) \cdot \chi(\frac{|r|}{T}) \\ +\theta \cdot |w|^{-1} \cdot \{[(1 + (T - |r|) \cdot |\log y|) + 1]\}^{-1}, \end{gathered} \tag{2.13}$$

где $\theta \ll 1$, $\chi(y)$ – характеристическая функция единичного интервала

$$\chi(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & y > 1. \end{cases}$$

Затем разделим интеграл (2.11) на две части:

$$J_\alpha(w) = \Big(\int\limits_{0 \leqslant \alpha\cdot y \leqslant 1} + \int\limits_{\alpha\cdot y \geqslant 1} \Big)(\dots)dy.$$

После чего подставим в первый из них правую часть (2.12), когда $\chi(\alpha y) = 1$, и сдвинем контур (2.12) влево на бесконечность. А во второй – когда $\chi(\alpha y) = 0$, и сдвинем контур (2.12) вправо на бесконечность. В результате равенство (2.13) обеспечит нам асимптотику:

$$J_\alpha(w) = \frac{1}{2\cdot w}(\alpha^{-2w} - 1)\cdot\chi\big(\frac{|r|}{T}\big) + \frac{\theta\cdot\log T}{|r|\cdot[1+(T-|r|)]}, \qquad (2.14)$$

где $r = \operatorname{Im} w$, $\theta \ll 1$.

Главный член интеграла (2.14) обращается в ноль при $\alpha = 1$. Поэтому в правой части (2.10) остается только $J_2(w)$ с остатком из (2.14). В результате получаем явный вид интеграла $J(w)$ из (2.10):

$$J(w) = \frac{1}{2w}(1-2^{-2w})\chi\big(\frac{|r|}{T}\big) + (\text{остаток}). \qquad (2.15)$$

Остаток в (2.15) тот же самый, что и в (2.14).

Подставляя (2.15) в (2.8) при $w = \pm i\varkappa_j$, получаем асимптотику суммы (2.8) и интеграла (2.3). Она равна в том и другом случае одной и той же величине вида:

$$L_{m,n}\big(\frac{N}{2}, N\big) + \overline{L_{m,n}\big(\frac{N}{2}, N\big)} + O(\log^3 N), \qquad (2.16)$$

где

$$L_{m,n}\big(\frac{N}{2}, N\big) = L_{m,n}(N) - L_{m,n}\big(\frac{N}{2}\big),$$
$$L_{m,n}(N) = \sum_{\varkappa_j \leqslant T} \alpha_j(m,n)\cdot M^{2i\varkappa_j}\cdot\frac{\Gamma(2i\varkappa_j j)\cdot \operatorname{ch}\pi\varkappa_j}{2i\varkappa_j}.$$

Тем самым мы получили дискретную компоненту суммы Линника точно такого же вида, как и на языке глобальной Z-функции Сельберга [8].

Спектральное представление двух других компонент получается аналогично.

Литература

1. Yu. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues modular operators.* — Proc. of the International Congress of Math. Stockholm (1962), 217–284.
2. H. D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form* $ax^2 + by^2 + cr^2 + dt^2$. — Acta Math. **49** (1926), 407–464.
3. A. Weil, *On some exponential sums.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **34** (1948), 204–207.
4. A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms.* — Proc. Symposia Pure Math. VIII. Amer. Math. Sci. Providence (1965), 1–15.
5. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* — Матем. сб. **111**, N 3 (1980), 334–383.
6. I. M. Deshouillers, H. Iwaniec, *Kloostermann sums and Fourier coefficients of cusp form.* — Invent. Math. **70** (1982), 219–288.
7. D. Goldfeld, P. Sarnak, *Sums of Kloosterman Sums.* — Invent. Math. **71** (1983), 243–250.
8. А. И. Виноградов, *О гипотезе Линника.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 64–77.
9. А. И. Виноградов, *Z-функция Сельберга. Локальный подход.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 298–317.

Vinogradov A. I. The Linnik conjecture. The local approach.
The Linnik sum is expanded in the spectrum by the local method.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 сентября 2004 г.