Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

В. Г. Казакевич, А. К. Ставрова

ПОДГРУППЫ, НОРМАЛИЗУЕМЫЕ КОММУТАНТОМ ПОДГРУППЫ ЛЕВИ

В настоящей работе описываются подгруппы в унипотентном радикале максимальной параболической подгруппы в группе Шевалле над полем, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви.

§1. Введение

Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней, G — группа Шевалле типа Φ над полем K и $P = UL$ — максимальная параболическая подгруппа в G с унипотентным радикалом U и подгруппой Леви L. Тогда $L = TL'$, где T — максимальный тор G, $L' = [L, L]$ — подгруппа в L, порожденная унипотентными элементами. Изучению действия подгруппы Леви на группе U и факторах нижнего центрального ряда U (внутренних модулях Шевалле) посвящено значительное количество работ, см., например, [4, 5, 6]. Известно (например, [7]), что U не имеет собственных подгрупп, нормализуемых T (и, тем более, подгрупп, нормализуемых L) уже при самых слабых ограничениях на основное поле K, таких как $|K| \geq 5$. Однако в большинстве случаев группа U имеет нетривиальную решетку подгрупп, нормализуемых L'. В настоящей работе мы полностью классифицируем подгруппы унипотентного радикала U, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви L', при стандартных ограничениях на характеристику основного поля:

NVB[1] $\quad$ $\operatorname{char} K \neq 2$ в случае $\Phi = B_l, C_l, F_4$;
$\operatorname{char} K \neq 2, 3$ в случае $\Phi = G_2$.

Заметим, что все полученные результаты опираются только на вычисления с элементарными образующими $x_\alpha(\xi)$ и на соотношения Стейнберга (в особенности на коммутационную формулу

[1] В англоязычных работах это условие обычно формулируют как “$\operatorname{char} K$ is not a very bad prime for G”.

Шевалле). Так как они не зависят от выбора решетки весов, мы можем в дальнейшем считать группу G односвязной.

Чтобы сформулировать основной результат работы, введем некоторые обозначения. Зафиксируем в Φ систему простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ (нумерация следует Бурбаки [1]), $\widetilde{\alpha} \in \Phi$ — максимальный корень относительно Π. Согласно классическому результату Титса, стандартные параболические подгруппы находятся в биективном соответствии с подмножествами в Π, в частности, максимальные параболические подгруппы P_r, $1 \leqslant r \leqslant l$, соответствуют подмножествам $\Pi \backslash \{\alpha_r\}$. Унипотентный радикал и подгруппа Леви подгруппы P_r обозначаются через U_r и L_r соответственно. Для любого $\beta \in \Phi$ обозначим через $m_r(\beta)$ коэффициент, с которым простой корень α_r входит в разложение β.

В массовом случае подгруппы в U_r, нормализуемые L_r', параметризуются подмножествами в множестве $\{1, \dots, m_r(\widetilde{\alpha})\}$, замкнутыми относительно сложения. Подмножество $S \subset \{1, \dots, n\}$ называется *замкнутым*, если для любых $i, j \in S$ таких, что $i + j \leqslant n$, выполняется $i + j \in S$. Сопоставим замкнутому подмножеству $S \subseteq \{1, \dots, m_r(\widetilde{\alpha})\}$ подгруппу

$$U_S = \langle x_\alpha(\xi),\ m_r(\alpha) \in S,\ \xi \in K \rangle .$$

Структура таких подгрупп изучается в §3. Непосредственно из коммутационной формулы Шевалле вытекает, что L_r' нормализует U_S. В исключительных случаях (§5) при параметризации возникают, кроме того, аддитивные подгруппы в K. Для любой подгруппы $A \leqslant K^+$ мы обозначаем $X_\beta(A) = \{x_\beta(\xi) \mid \xi \in A\}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы. Как и выше, предполагаем, что P_r — максимальная параболическая подгруппа в группе Шевалле типа Φ над K.

Теорема. *Пусть выполнено* **NVB**. *Пусть H — собственная подгруппа в U_r, нормализуемая L_r'. Тогда*

- **Массовый случай.** *Если $\Phi = A_l$ или корень α_r не соединен с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина, то $H = U_S$ для некоторого замкнутого множества $S \subset \{1, 2, \dots, m_r(\widetilde{\alpha})\}$.*
- **Исключительный случай.** *Если α_r — единственный корень, соединенный с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина, то $H = X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ для некоторой $A \leqslant K^+$.*
- **Патологический случай.** *Если $\Phi = G_2$ и $\alpha_r = \alpha_1$, то $H = X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A)$ или $H = X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A)U_{\{3\}}$, где $A \leqslant K^+$.*

Полный список возникающих в этой теореме подгрупп приведен в таблице 1. В этой таблице H обозначает собственную подгруппу в U_r, нормализуемую L'_r, а A — любую аддитивную подгруппу в K.

§2. Предварительные утверждения

1. Основные обозначения. Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней в l-мерном евклидовом пространстве со скалярным произведением $(\ ,\ )$. Фиксируем $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — фундаментальную систему корней (alias систему простых корней) в Φ. Тогда любой корень $\alpha \in \Phi$ единственным образом представляется в виде $\alpha = \sum m_r(\alpha)\alpha_r$. Будем говорить, что $\alpha \in \Phi^+$ — корень *r-кратности m* (или просто *кратности m*), если $m_r(\alpha) = m$. Сумма $h(\alpha) = \sum m_r(\alpha)$ называется *высотой* корня α; единственный корень максимальной высоты (относительно Π) обозначается $\widetilde{\alpha}$. Пусть Φ^+ и Φ^- — множества положительных и отрицательных корней соответственно.

Пусть K — произвольное поле, K^* и K^+ — его мультипликативная и аддитивная подгруппы. Как и прежде, $G = G(\Phi, K)$ — группа Шевалле типа Φ над K. Для любых $\alpha \in \Phi$ и $\xi \in K$ мы обозначаем через $x_\alpha(\xi)$ соответствующий элементарый корневой унипотент в G; элементарная корневая подгруппа в G, соответствующая α, обозначается X_α.

Любая максимальная параболическая подгруппа в G сопряжена с единственной параболической подгруппой $P_r \leq G$, соответствующей простому корню $\alpha_r \in \Pi$. Унипотентный радикал подгруппы P_r равен

$$U_r = \langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Sigma_r,\ \xi \in K \rangle ,$$

где $\Sigma_r = \{\alpha \in \Phi^+ \mid m_r(\alpha) > 0\}$, а подгруппа Леви L_r совпадает с произведением максимального тора группы G и своего коммутанта

$$L'_r = [L_r, L_r] = \langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Delta_r,\ \xi \in K \rangle ,$$

где $\Delta_r = \{\alpha \in \Phi \mid m_r(\alpha) = 0\}$. Мы полагаем $\Delta_r^{\pm} = \Delta_r \cap \Phi^{\pm}$ и $\Sigma_r(m) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid m_r(\alpha) = m\}$ для любого $1 \leq m \leq m_r(\widetilde{\alpha})$. Хорошо известно (см., например, [4]), что для любого $1 \leq m \leq m_r(\tilde{\alpha})$ в множестве $\Sigma_r(m)$ существует единственный корень максимальной высоты, мы обозначаем его $\widetilde{\alpha}_m$.

Таблица 1. Собственные подгруппы унипотентного радикала, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви.

Φ	r	$m_r(\widetilde{\alpha})$	H
$A_l,\ l \geq 1$	$1 \leq r \leq l$	1	нет
$B_l,\ l \geq 2$	$r = 1$ $r = 2$ $2 < r \leq l$	1 2 2	нет $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ $U_{\{2\}}$
$C_l,\ l \geq 2$	$r = 1$ $2 \leq r < l$ $r = l$	2 2 1	$X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ $U_{\{2\}}$ нет
$D_l,\ l \geq 3$	$r = 1,\ l-1,\ l$ $r = 2$ $2 < r \leq l-2$	1 2 2	нет $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ $U_{\{2\}}$
E_6	$r = 1, 6$ $r = 2$ $r = 3, 5$ $r = 4$	1 2 2 3	нет $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ $U_{\{2\}}$ $U_{\{3\}},\ U_{\{2\}},\ U_{\{2,3\}}$
E_7	$r = 1$ $r = 2, 6$ $r = 3, 5$ $r = 4$ $r = 7$	2 2 3 4 1	$X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ $U_{\{2\}}$ $U_{\{3\}},\ U_{\{2\}},\ U_{\{2,3\}}$ $U_{\{4\}},\ U_{\{3\}},\ U_{\{3,4\}},\ U_{\{2,4\}},\ U_{\{2,3,4\}}$ нет
E_8	$r = 1$ $r = 2, 7$ $r = 3, 6$ $r = 4$ $r = 5$ $r = 8$	2 3 4 6 5 2	$U_{\{2\}}$ $U_{\{3\}},\ U_{\{2\}},\ U_{\{2,3\}}$ $U_{\{4\}},\ U_{\{3\}},\ U_{\{3,4\}},\ U_{\{2,4\}},\ U_{\{2,3,4\}}$ $U_{\{6\}}, U_{\{5\}}, U_{\{4\}}, U_{\{5,6\}}, U_{\{4,6\}},$ $U_{\{4,5\}},\ U_{\{3,6\}},\ U_{\{4,5,6\}}, U_{\{3,4,6\}},$ $U_{\{3,5,6\}},\ U_{\{2,4,6\}},\ U_{\{3,4,5,6\}},$ $U_{\{2,4,5,6\}},\ U_{\{2,3,4,6\}},\ U_{\{2,3,4,5,6\}}$ $U_{\{5\}}, U_{\{4\}}, U_{\{3\}}, U_{\{4,5\}}, U_{\{3,5\}},$ $U_{\{3,4\}},\ U_{\{2,4\}},\ U_{\{3,4,5\}},\ U_{\{2,4,5\}},$ $U_{\{2,3,4\}},\ U_{\{2,3,4,5\}}$ $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$
F_4	$r = 1$ $r = 2$ $r = 3$ $r = 4$	2 3 4 2	$X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ $U_{\{3\}},\ U_{\{2\}},\ U_{\{2,3\}}$ $U_{\{4\}},\ U_{\{3\}},\ U_{\{3,4\}},\ U_{\{2,4\}},\ U_{\{2,3,4\}}$ $U_{\{2\}}$
G_2	$r = 1$ $r = 2$	3 2	$X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A),\ \ X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A)U_{\{3\}}$ $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$

2. Некоторые свойства систем корней. Следующие утверждения справедливы для любой приведенной неприводимой системы корней Φ.

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi^+$, $\alpha \neq \beta$ и для любого $1 \leq r \leq l$ выполнено $m_r(\alpha) \leq m_r(\beta)$. Тогда существует такая последовательность корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Pi$, что $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n = \beta$ и, кроме того, $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_i$ — корень для любого $1 \leq i \leq n$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $h(\beta) - h(\alpha) = n$. При $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что $n \geq 1$. Так как $(\beta - \alpha, \beta - \alpha) > 0$, то существует такой корень $\alpha_j \in \Pi$, что $(\beta - \alpha, \alpha_j) > 0$, то есть $(\beta, \alpha_j) > (\alpha, \alpha_j)$. Если $(\alpha, \alpha_j) < 0$, то $\alpha + \alpha_j$ — корень и можно применить индукционное предположение к $\alpha + \alpha_j$ и β. В противном случае $(\beta, \alpha_j) > 0$, поэтому $\beta - \alpha_j$ — корень, индукционное предположение применимо к α и $\beta - \alpha_j$.

Во всех последующих утверждениях мы предполагаем, что в Φ фиксирован некоторый простой корень α_r.

Следствие 1.1. *Для любых корней $\alpha, \beta \in \Sigma_r(m)$, $\alpha \neq \beta$, существует такая последовательность корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Pi \setminus \{\alpha_r\}$, или $\Pi \setminus \{\hat{\alpha}_r\}$ что $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n = \beta$ и, кроме того, $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_i \in \Sigma_r(m)$ для любого $1 \leq i \leq n$.*

Лемма 2. *Для любых $1 \leq n < m \leq m_r(\widetilde{\alpha})$ имеем $\widetilde{\alpha}_m - \widetilde{\alpha}_n \in \Phi$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $(\widetilde{\alpha}_m, \widetilde{\alpha}_n) > 0$. Так как $\widetilde{\alpha}_m$ и $\widetilde{\alpha}_n$ — корни максимальной высоты в $\Sigma_r(m)$ и $\Sigma_r(n)$ соответственно, то $(\widetilde{\alpha}_m, \alpha) \geq 0$ и $(\widetilde{\alpha}_n, \alpha) \geq 0$ для любого $\alpha \in \Pi \setminus \{\alpha_r\}$. Очевидно, что $\widetilde{\alpha}_m = \frac{m}{n}\widetilde{\alpha}_n + \Sigma\lambda_i\alpha_i - \Sigma\mu_j\beta_j$, где $\lambda_i, \mu_j \geq 0$, а α_i и β_j – различные элементы $\Pi \setminus \{\alpha_r\}$. Положим $\delta_1 = \Sigma\lambda_i\alpha_i$ и $\delta_2 = \frac{m}{n}\widetilde{\alpha}_n - \Sigma\mu_j\beta_j$. Нетрудно видеть, что $(\delta_1, \delta_2) \geq 0$. Тогда $(\widetilde{\alpha}_m, \delta_2) = (\delta_1 + \delta_2, \delta_2) > 0$, и поскольку из $m_r(\widetilde{\alpha}_m) > 0$ следует $\delta_2 \neq 0$. Но тогда и $\frac{m}{n}(\widetilde{\alpha}_m, \widetilde{\alpha}_n) = (\widetilde{\alpha}_m, \delta_2) + \Sigma\mu_j(\widetilde{\alpha}_m, \beta_j) > 0$.

Лемма 3. *Во всех случаях, за исключением следующих:*

- *$\Phi \neq A_l$, корень α_r соединен с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина и $m = m_r(\widetilde{\alpha})$;*
- *$\Phi = G_2$, $\alpha_r = \alpha_1$ и $m = 2$;*

множество корней $\Sigma_r(m)$ содержит по крайней мере два элемента.

Доказательство. При $\Phi = G_2$ утверждение проверяется непосредственно. Пусть $\Phi \neq G_2$ и $\Sigma_r(m) = \{\widetilde{\alpha}_m\}$. Тогда для любого

$\beta \in \Pi \setminus \{\alpha_r\}$ имеем $\widetilde{\alpha}_m \pm \beta \notin \Phi$. По лемме 3.6 [3] для любого корня $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Pi$ существует корень $\alpha_i \in \Pi$ такой, что $\alpha - \alpha_i \in \Phi$ и $\alpha + \alpha_i \notin \Phi$. Следовательно, $\widetilde{\alpha}_m + \alpha_r \notin \Phi$. Но если $\widetilde{\alpha}_m \neq \widetilde{\alpha}$, то из леммы 1 следует, что $\widetilde{\alpha}_m + \alpha_r \in \Phi$, значит, $\widetilde{\alpha}_m = \widetilde{\alpha}$. Нетрудно видеть, что α_r является единственным простым корнем в Φ, для которого $(\widetilde{\alpha}_m, \alpha_r) > 0$.

Мы обращаем внимание на эти случаи потому, что наличие одноэлементного $\Sigma_r(m)$ существенно влияет на описание подгрупп в U_r, нормализуемых L'_r (§5).

Лемма 4. *Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней, $\alpha_r \in \Pi$, причем $\alpha_r \neq \alpha_1$ в случае $\Phi = G_2$. Тогда для любой пары $\widetilde{\alpha}_m$, $\widetilde{\alpha}_n$, $1 \leq n \neq m \leq m_r(\tilde{\alpha})$, существует корень $\beta \in \Delta_r^-$ такой, что ровно один из векторов $\widetilde{\alpha}_m + \beta$, $\widetilde{\alpha}_n + \beta$ является корнем.*

Доказательство. Если $m_r(\widetilde{\alpha}) = 1$, то пар m, n, удовлетворяющих условию, не существует, поэтому считаем, что $m_r(\widetilde{\alpha}) \geq 2$. При $\Phi = B_l$ или $\Phi = C_l$ это означает, соответственно, что $2 \leq r \leq l$ или $1 \leq r \leq l-1$. В первом случае при любом r за β можно взять корень $-\alpha_1$, а во втором случае — корень $-\alpha_{r+1}$.

Пусть теперь $\Phi = D_l, E_6, E_7, E_8$. Для любой системы корней без кратных связей, корни которой имеют длину $\sqrt{2}$, имеем $(\alpha, \alpha') \in \{0, 1, -1\}$ для любых корней α и α', причем $\alpha + \alpha'$ является корнем тогда и только тогда, когда $(\alpha, \alpha') = -1$. Не умаляя общности, предположим, что $m > n$. Согласно лемме 2, существует корень $\delta \in \Sigma_r(m-n)$, такой, что $\widetilde{\alpha}_m = \widetilde{\alpha}_n + \delta$. Так как $\widetilde{\alpha}_m$ и $\widetilde{\alpha}_n$ — корни наибольшей высоты в $\Sigma_r(m)$ и $\Sigma_r(n)$ соответственно, то $(\widetilde{\alpha}_m, \alpha) \geq 0$ и $(\widetilde{\alpha}_n, \alpha) \geq 0$ для любого $\alpha \in \Delta_r^+$ и, с другой стороны, $(\widetilde{\alpha}_m, \alpha) \leq 0$ и $(\widetilde{\alpha}_n, \alpha) \leq 0$ для любого $\alpha \in \Delta_r^-$. Нетрудно видеть, что если искомого корня β не существует, то для любого $\alpha \in \Delta_r$ выполнено $(\widetilde{\alpha}_n, \alpha) = (\widetilde{\alpha}_m, \alpha) = (\widetilde{\alpha}_n + \delta, \alpha)$, то есть $(\delta, \alpha) = 0$, что невозможно по следствию 1.1.

Пусть $\Phi = F_4$. Соответствующие корни β перечислены в следующей таблице:

	$r=4$	$r=3$						$r=2$			$r=1$
m,n	1,2	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4	1,2	1,3	2,3	1,2
β	$-\alpha_4$	$-\alpha_3$	$-\alpha_4$	$-\alpha_1$	$-\alpha_3$	$-\alpha_4$	$-\alpha_4$	$-\alpha_4$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$

В случае $\Phi = G_2$ по условию $r = 2$ и единственная возможная пара — это $m = 1$, $n = 2$, тогда искомый корень $\beta = -\alpha_1$.

3. Нормализуемые подгруппы, содержащие корневые элементы.

Лемма 5. *Пусть G – группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом R с единицей, удовлетворяющим условию*

NVB′ $\quad 2 \in R^*$ *в случае* $\Phi = B_l, C_l, F_4$;
$\quad 2, 3 \in R^*$ *в случае* $\Phi = G_2$.

Пусть H — подгруппа в G. Предположим, что группа $X_\beta(I)$, где I — идеал в R, нормализует H. Тогда если $x_\alpha(\xi) \in H$ для некоторого $\xi \in R$ и $\alpha + \beta \in \Phi$, то $X_{\alpha+\beta}(\xi I) \leq H$.

Доказательство. Так как $X_\beta(I)$ нормализует H, то $x = [x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] \in H$ для любого $\eta \in I$. Далее в доказательстве величины c_i, $i = 1, 2, \ldots$, всегда обозначают подходящие структурные константы группы Шевалле или их произведения, причем условие **NVB′** гарантирует, что $c_i \in R^*$. В соответствии с коммутационной формулой Шевалле имеет место один из следующих вариантов:

(1) $x = x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta)$. Отсюда следует, что $X_{\alpha+\beta}(\xi I) \leq H$, так как η — любой элемент идеала I, а $c_1 \in R^*$.

(2) $x = x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta)x_{\alpha+2\beta}(c_2\xi\eta^2)$. Так как $X_\beta(I)$ нормализует H, то H содержит $[x_\beta(1), x] = x_{\alpha+2\beta}(c_3\xi\eta)$, откуда как в предыдущем случае заключаем, что $X_{\alpha+2\beta}(\xi I) \leq H$. Но тогда $x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta) = x \cdot \left(x_{\alpha+2\beta}(c_2\xi\eta^2)\right)^{-1} \in H$ для любого $\eta \in I$.

(3) $x = x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta)x_{2\alpha+\beta}(c_2\xi^2\eta)$. Тогда H содержит $[x_\alpha(\xi), x] = x_{2\alpha+\beta}(c_3\xi^2\eta)$, откуда следует, что $X_{2\alpha+\beta}(\xi^2 I) \leq H$, далее аналогично предыдущему случаю.

(4) $x = x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta)x_{\alpha+2\beta}(c_2\xi\eta^2)x_{2\alpha+\beta}(c_3\xi^2\eta)$. Тогда H содержит $[x_\beta(1), x] = x_{\alpha+2\beta}(c_4\xi\eta)$, следовательно, $X_{\alpha+2\beta}(\xi I) \leqslant H$, откуда вытекает, что $x \cdot \left(x_{\alpha+2\beta}(c_2\xi\eta^2)\right)^{-1} = x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta)x_{2\alpha+\beta}(c_3\xi^2\eta) \in H$, далее действуем, как в случае (3).

(5) $x = x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta)x_{2\alpha+\beta}(c_2\xi^2\eta)x_{3\alpha+\beta}(c_3\xi^3\eta)x_{3\alpha+2\beta}(c_4\xi^3\eta^2)$. Тогда H содержит $[x_\alpha(\xi), [x_\alpha(\xi), x]] = x_{3\alpha+\beta}(c_5\xi^3\eta)$ и $[x_\beta(1), x] = x_{3\alpha+2\beta}(c_6\xi^3\eta)$, откуда в силу произвольности $\eta \in I$ имеем $X_{3\alpha+\beta}(\xi^3 I)$, $X_{3\alpha+2\beta}(\xi^3 I) \leqslant H$. Поскольку H содержит $[x_\alpha(\xi), x] = x_{2\alpha+\beta}(c_7\xi^2\eta)x_{3\alpha+\beta}(\mu)x_{3\alpha+2\beta}(\nu)$, где $\mu, \nu \in \xi^3 I$, заключаем, что $X_{2\alpha+\beta}(\xi^2 I) \leqslant H$. Домножая x на соответству-

ющие элементы, получим, что $x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta) \in H$ для любого $\eta \in I$, то есть $X_{\alpha+\beta}(\xi I) \leqslant H$.

(6) $x = x_{\alpha+\beta}(c_1\xi\eta)x_{\alpha+2\beta}(c_2\xi\eta^2)x_{\alpha+3\beta}(c_3\xi\eta^3)x_{2\alpha+3\beta}(c_4\xi^2\eta^3)$. Тогда $y = [[x, x_\beta(1)], x_\beta(1)] = x_{\alpha+3\beta}(c_5\xi\eta) \in H$, откуда следует, что $X_{\alpha+3\beta}(\xi I) \leqslant H$. Кроме того, $[x_\alpha(\xi), y] = x_{2\alpha+3\beta}(c_6\xi^2\eta) \in H$, откуда получаем, что $X_{2\alpha+3\beta}(\xi^2 I) \leqslant H$. Далее рассматриваем $[x, x_\beta(1)]$ и действуем аналогично (5).

Заметим, что последние три варианта возникают только в случае $\Phi = G_2$.

Вернемся к предположению, что G — группа Шевалле типа Φ над полем K, удовлетворяющим **NVB**. Далее $U = U_r$ и $L' = L'_r$ — унипотентный радикал и коммутант подгруппы Леви максимальной параболической подгруппы $P_r \leq G$, соответствующей фундаментальному корню α_r.

Следствие 5.1. *Пусть $H \leq U$ — подгруппа, нормализуемая L', α — корень r-кратности $n \geq 1$, причем $\Sigma_r(n)$ содержит не менее двух элементов. Тогда если $x_\alpha(\xi) \in H$ для некоторого $\xi \neq 0$, то $X_\gamma \leq H$ для любого $\gamma \in \Sigma_r(n)$.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из существования корня $\widetilde{\alpha}_n$ и следствия 1.1.

Следствие 5.2. *Пусть $H \leq U$ — подгруппа, нормализуемая L', α — корень r-кратности $n \geq 1$, β — корень r-кратности $m \geq 1$, причем $m + n \leq m_r(\widetilde{\alpha})$. Тогда если $x_\alpha(\xi) \in H$ и $x_\beta(\eta) \in H$ для некоторых $\xi, \eta \neq 0$, то $X_\gamma \leq H$ для любого $\gamma \in \Sigma_r(n+m)$.*

Доказательство. По лемме 3 хотя бы одно из множеств $\Sigma_r(n)$, $\Sigma_r(m)$ содержит не менее двух элементов, пусть это $\Sigma_r(n)$. Тогда $X_{\widetilde{\alpha}_n} \leq H$ по следствию 5.1. По лемме 2 имеем $\delta = \widetilde{\alpha}_{n+m} - \widetilde{\alpha}_n \in \Sigma_r(m)$. Если $\Sigma_r(m)$ содержит один элемент, то $\delta = \beta$ и $x_\delta(\eta) \in H$, в противном случае $x_\delta(\eta) \in H$ по следствию 5.1. Так как $X_{\widetilde{\alpha}_n}$ нормализует H, из леммы 5 следует, что $X_{\widetilde{\alpha}_n+\delta} = X_{\widetilde{\alpha}_{n+m}} \leq H$. Если $\Sigma_r(n+m)$ содержит больше одного элемента, то, вторично применяя следствие 5.1, заключаем, что $X_\gamma \leq H$ для любого $\gamma \in \Sigma_r(n+m)$.

§3. Подгруппы вида U_S

Пусть G — группа Шевалле типа Φ над K, причем выполнено **NVB**. На протяжении данного параграфа $\alpha_r \in \Pi$ — фиксированный простой корень, $L' = L'_r$ и $U = U_r$ — коммутант подгруппы Леви и унипотентный радикал максимальной параболической подгруппы $P_r \leq G$ соответственно. Положим $n = m_r(\widetilde{\alpha})$ и $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Для данного замкнутого $S \subseteq \mathbf{N}$ элемент $m \in S$ называется *основным*, если множество $S \setminus \{m\}$ замкнуто в $\mathbf{N}$. Множество основных элементов $M(S)$, очевидно, порождает S по сложению.

Для любых множеств $S_1, S_2 \subseteq \mathbf{N}$ определим множества

$$S_1 + S_2 = \{k_1 + k_2 \mid k_1 \in S_1,\ k_2 \in S_2\} \quad \text{и} \quad S_1 \uplus S_2 = S_1 \cup (S_1 + S_2) \cup S_2.$$

Для любого замкнутого $S \subseteq \mathbf{N}$ множество корней $\Sigma_r(S) = \{\alpha \in \Sigma_r \mid m_r(\alpha) \in S\}$ является замкнутым подмножеством в Σ_r и задает следующую подгруппу группы U:

$$U_S = \langle x_\alpha(\xi),\, \alpha \in \Sigma_r(S),\, \xi \in K \rangle\, .$$

Как известно (например, [2]), любой элемент $x \in U$ можно единственным образом представить в виде

$$x = \prod_{\alpha \in \Sigma_r} x_\alpha(\xi_\alpha),$$

где умножение производится в любом фиксированном порядке. Для данного x рассмотрим $\{m_r(\alpha) \mid \xi_\alpha \neq 0\} \subseteq \mathbf{N}$. Это множество, вообще говоря, зависит от порядка положительных корней в произведении $x = \prod x_\alpha(\xi_\alpha)$, однако из коммутационной формулы Шевалле следует, что его замыкание в $\mathbf{N}$ при изменении порядка корней остается постоянным. Обозначим его $S(x)$. Заметим, что для любого замкнутого $S \subseteq \mathbf{N}$ имеет место равенство

$$U_S = \{x \in U \mid S(x) \subseteq S\}.$$

Основные элементы $S(x)$ называются также *основными кратностями* для x. Множество $M(S(x))$ будем для краткости обозначать просто $M(x)$. Очевидно, что если α — корень основной кратности, то коэффициент ξ_α не зависит от порядка корней (в [7] такие корни называются *существенными* для x).

Замечание. Все дальнейшие утверждения, использующие разложение $x = \prod x_\alpha(\xi_\alpha)$, в действительности касаются только множеств $S(x)$ и $M(x)$ или сомножителей x, соответствующих корням основных кратностей, и не зависят от порядка на Φ^+. Для удобства мы фиксируем некоторый линейный порядок на Φ^+, продолжающий следующий частичный порядок:

$$\alpha < \beta, \text{ если } m_r(\alpha) < m_r(\beta) \text{ или } m_r(\alpha) = m_r(\beta) \text{ и } h(\alpha) < h(\beta).$$

Следующие утверждения непосредственно вытекают из коммутационной формулы Шевалле.

Лемма 6. *Пусть $x \in U$ и $x_\beta(\xi) \in L'$. Тогда $S([x_\beta(\xi), x]) \subseteq S(x)$.*

Следствие 6.1. *Для любого замкнутого $S \subseteq \mathbf{N}$ подгруппа U_S нормализуется группой L'.*

Следствие 6.2. *Для любого замкнутого $S \subseteq \mathbf{N}$*

$$U_S = \langle x_\alpha(\xi),\ m_r(\alpha) \in M(S),\ \xi \in K \rangle^{L'}.$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из следствия 5.2 и того факта, что $M(S)$ порождает S по сложению.

Лемма 7. *Пусть $x, y \in U$. Тогда $S(xy) \subseteq S(x) \uplus S(y)$.*

Лемма 8. *Пусть $S_1, S_2 \subseteq \mathbf{N}$ — замкнутые множества. Тогда*

$$\langle U_{S_1}, U_{S_2} \rangle = U_{S_1 \uplus S_2}.$$

Доказательство. По лемме 7 $\langle U_{S_1}, U_{S_2} \rangle \leq U_{S_1 \uplus S_2}$. По следствию 6.1 L' нормализует U_{S_1} и U_{S_2}, поэтому L' нормализует $\langle U_{S_1}, U_{S_2} \rangle$, тогда по следствию 5.2 $\langle U_{S_1}, U_{S_2} \rangle \geq X_\alpha$ для любого $\alpha \in \Sigma_r(S_1 + S_2)$, откуда заключаем, что $\langle U_{S_1}, U_{S_2} \rangle \geq U_{S_1 \uplus S_2}$.

Пусть $S_1 \subset S$ – замкнутые подмножества в $\mathbf{N}$. В этом случае на фактор-группе U_S/U_{S_1} определена структура $K[L']$ – модуля: действие L' переносится с U_S; для любого $\lambda \in K$ полагаем $\lambda \cdot x_\alpha(\xi) = x_\alpha(\lambda\xi)$. Если $S_1 = S \setminus \{m\}$ для некоторого m – основного элемента в S, то $V_m = U_S/U_{S_1}$, очевидно, изоморфно прямому произведению всех X_α, $\alpha \in \Sigma_r(m)$ (фактически, V_m не зависит от S). Модули этого типа называются *внутренними модулями Шевалле* (internal Chevalley modules). В [4] было показано, что V_m является неприводимым $K[L']$-модулем. Нам потребуется чуть более точный результат.

Лемма 9. *Пусть S — замкнутое подмножество в $\mathbf{N}$, m — основной элемент в S, причем $\Sigma_r(m)$ содержит по крайней мере два элемента. Тогда $V_m = U_S/U_{S\setminus\{m\}}$ — неприводимый $\mathbb{Z}[L']$-модуль.*

Доказательство. Пусть W — нетривиальный подмодуль V_m. Докажем, что W содержит элемент $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)$ для некоторого $\xi \neq 0$. Тогда, применив следствие 5.1 к полному прообразу W в U_S, получим, что $W = V_m$.

Пусть x — элемент модуля W, отличный от единицы, $x = \prod x_\alpha(\xi_\alpha)$. Проведем индукцию по убыванию наименьшей из высот корней, входящих в это произведение с ненулевым коэффициентом. Пусть α — корень кратности m, такой, что $\xi_\alpha \neq 0$ и $h(\alpha) = h$ минимальная возможная. Если $\alpha = \widetilde{\alpha}_m$, то все доказано. В противном случае по следствию 1.1 существует положительный корень $\beta \in \Delta_r$ такой, что $\alpha + \beta \in \Phi$. Тогда W содержит элемент $x_1 = [x_\beta(1), x] = \prod x_\alpha(\eta_\alpha)$. Из коммутационной формулы Шевалле следует, что $\eta_{\alpha+\beta} \neq 0$, причем высота любого корня γ, такого, что $\eta_\gamma \neq 0$, не меньше $h + h(\beta) > h$, поэтому к x_1 применимо индукционное предположение.

§4. Нормализуемые подгруппы: случаи стандартного описания

Пусть G — группа Шевалле типа $\Phi \neq G_2$ над K, причем выполнено **NVB**. Пусть $\alpha_r \in \Pi$ не является единственным корнем, соединенным с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина для Φ. Мы покажем, что в этом случае имеет место стандартное описание подгрупп унипотентного радикала $U_r = U$, нормализуемых подгруппой Леви $L'_r = L'$. Как и прежде, положим $n = m_r(\widetilde{\alpha})$ и $\mathbf{N} = \{1, \ldots, n\}$.

Лемма 10. *Пусть $S \subseteq \mathbf{N}$ — замкнутое множество, m и k — основные элементы S. Тогда $V_{m,k} = U_S/U_{S\setminus\{m,k\}} \cong V_m \oplus V_k$ — вполне приводимый $\mathbb{Z}[L']$-модуль, единственными нетривиальными подмодулями которого являются V_m и V_k.*

Доказательство. Пусть W — нетривиальный подмодуль в $V_{m,k}$. Так как V_m является неприводимым подмодулем в V, то W содержит элемент $x = x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi) \cdot y$, где $\xi \neq 0$, $y \in V_k$.

Если $y = 1$, то так как модуль V_m неприводим, заключаем, что $V_m \leq W$. Если при этом $V_m \neq W$, то из того, что модуль V_k неприводим и $V_{m,k} = V_m \oplus V_k$, очевидно следует, что $W = V_{m,k}$.

Если $y \neq 1$, то $y = \prod x_\alpha(\eta_\alpha)$, где $\alpha \in \Sigma_r(k)$ и хотя бы одно $\eta_\alpha \neq 0$. Тогда если существует корень α кратности k, такой, что $\eta_\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \widetilde{\alpha}_k$, то рассмотрим элемент $x_1 = [x_\beta(1), x] \in W$, где $\beta \in \Delta_r$ и $\alpha + \beta \in \Phi$. Из коммутационной формулы Шевалле следует, что $x_1 \in V_k$, поэтому $V_k \leq W$ и как выше получаем, что $W = V_k$ или $W = V_{m,k}$. Если же такого корня α нет, то $x = x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi) x_{\widetilde{\alpha}_k}(\eta)$, где $\xi, \eta \neq 0$. По лемме 4 существует $\beta \in \Delta_r^-$ такой, что ровно один из векторов $\widetilde{\alpha}_m + \beta$ и $\widetilde{\alpha}_k + \beta$ является корнем. Рассмотрим $x_2 = [x_\beta(1), x]$, тогда x_2 принадлежит V_m или V_k (причем $x_2 \neq 1$), и, действуя как выше, получаем, что W равно V_m, V_k или $V_{m,k}$.

Теорема 1. *Пусть G — группа Шевалле типа $\Phi \neq G_2$ над K, причем выполнено* **NVB**. *Пусть $\alpha_r \in \Pi$, причем α_r не является единственным корнем, соединенным с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина. Пусть $x \in U_r$. Обозначим через $H(x)$ наименьшую подгруппу в U_r, нормализуемую подгруппой L'_r и содержащую x. Тогда $H(x) = U_{S(x)}$.*

Доказательство. По следствию 6.1 подгруппа L' нормализует $U_{S(x)}$, следовательно, $H(x) \leq U_{S(x)}$. Обратное включение мы докажем индукцией по величине множества $S(x)$. База: пусть $S(x)$ – минимальное возможное, то есть $S(x) = \{m\} = M(x)$, тогда по лемме 9 модуль $U_{S(x)} / U_{S(x)\setminus\{m\}} \cong U_{S(x)}$ не имеет нетривиальных $\mathbb{Z}[L']$-подмодулей, поэтому $H(x) = U_{S(x)}$. Далее, пусть $x \in U$ и для всех $y \in U$ таких, что $S(y) \subset S(x)$, выполнено $U_{S(y)} \leq H(y)$.

Предположим сначала, что x имеет хотя бы две различные основные кратности. Фиксируем $m, k \in M(x)$, $m \neq k$. Обозначим через W образ $H(x)$ в $U_{S(x)} / U_{S(x)\setminus\{m,k\}} \cong V_{m,k}$. Тогда W, очевидно, является $\mathbb{Z}[L']$-подмодулем $V_{m,k}$. Так как образ x при факторизации не равен 1 и не содержится в V_m или V_k, то по лемме 10 получаем, что $W = V_{m,k}$. Тогда, в частности, $H(x)$ содержит элемент x_1, для которого $S(x_1) \subseteq S(x)$, причем $m \in S(x_1)$, $k \notin S(x_1)$. К x_1 применимо индукционное предположение, следовательно, по крайней мере $H(x) \geq H(x_1) \geq X_\alpha$ для любого $\alpha \in \Sigma_r(m)$. Так как m — произвольный элемент $M(x)$, то по следствию 6.2 имеем $H(x) \geq U_{S(x)}$.

Теперь пусть $M(x) = \{m\}$. Тогда $S(x) = \{m, 2m, \ldots, km\}$, где km – наибольшее кратное m, не превосходящее n $(k \geq 2)$. Из леммы 9 вытекает, что $V_m \cong U_{S(x)} / U_{S(x)\setminus\{m\}}$ – неприводимый $\mathbb{Z}[L']$-модуль, поэтому $H(x) / H(x) \cap U_{S(x)\setminus\{m\}}$ совпадает с $U_{S(x)}/U_{S(x)\setminus\{m\}}$ и, в частности, $H(x)$ содержит элемент $y = x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)\cdot y_1$, где $\xi \neq 0$ и $S(y_1) \subseteq S(x)\setminus\{m\}$. Если $y_1 = 1$, то по следствиям 5.1 и 6.2 имеем $U_{S(x)} \leq H(x)$. Если $y_1 \neq 1$, то пусть наименьший элемент множества $S(y_1)$ равен dm. Докажем, что $H(x)$ содержит элемент вида $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)\cdot y_2$, где наименьший элемент множества $S(y_2)$ по крайней мере $(d+1)m$ (тогда после нескольких шагов мы получим $y_2 = 1$). Рассмотрим $\mathbb{Z}[L']$-модуль $U_{S(x)}/U_{\{(d+1)m,\dots,n\}} = V$. Обозначим через W подмодуль в V, являющийся проекцией $H(x)$. Достаточно доказать, что $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi) \in W$.

Образ элемента y в W имеет вид $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)\cdot y' = x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)\cdot\prod x_\alpha(\zeta_\alpha)$, где $\alpha \in \Sigma_r(dm)$ и хотя бы одно $\zeta_\alpha \neq 0$. Если существует корень α, такой, что $\zeta_\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \widetilde{\alpha}_{dm}$, то по следствию 1.1 найдется корень $\beta \in \Delta_r$ такой, что $\alpha+\beta \in \Phi$. Тогда W содержит элемент $x_1 = [x_\beta(1), x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)\cdot y']$, причем из коммутационной формулы Шевалле следует, что $x_1 \in V_{dm}$. Так как по лемме 9 модуль V_{dm} неприводим, имеем $W \geq V_{dm}$, откуда W содержит $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)$. Если же такого корня α нет, то W содержит $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)x_{\widetilde{\alpha}_{dm}}(\zeta)$, где $\xi,\zeta \neq 0$. По лемме 4 существует $\beta \in \Delta_r^-$ такой, что ровно один из векторов $\widetilde{\alpha}_m+\beta$ и $\widetilde{\alpha}_{dm}+\beta$ является корнем. Если корнем является $\widetilde{\alpha}_{dm}+\beta$, то $[x_\beta(1), x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)x_{\widetilde{\alpha}_{dm}}(\zeta)] \in V_{dm}$, и как выше заключаем, что $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi) \in W$. В противном случае для любого $\eta \neq 0$ выполнено $[x_\beta(\eta), x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)x_{\widetilde{\alpha}_{dm}}(\zeta)] = [x_\beta(\eta), x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)] \in W$. Повторяя доказательство леммы 5 (с заменой во всех случаях коммутирования с $x_\alpha(\xi) = x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)$ на коммутирование с $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi)x_{\widetilde{\alpha}_{dm}}(\zeta)$), получаем, что $z = x_{\widetilde{\alpha}_m+\beta}(\theta) \in W$ для любого $\theta \neq 0$. Тогда $[x_{-\beta}(1), z] = x_{\widetilde{\alpha}_m}(\pm\theta) \in W$ и, в частности, $x_{\widetilde{\alpha}_m}(\xi) \in W$.

Теорема 2. *Пусть G – группа Шевалле типа $\Phi \neq G_2$ над K, причем выполнено* **NVB**. *Пусть $\alpha_r \in \Pi$, причем α_r не является единственным корнем, соединенным с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина. Тогда все подгруппы в U_r, нормализуемые L'_r, имеют вид U_S, где S – замкнутое подмножество в $\mathbf{N} = \{1,2,\dots,m_r(\widetilde{\alpha})\}$.*

Доказательство. Пусть L'_r нормализует подгруппу $H \leq U_r$. Положим $S = \biguplus_{x\in H} S(x)$. Тогда $U_S \geq U_{S(x)}$ для любого $x \in H$, откуда следует, что $U_S \geq H$. Заметим, что так как $\mathbf{N}$ – конечное множество, то $S = \biguplus_{i=1}^{m} S(x_i)$ для некоторых $x_1,\dots,x_m \in H$, следовательно, по лемме 8 имеем $U_S = \left\langle U_{S(x_1)},\dots,U_{S(x_m)}\right\rangle$. Но из теоремы 1 следует, что $U_{S(x)} \leq H$ для любого $x \in H$, значит, $U_S \leq H$.

§5. Нормализуемые подгруппы: нестандартное описание

В настоящем параграфе мы завершаем доказательство сформулированной во введении теоремы.

1. Случай, когда α_r – единственный корень, соединенный с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина.

Пусть G — группа Шевалле типа $\Phi \neq A_l$ над K, причем выполнено **NVB**. Пусть $\alpha_r \in \Pi$ — корень, соединенный с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина. Как было показано в лемме 3, за исключением $\Phi = G_2$, $\alpha_r = \alpha_1$, только в этом случае существует такая r-кратность m, что $\Sigma_r(m)$ состоит из одного элемента (и, в частности, не имеет места утверждение следствия 5.1), а именно, $m = m_r(\widetilde{\alpha})$ и $\Sigma_r(m) = \{\widetilde{\alpha}\}$. Известно (например, [1]), что для таких α_r всегда $m_r(\widetilde{\alpha}) = 2$ и $\mathbf{N} = \{1, \ldots, m_r(\widetilde{\alpha})\} = \{1, 2\}$.

Заметим, что если A – любая аддитивная подгруппа поля K, то $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ — центральная подгруппа в U_r, на которой группа L'_r действует тривиально.

Теорема 3. *Пусть G – группа Шевалле типа Φ над K, причем выполнено* **NVB**. *Пусть $\alpha_r \in \Pi$ — единственный корень, соединенный с $-\widetilde{\alpha}$ в расширенной диаграмме Дынкина. Тогда все собственные подгруппы в U_r, нормализуемые L'_r, имеют вид $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$, где A – аддитивная подгруппа поля K.*

Доказательство. Пусть $H \leq U_r$ – подгруппа, нормализуемая L'_r. Если любой элемент $x \in H$ имеет вид $x = x_{\widetilde{\alpha}}(\xi)$, $\xi \in K$, то есть $S(x) = \{2\}$, то, очевидно, группа H имеет вид $X_{\widetilde{\alpha}}(A)$ для некоторой $A \leq K^+$. Докажем, что если существует элемент $x \in H$ такой, что $S(x) = \{1, 2\}$, то $H = U_r$.

По лемме 9 $V_1 = U_{\{1,2\}}/U_{\{2\}}$ – неприводимый $\mathbb{Z}[L']$-модуль, следовательно, $H/H \cap U_{\{2\}} = V_1$, откуда H содержит элемент вида $x = x_{\widetilde{\alpha}_1}(\xi)x_{\widetilde{\alpha}}(\zeta)$. По лемме 4 существует такой корень $\beta \in \Delta_r$, что $\widetilde{\alpha}_1 + \beta \in \Phi$ и $\widetilde{\alpha} + \beta \notin \Phi$ (так как $\Sigma_r(2) = \{\widetilde{\alpha}\}$). Поскольку H содержит $[x_\beta(\eta), x] = [x_\beta(\eta), x_{\widetilde{\alpha}_1}(\xi)]$ для любого $\eta \in K$, повторяя доказательство леммы 5 (с заменой во всех случаях коммутирования с $x_\alpha(\xi) = x_{\widetilde{\alpha}_1}(\xi)$ на коммутирование с $x_{\widetilde{\alpha}_1}(\xi)x_{\widetilde{\alpha}}(\zeta)$), получаем, что $X_{\widetilde{\alpha}_1+\beta} \leq H$. Тогда по следствию 5.1 получаем $X_\gamma \leq H$ для любого $\gamma \in \Sigma_r(1)$ и по следствию 6.2 имеем $H \geq U_{\{1,2\}} = U_r$.

2. Случай $\Phi = G_2$, $r = 1$. Часть сформулированных выше результатов верна и для групп типа G_2. Случай U_2 описан в теореме 3. К сожалению, для подгруппы U_1 неверна лемма 4, являющаяся одним из ключевых для доказательства основной теоремы фактов, что делает затруднительным обобщение теоремы на этот случай. Но, поскольку исключительный случай невелик, мы разберем его явно.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из следствий 5.1 и 5.2.

Лемма 11. *Пусть $H \leq U$ – подгруппа, нормализуемая L', α – корень 1-кратности $n \geq 1$, $x_\alpha(\xi_0) \in H$. Тогда*

(1) *если $n = 1$, то $H = U$;*

(2) *если $n = 2$ (т.е. $\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2$), то $X_\alpha(A) \leqslant H$, где A — аддитивная подгруппа K, порожденная ξ_0;*

(3) *если $n = 3$, то $U_{\{3\}} \leqslant H$.*

Вообще говоря, равенство коэффициентов ξ_α нулю зависит от порядка корней. Однако в §3 мы наложили некоторые ограничения на используемый порядок.

Лемма 12. *Пусть $x = \prod x_\alpha(\xi_\alpha) \in H$, $\xi_\alpha \in K^*$, где $H \leqslant U$, нормализуемая L'. Тогда для любого α верно $x_\alpha(\xi_\alpha) \in H$.*

Доказательство. Согласно лемме 11, достаточно доказать, что для любого $1 \leqslant i \leqslant 3$ существует корень $\alpha \in \Sigma(i)$, для которого $x_\alpha(\xi_\alpha) \in H$. Далее в доказательстве c_j обозначают подходящие структурные константы, которые не обнуляются в силу **NVB**. Рассмотрим все имеющиеся варианты.

Пусть в разложении x присутствует корень кратности 1.

Если $x = x_{\alpha_1}(\xi)x'$, то $[[x, x_{\alpha_2}(\eta)], x_{\alpha_2}(1)] = x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(c_1\xi^3\eta) \in H$, т.е., согласно лемме 11, домножив $[x, x_{\alpha_2}(\eta)]$ на соответствующие элементы $U_{\{3\}}$, получим $x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_2\xi\eta)x_{2\alpha_1+\alpha_2}(c_3\xi^2\eta) \in H$.

Далее, $[x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_2\xi\eta)x_{2\alpha_1+\alpha_2}(c_3\xi^2\eta), x] = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(c_4\xi^2\eta)x'$, где $x' \in U_{\{3\}}$. В силу произвольности аргумента $X_{2\alpha_1+\alpha_2} \leqslant H$, откуда легко получить, что $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_1+\alpha_2} \leqslant H$.

Если же в разложении x нет множителя вида $x_{\alpha_1}(\xi)$, но есть множитель $x_{\alpha_1+\alpha_2}(\xi)$, то $[x, x_{-\alpha_2}(1)] = x_{\alpha_1}(c_1\xi)x'' \in H$, где $c_1\xi \neq 0$ и снова попадаем в предыдущий случай.

Пусть теперь в разложении x отсутствуют элементы, соответствующие $\alpha \in \Sigma(1)$. Здесь также возможно несколько вариантов.

- $x = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(\xi)x_{3\alpha_1+\alpha_2}(\eta)x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(\zeta)$. Тогда $[x, x_{\alpha_2}(1)] = x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(c_1\xi) \in H$, т.е., согласно лемме 11, $X_{3\alpha_1+\alpha_2}$, $X_{3\alpha_1+2\alpha_2} \leqslant H$. Домножив на соответствующие элементы $U_{\{3\}}$, заключаем, что $X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A) \leqslant H$, где A — аддитивная подгруппа K, порожденная ξ.

- $x = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(\xi)x_{3\alpha_1+\alpha_2}(\eta)$. Этот случай полностью аналогичен предыдущему.

- $x = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(\xi)x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(\eta)$. Тогда $[x, x_{-\alpha_2}(1)] = x_{3\alpha_1+\alpha_2}(c_1\eta)$, после чего рассуждаем как в первых двух случаях.

- $x = x_{3\alpha_1+\alpha_2}(\eta)x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(\zeta)$. Рассмотрев $[x, x_{\alpha_2}(1)] = x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(c_1\eta)$, замечаем, как и выше, что $X_{3\alpha_1+\alpha_2}$, $X_{3\alpha_1+2\alpha_2} \leqslant H$.

Теорема 4. *Пусть G – группа Шевалле типа G_2 над K, $r = 1$,* **NVB**, *H – подгруппа U_1, нормализуемая L_1. Тогда для H имеет место следующая альтернатива:*

либо $H = U_S = \langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Sigma^1(S),\ \xi \in K \rangle$, где $S = \{1, 2, 3\}$ или $S = \{3\}$,

либо $H = U_{S,A} = X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A) \cdot U_{\{3\}}$, где A – произвольная ненулевая аддитивная подгруппа поля K.

Доказательство. Пусть $H \leqslant U_1$ – подгруппа, нормализуемая L'. Если существует $x \in H$ такой, что $1 \in S(x)$, то, согласно лемме 12, получим $H = U_1$. Если для любого $x \in H$ выполнено $S(x) \subseteq \{2, 3\}$, и существует $x \in H$ такой, что $S(x) = \{2, 3\}$, то из леммы 12 заключаем $H = X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A) \cdot U_{\{3\}}$, где $A \leqslant K^+$ – подгруппа, порожденная всеми аргументами ξ элементов вида $x_{2\alpha_1+\alpha_2}(\xi)$. Наконец, если для любого $x \in H$ верно $S(x) = \{2\}$ или $S(x) = \{3\}$, то, вновь используя лемму 12, видим, что $H = X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A)$, где $A \leqslant K^+$ – подгруппа, порожденная всеми аргументами ξ элементов вида $x_{2\alpha_1+\alpha_2}(\xi)$ или $H = U_{\{3\}}$ соответственно.

Итак, диаграмма подгрупп унипотентного радикала, нормализуемых L', имеет вид (для сравнения приводим диаграммы для U_1 и U_2):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & U_1 \arrow[d] & \\ & U_{\{3\}} \cdot X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{2\alpha_1+\alpha_2}(A) \arrow[dr] & & U_{\{3\}} \arrow[dl] \\ & \{e\} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U_2 \arrow[d] \\ X_{\widetilde{\alpha}}(A) \arrow[d] \\ \{e\} \end{tikzcd}$$

Здесь A произвольная собственная аддитивная подгруппа K. Отметим, что при $K = \mathbb{F}_p$, $p \neq 2, 3$, подгруппы унипотентного радикала, нормализуемые L', имеют стандартное описание.

Авторы выражают благодарность Н. А. Вавилову за идею настоящего исследования и помощь в работе над рукописью статьи.

Литература

1. Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. Мир, Москва (1972).
2. Р. Стейнберг, Лекции о группах Шевалле. Мир, Москва (1975).
3. E. Abe, *Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. **21**, No. 3 (1969), 474–494.
4. H. Azad, M. Barry, G. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups.* — Comm. in Algebra **18**, No. 2 (1990), 551–562.
5. R. Richardson, G. Röhrle, R. Steinberg, *Parabolic subgroups with abelian unipotent radical.* — Invent. Math. **110** (1992), 649–671.
6. G. E. Röhrle, *On the structure of parabolic subgroups in algebraic groups.* — J. Algebra **157**, No. 1 (1993), 80–115.
7. N. Vavilov, *Unipotent elements in subgroups which contain a split maximal torus.* — J. Algebra **176** (1995), 356–367.

Kazakevich V. G., Stavrova A. K. Subroups normalized by the commutator subgroup of the Levi subgroup.

We describe subgroups of the unipotent radical of a maximal parabolic subgroup of a Chevalley group over a field normalized by the commutator subgroup of the Levi subgroup over a field K. It is shown that in the typical case such subgroups are in one-to-one correspondence with the closed subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$ for a natural n. In the exceptional cases the classification also involves additive subgroups of K. See the table in the paper for a detailed list of the possibilities.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 сентября 2004 г.