Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

М. Ю. Митрофанов

РОЛЬ МАТРОИДОВ В ОПИСАНИИ МЕЛКИХ КЛЕТОК БРЮА

1. Введение

Одним из наиболее существенных фактов классической структурной теории алгебраических групп является разложение Брюа, открытое Гельфандом, Наймарком и Хариш–Чандрой и доказанное в общем случае Шевалле и Титсом (см., например, [2, 10]). В последние годы появилось значительное количество работ, посвящённых, в той или иной мере, изучению связи между различными разложениями вида $G = B_1WB_2$ в одной группе G, где B_1 и B_2 – борелевские подгруппы G, содержащие некоторый фиксированный максимальный тор T. Рассмотрение разложений такого вида, с меняющимися B_1 и B_2, оказывается полезным в разных областях математики, включая теорию представлений, геометрию, комбинаторику, а также, разумеется, саму структурную теорию.

Первые исследования в этой области были предприняты Люстигом и Деодхаром (см. [7, 11]), которые изучали пересечения клеток Брюа вида $B^-w_1B \cap Bw_2B$, где B^- – борелевская подгруппа, противоположная B. В частности, в работе [7] был получен следующий результат: пересечение указанного вида непусто в том и только в том случае, когда $w_2 \leqslant w_1$ в порядке Брюа. Тем самым, уже в этом весьма частном случае была установлена важность порядка Брюа в данной области.

В дальнейшем Ч. Кертис (см. [6]) обобщил этот результат, получив точный критерий непустоты пересечения клеток вида $B'w_1B \cap Bw_2B$. Этот критерий, фактически, оказался эквивалентным некоторому частному случаю условий (3), приведенных ниже в этой статье. В связи с этим М. Путча, Н. А. Вавилов и автор независимо сформулировали гипотезу, согласно которой условия (3) являются как необходимыми, так и достаточными

Работа поддержана грантом INTAS 03-55-1982.

для того, чтобы пересечение клеток вида $B'w_{B'}B$, где B' пробегает все борелевские подгруппы, содержащие фиксированный максимальный тор, было непусто (см. [13]). Как будет видно из дальнейшего, эти условия на самом деле **не** являются достаточными.

Следует также упомянуть работу С. Фомина и А. Зелевинского [8], изучавших пересечения вида $B^-w_1B^- \cap Bw_2B$. В частности, в этой работе было показано, что такое пересечение всегда непусто.

Вопрос о непустоте пересечения двух клеток Брюа был полностью рассмотрен в работе Н. А. Вавилова и автора ([15]), получивших комбинаторный критерий, являющийся частным случаем приведенных ниже условий (4). Этот результат побудил авторов высказать гипотезу, аналогичную вышеприведённой, о достаточности условий (4) в общем случае. Однако, как мы увидим в конце статьи, природа устроена, в данном случае, несколько сложнее наших представлений о ней. По-видимому, получить комбинаторный критерий непустоты подобных пересечений хотя бы над каким-нибудь бесконечным полем невозможно.

Далее, статья устроена следующим образом. В разделе 2 вводятся основные сведения об одном из наиболее интересных и красивых объектов современной комбинаторики – матроидах. Раздел 3 посвящён описанию разложения Брюа в группе $\mathrm{GL}_n(k)$ с позиций линейной алгебры, без упоминания понятий алгебраической геометрии. В разделе 4 изложены основные результаты работ А. В. Боровика и И. М. Гельфанда, проясняющие связь между матроидами и разложением Брюа. Наконец, в разделе 5 изложены результаты, полученные автором. В частности, введено понятие биматроида, обобщающее введённое Боровиком и Гельфандом понятие флагового матроида и играющее для двусторонних пересечений клеток Брюа ту же роль, которую играют флаговые матроиды в описании односторонних пересечений.

2. Матроиды

В этом разделе мы напомним некоторые хорошо известные понятия теории матроидов.

Определение 1. Матроидом *на конечном множестве X называется семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств X (называемых базисами матро-*

ида), для которого выполняется следующее условие (условие замены):

> *Для любых базисов A, B и элемента $\alpha \in A \setminus B$ существует элемент $\beta \in B \setminus A$, такой, что $(A \setminus \alpha) \cup \beta$ также является базисом.*

Здесь и далее везде вместо $\{\alpha\}$ пишется α.

Существует также понятие *матроида на бесконечном множестве*, однако мы не будем рассматривать его здесь.

Для простоты, множество X вместе с матроидом на нём будет в дальнейшем обозначаться той же буквой X. Множество базисов матроида будет обозначаться символом $\mathfrak{B}(X)$.

Если рассматриваются различные матроиды на одном множестве X, они будут обозначаться буквой X с какими-либо индексами, например: X_1, X^+ и т.п.

Необходимые в дальнейшем определения **независимого множества**, **замкнутого множества**, **системы образующих** и т.п. можно найти в монографиях [1, 12].

Читатель, не знакомый с теорией матроидов, может пользоваться аналогией с одним из основных примеров матроидов: именно, множество базисов векторного пространства V над некоторым полем k удовлетворяет условию замены из определения 1. При этом замкнутые множества матроида являются подпространствами V, независимые множества – линейно независимыми множествами и т.п.

Определение 2. Представлением *матроида X над полем k называется отображение $q : X \to V$, где V – векторное пространство над k, такое, что множество A является базисом в X тогда и только тогда, когда сужение $q|_A$ инъективно и $q(A)$ – базис V.*

Иначе говоря, *мультимножество* $q(A)$ должно быть базисом пространства V, если A – базис X. Также для обозначения представления матроида применяется термин “геометрическая реализация”.

Далеко не каждый матроид имеет хотя бы одно представление над каким-нибудь полем. В сущности, известны лишь немногие – и весьма слабые – критерии представимости матроидов. Более подробно см. [14], а также [1].

Определение 3. *Если X_1 и X_2 – два матроида на множестве X, то говорят, что матроид X_2 является* **геометрическим фактором**[1] *матроида X_1, если любое множество, замкнутое в X_2, является замкнутым в X_1.*

Термин "геометрический фактор" представляется наиболее естественным в данном контексте: именно, если q – представление матроида X в пространстве V, а V' – некоторое подпространство V, то композиция $X \xrightarrow{q} V \to V/V'$ является представлением некоторого геометрического фактора матроида X.

Следующие свойства геометрических факторов широко известны, см., например, [16, Глава 8].

Предложение 1. *Если X_2 – геометрический фактор X_1, то*

1. *Множества, независимые в X_2, независимы в X_1;*
2. *Системы образующих X_1 являются системами образующих X_2;*
3. *Замыкание любого множества в X_1 содержится в замыкании того же множества в X_2;*
4. *Ранг X_2 строго меньше ранга X_1, исключая случай, когда матроиды X_1 и X_2 равны.*

3. Разложение Брюа

Этот раздел является кратким введением в разложение Брюа в группе $\mathrm{GL}_n(k)$. Более подробное изложение с полными доказательствами см. [5, Глава 4].

Предложение 2. *Любая матрица $g \in \mathrm{GL}_n(k)$, где k – произвольное поле, может быть представлена в виде $g = b_1 w b_2$, где b_1, b_2 – элементы группы B верхнетреугольных матриц, а w – матрица перестановки. При этом матрица w однозначно определена матрицей g.*

Такое представление матрицы называется её *разложением Брюа*. Иначе предложение 2 может быть изложено в виде равенства

$$\mathrm{GL}_n(k) = \coprod_{w \in W} BwB, \qquad (1)$$

[1]Автору не удалось обнаружить в русскоязычной литературе пример употребления этого понятия; поэтому, перевод английского термина 'quotient' выбран до некоторой степени произвольно.

где W – группа матриц перестановок. В дальнейшем, группа W будет отождествляться с группой S_n посредством изоморфизма, сопоставляющего перестановке $\pi \in S_n$ матрицу $w = (w_{ij})$, где $w_{ij} = \delta_{i,\pi(j)}$. Множество BwB называется *(стандартной) клеткой Брюа* в $\mathrm{GL}_n(k)$.

Для того, чтобы определить клетку Брюа, в которую попадает выбранная матрица $g = (g_{ij})$, можно воспользоваться следующей индуктивной формулой: пусть $g \in BwB$; тогда

$$w(i) = \max\{j \mid \Delta_{w([1,i-1])\cup j,[1,i]}(g) \neq 0\} \tag{2}$$

при всех i. Здесь через $\Delta_{I,J}(g)$ обозначен минор матрицы g, номера строк которого составляют множество I, а столбцов – множество J; через $[i,j]$ обозначается множество $\{i, i{+}1, \dots, j{-}1, j\} \subseteq \mathbb{N}$.

Определение 4. *Пусть $A, B \subseteq [1,n]$ – два равномощных множества. Занумеруем их элементы по порядку: $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_l\}$, $B = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_l\}$. Положим $A \leqslant B$, если $a_i \leqslant b_i$ при всех $i = 1, 2, \dots, l$. Эквивалентно, $A \leqslant B$, если $\#(B \cap [1,j]) \leqslant \#(A \cap [1,j])$ при всех $j = 1, \dots, n$.*

Пусть $w_1, w_2 \in W$. Говорят, что $w_1 \leqslant w_2$ в **порядке Брюа**, *если $w_1([1,i]) \leqslant w_2([1,i])$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.*

Замечание 1. Понятие порядка Брюа является одним из наиболее фундаментальных в изучении разложения Брюа. В частности, несложно показать, что если $g \in BwB$ и $\Delta_{I,[1,i]}(g) \neq 0$, то $I \leqslant w([1,i])$.

В разделе 4 важную роль будет играть следующий объект.

Определение 5. Мелкой клеткой Шуберта, *определённой функцией $f : W \to W$, называется множество*

$$C_f = \{g \in \mathrm{GL}_n(k) \mid g \in {}^{w}B\, f(w) B \quad \text{при всех} \quad w \in W\},$$

где ${}^{w}B = wBw^{-1}$.

Если множество C_f непусто, то, в силу единственности разложения Брюа в предложении 2, функция f однозначно восстанавливается по любому элементу $g \in C_f$. Действительно, для определения $f(w)$ достаточно определить клетку Брюа $Bw'B$, содержащую элемент $w^{-1}g$; тогда $f(w) = ww'$. Очевидно, множества C_f образуют разбиение группы $\mathrm{GL}_n(k)$ аналогично (1). Раздел 4 посвящён, в основном, поиску условий, эквивалентных непустоте C_f.

Одно из таких условий, необходимое, однако не достаточное, легко вывести из замечания 1:

Предложение 3. *Если мелкая клетка Шуберта C_f непуста, то функция f удовлетворяет неравенству*

$$w^{-1}f(w') \leqslant w^{-1}f(w) \tag{3}$$

при всех $w, w' \in W$.

Доказательство. Действительно, поскольку $w'^{-1}g \in Bw'^{-1}f(w')B$,

$$\Delta_{w'^{-1}f(w')([1,i]),[1,i]}(w'^{-1}g) \neq 0.$$

Так как строки матрицы $w'^{-1}g$ с номерами из множества $w'^{-1}(I)$ – это в точности то же, что и строки матрицы g с номерами из множества I, и, следовательно, то же, что и строки $w^{-1}g$ с номерами из множества $w^{-1}(I)$, то

$$\Delta_{w^{-1}f(w')([1,i]),[1,i]}(w^{-1}g) \neq 0.$$

Отсюда, согласно замечанию 1, $w^{-1}f(w')([1,i]) \leqslant w^{-1}f(w)([1,i])$. По определению порядка Брюа, $w^{-1}f(w') \leqslant w^{-1}f(w)$. □

Отображение $f : W \to W$, удовлетворяющее неравенству (3), называется *матроидным отображением*, или *формальной мелкой клеткой Шуберта.* Если множество $C_f \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ непусто, то говорят, что мелкая клетка f реализуется над полем k.

В разделе 5 аналогичную – и даже более важную – роль будет играть следующее понятие “мелкой клетки Брюа”, или, для краткости, просто “мелкой клетки”, восстанавливающее некоторую асимметрию определения 5.

Определение 6. Мелкой клеткой Брюа, *определённой посредством функции $f : W \times W \to W$, называется множество*

$$D_f = \{g \in \mathrm{GL}_n(k) \mid g \in {}^{w_1}B\, f(w_1, w_2) B^{w_2} \ \ \textit{при всех} \ \ w_1, w_2 \in W\}.$$

Как и раньше, множества D_f образуют разбиение группы $\mathrm{GL}_n(k)$, и функция f однозначно определяется любым элементом множества D_f, при условии, что последнее непусто.

Аналогично предложению 3 можно доказать

Предложение 4. *Если мелкая клетка D_f непуста, то функция f удовлетворяет неравенствам*

$$\begin{aligned} w_1^{-1}f(w', w_2)w_2^{-1} &\leqslant w_1^{-1}f(w_1, w_2)w_2^{-1} \\ w_1^{-1}f(w_1, w')w_2^{-1} &\leqslant w_1^{-1}f(w_1, w_2)w_2^{-1} \end{aligned} \tag{4}$$

при всех $w_1, w_2, w' \in W$.

Отображение $f : W \times W \to W$, удовлетворяющее этим неравенствам, называется *формальной мелкой клеткой (Брюа)*. Если множество $D_f \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ непусто, то говорят, что мелкая клетка f реализуется над полем k.

4. Флаговые матроиды

Основное назначение этого раздела – краткий пересказ основных результатов работ [3, 4]. Они будут использоваться в разделе 5.

Определение 7. *Говорят, что последовательность $\mathfrak{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ матроидов на множестве X является* **флаговым матроидом**, *если выполнены следующие условия:*

1. $\mathrm{rk}\, X_l = l$;
2. *X_i является геометрическим фактором X_j при $i < j$.*

Определение 8. *Пусть $\mathfrak{X}$ – флаговый матроид на множестве X, $\#X = n$, а V – векторное пространство размерности n над полем k, наделённое полным флагом подпространств $0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_n = V$.* **Представлением** *флагового матроида $\mathfrak{X}$ в пространстве V называется отображение $q : X \to V$, такое, что отображение $q_i : X \xrightarrow{q} V \to V/V_i$ является представлением матроида X_{n-i} при любом i.*

Замечание 2. Отметим, что $\dim V/V_i = n - i = \mathrm{rk}\, X_{n-i}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ – флаговый матроид на множестве $X = [1, n]$. Тогда существует единственная формальная мелкая клетка Шуберта f, такая, что каковы бы ни были элементы $w \in W$ и $l \in [0, n]$, $f(w)([1, l])$ представляет собой базис I матроида X_l, такой, что, множество $w^{-1}(I)$ максимально в порядке определения 4. Обратно, любая формальная мелкая клетка Шуберта может быть получена таким образом из некоторого флагового матроида.*

Набросок доказательства. Функция f приведённым условием определена однозначно. Проверка того, что это определение корректно, то есть действительно задаёт некоторую функцию $W \to W$, а также, что эта функция представляет собой формальную мелкую клетку Шуберта, является чисто технической. Наоборот, если дана некоторая функция f, удовлетворяющая условию 3, то в качестве базисов матроида X_l можно взять образы множества $[1, l]$ под действием всех перестановок $f(w)$, где w пробегает группу W. □

Замечание 3. Можно также построить матроид X_l иным образом; именно, множество A является базисом X_l, если существует такой элемент $w \in W$, что

1. $f(w) = ww_0$, где w_0 – наибольший элемент W, то есть перестановка, для которой $w_0(i) = n - i + 1$;
2. $w([n - l + 1, n]) = A$.

В самом деле, если $f(w) = A$, то, полагая $w' = f(w)w_0$, получаем $w_0 = w'^{-1}f(w) \leqslant w'^{-1}f(w')$, откуда

$$f(w) = f(w') = w'w_0$$

и

$$w'([n - l + 1, n]) = w'w_0([1, l]) = f(w)([1, l]) = A.$$

Теорема 2. *Допустим, что флаговый матроид $\mathfrak{X}$ на множестве $X = [1, n]$ и формальная мелкая клетка Шуберта f соответствуют друг другу как в теореме 1. Пусть $q : X \to V$ – некоторое представление флагового матроида $\mathfrak{X}$ в пространстве V над полем k, наделённом некоторым полным флагом. Выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в пространстве V таким образом, что $e_i \in V_{n-i+1} \setminus V_{n-i}$. Тогда матрица $Q = \|q_{ij}\|$, такая, что*

$$q(i) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} e_j,$$

принадлежит мелкой клетке Шуберта C_f. Обратно, любая матрица $Q \in C_f$ является матрицей некоторого представления флагового матроида $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Действительно, пусть $w^{-1}Q \in BuB$, где $u \in W$. Пусть, кроме того, $Q \in C_{f'}$, где f' – мелкая клетка Шуберта, реализующаяся над k. Тогда, согласно замечанию 1, $u([1,l])$ – максимальное (в порядке из определения 4) множество I, для которого $\Delta_{I,[1,l]}(w^{-1}Q) \neq 0$. Но последнее неравенство в точности означает, что образы элементов $q(i)$, где $i \in w(I)$, в факторпространстве V/V_{n-l} образуют базис этого пространства. Поскольку q – представление флагового матроида, то, таким образом, $u([1,l])$ – максимальное множество, такое, что $w(I)$ – базис матроида X_l. Отсюда $f'(w)([1,l]) = wu([1,l])$ – такой базис J матроида X_l, для которого $w^{-1}(J)$ максимально. Но последнее множество – не что иное, как $f(w)([1,l])$. Таким образом, $f = f'$ и $Q \in C_f$. □

5. Мелкие клетки Брюа

В этом разделе будут изложены основные результаты, полученные автором.

Определение 9. *Говорят, что на множестве X введена структура* **биматроида**, *если каждому подмножеству $A \subseteq X$ сопоставлены два матроида на X (обозначаемые соответственно X_A^+ и X_A^-), так, что выполняются следующие условия:*

1. *Если $A \subseteq B \subseteq X$, то X_B^+ (соотв. X_B^-) является геометрическим фактором X_A^+ (соотв. X_A^-).*
2. *Для любых $A, B \subseteq X$ $A \in \mathfrak{B}(X_B^+)$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathfrak{B}(X_A^-)$.*

Всюду в дальнейшем через X обозначено множество $[1,n]$ с некоторой структурой биматроида на нём.

Лемма 1. *Если $A \subset B \subseteq X$, то матроиды X_A^+ и X_B^+ (соответственно, X_A^- и X_B^-) различны.*

Доказательство. Действительно, пусть C – некоторый базис X_A^+. Тогда A – базис X_C^-. Поскольку различные базисы не могут вкладываться друг в друга, то B – не базис X_C^-. Значит, C – не базис X_B^+, но базис X_A^+, откуда следует, что эти матроиды различны. □

Лемма 2. 1. $\operatorname{rk} X_A^+ = \operatorname{rk} X_A^- = n - \#A$;

2. *Множество A независимо в X_B^+ тогда и только тогда, когда B независимо в X_A^-.*

3. *Множество A является системой образующих в X_B^+ тогда и только тогда, когда B является системой образующих в X_A^-.*

Доказательство.

1. Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, а $X \setminus A = \{x_{l+1}, \ldots, x_n\}$. Рассмотрим последовательность матроидов $(X_i = X^+_{x_1, x_2, \ldots, x_i})_{i=0}^n$. В частности, $X_l = X_A^+$. Тогда, по предыдущей лемме, все эти матроиды различны. Кроме того, X_i является геометрическим фактором X_j при $i > j$. Поэтому, последовательность $\operatorname{rk} X_0, \operatorname{rk} X_1, \ldots, \operatorname{rk} X_n$ – строго убывающая (см. предложение 1). Но, с другой стороны, все члены этой последовательности лежат в множестве $[0, n]$, откуда $\operatorname{rk} X_i = n - i$. В частности, $\operatorname{rk} X_A^+ = \operatorname{rk} X_l = n - l = n - \#A$.

2. Если A независимо в X_B^+, то существует базис C в X_B^+, содержащий A. Тогда B является базисом, и, в частности, независимым множеством в X_C^-. Поскольку X_C^- является геометрическим фактором X_A^-, множество B независимо в X_A^-. Таким же образом доказывается обратная импликация.

3. Доказательство аналогично 2. □

Следствие 1. *Если w – какая-либо перестановка множества $X = [1, n]$ и $X_i = X^+_{w([i+1,n])}$, то последовательность $\mathfrak{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ является флаговым матроидом.*

Этот флаговый матроид мы будем обозначать через $\mathfrak{X}_w$.

Следствие 2. *X является базисом в $X_\varnothing^+$ и $X_\varnothing^-$.*

Доказательство. Действительно, $\operatorname{rk} X_\varnothing^+ = n = \#X$. □

Определение 10. Представлением *биматроида X над полем k называется пара инъективных отображений (q_+, q_-) из X в векторное пространство V над k, такая, что множество A является базисом в X_B^+ тогда и только тогда, когда объединение $q_+(A) \cup q_-(B)$ является базисом в V.*

Замечание 4. По следствию 2, $q_+(X)$ и $q_-(X)$ – базисы V.

Предложение 5. *Пусть $q = (q_+, q_-)$ – представление X, а w – перестановка X. Наделим пространство V полным флагом $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$, где $V_i = \langle q_-(w([n-i+1, n]))\rangle$. Тогда q_+ – представление флагового матроида $\mathfrak{X}_w$ из следствия 1.*

Доказательство. Элементарная проверка. Заметим, кстати, что полнота флага V_i обеспечивается замечанием 4. □

Пусть w_2 – какая-то перестановка (причина, по которой мы обозначили её через w_2, будет ясна из дальнейшего). Рассмотрим флаговый матроид $\mathfrak{X}_{w_2^{-1}}$. По теореме 1, этому флаговому матроиду соответствует отображение $f_{w_2^{-1}} : W \to W$, для которого $f_{w_2^{-1}}(w_1)([1,l])$ представляет собой базис I матроида $X_l = X^+_{w_2^{-1}([l+1,n])}$, такой, что множество $w_1^{-1}(I)$ максимально. Обозначим через $f(w_1, w_2)$ элемент $f_{w_2^{-1}}(w_1) \cdot w_2 \in W$. Тогда f – отображение из $W \times W$ в W, для которого $f(-, w_2)w_2^{-1}$ – формальная мелкая клетка Шуберта при любом w_2. Отсюда

$$w_1^{-1} f(w', w_2) w_2^{-1} \leqslant w_1^{-1} f(w_1, w_2) w_2^{-1}$$

при любых $w_1, w_2, w' \in W$. Заметим, что это неравенство – в точности первое из неравенств (4).

Наша ближайшая цель – доказать **второе** из этих неравенств, тем самым показав, что f – формальная мелкая клетка (Брюа).

Для достижения этой цели рассмотрим биматроид $\bar{X}$, получающийся из X переменой знаков: $\bar{X}^+_A = X^-_A$ и наоборот. Производя с ним аналогичные манипуляции, мы получаем отображение $\bar{f} : W \times W \to W$, для которого

$$w_2 \bar{f}(w'^{-1}, w_1^{-1}) w_1 \leqslant w_2 \bar{f}(w_2^{-1}, w_1^{-1}) w_1.$$

Тогда для функции $\widehat{f}$, определённой как

$$\widehat{f}(w_1, w_2) = (\bar{f}(w_2^{-1}, w_1^{-1}))^{-1},$$

выполняется неравенство

$$w_1^{-1} \widehat{f}(w_1, w') w_2^{-1} \leqslant w_1^{-1} \widehat{f}(w_1, w_2) w_2^{-1}$$

– второе из неравенств (4).

Таким образом, достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 3.

$$\bar{f}(w_2^{-1}, w_1^{-1}) \cdot f(w_1, w_2) = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Дабы избежать чрезмерной тяжеловесности обозначений, – доказательство теоремы и без того требует тщательнейшей работы с определениями – мы докажем формулу (5) лишь для случая $w_1 = w_2 = e$. Интересующийся читатель может самостоятельно получить доказательство в общем случае, либо вручную расставив в дальнейшем рассуждении символы w_1, w_2, w_1^{-1} и w_2^{-1}, либо применив рассматриваемый случай к биматроиду X', определенному следующим образом: $A \in \mathfrak{B}(X'^{+}_B)$ и $B \in \mathfrak{B}(X'^{-}_A)$ тогда и только тогда, когда $w_1^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(X^{+}_{w_2^{-1}(B)})$.

Пусть $u = f(e,e)$, $v = \bar{f}(e,e)$.

Подготовка. По определению $u([1,l])$ – максимальный базис $X^{+}_{[l+1,n]}$; аналогично, $v([1,m])$ – максимальный базис $X^{-}_{[m+1,n]}$.

Рассуждая индукцией по l, покажем, что $v(u(l)) = l$. Пусть $v(u(i)) = i$ при всех $i < l$. Введём обозначения: $m = u(l)$, $I = u([1,l-1])$, $J = v([1,m-1])$. Тогда $v(I) = [1,l-1]$ и $u([1,l]) = I \cup m$.

Заметим, что

$$v(I \cap [1,m-1]) = v(I) \cap v([1,m-1]) = v([1,m-1]) \cap [1,l-1].$$

В частности,

$$\#(I \cap [1,m-1]) = \#(J \cap [1,l-1]). \tag{6}$$

Докажем теперь вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Пусть множество $H \subseteq X$ и элементы $s,t \in X$ таковы, что $H \cup [s,n]$ – система образующих матроида $X^{+}_{[t+1,n]}$. Тогда существует такой базис D матроида $X^{-}_{[s,n]}$, что*

$$\#(D \cap [1,t]) \leqslant \#(H \cap [1,s-1]).$$

Доказательство. Действительно, по лемме 2, $[t+1,n]$ – система образующих $X^{-}_{H\cup[s,n]}$. Пусть E – базис $X^{-}_{H\cup[s,n]}$, содержащийся в $[t+1,n]$. Поскольку матроид $X^{-}_{H\cup[s,n]}$ является геометрическим фактором $X^{-}_{[s,n]}$, существует базис D последнего, содержащий E. Далее, $D \cap [1,t] = D \setminus [t+1,n] \subseteq D \setminus E$, и число элементов этого пересечения не превосходит

$$\#(D \setminus E) = \operatorname{rk} X^{-}_{[s,n]} - \operatorname{rk} X^{-}_{H\cup[s,n]} = \\ \#(H \cup [s,n]) - \#[s,n] = \#(H \cap [1,s-1]),$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы теперь разбивается на 3 шага:

Шаг 1. Так как объединение $I \cup [m, n]$ содержит $I \cup m = u([1, l])$ – базис $X^+_{[l+1,n]}$, – оно является системой образующих этого матроида. Поэтому, по лемме 3, существует базис A матроида $X^-_{[m,n]}$, такой, что $\#(A \cap [1, l]) \leqslant \#(I \cap [1, m-1])$. Последнее, согласно (6), равно $\#(J \cap [1, l-1])$. Но J – максимальный базис $X^-_{[m,n]}$, поэтому

$$\#(J \cap [1, l]) \leqslant \#(A \cap [1, l]) \leqslant \#(J \cap [1, l-1]),$$

откуда $\underline{l \notin J}$.

Шаг 2. Далее, $J \cup [l+1, n]$ не содержит ни одного базиса $X^-_{[m+1,n]}$. Действительно, в противном случае по лемме 3 существовал бы базис B матроида $X^+_{[l+1,n]}$, для которого

$$\begin{aligned}\#(B \cap [1, m]) \leqslant \#(J \cap [1, l]) = \#(J \cap [1, l-1]) = \\ \#([1, m-1] \cap I) < \#([1, m] \cap (I \cup m)) = \#([1, m] \cap u([1, l]))\end{aligned}$$

(второе равенство верно в силу шага 1, третье – в силу (6)), чего не может быть, так как $u([1, l])$ – максимальный базис $X^+_{[l+1,n]}$.

Таким образом, $v([1, m]) = J \cup v(m)$ не может содержаться в $J \cup [l+1, n]$. Поэтому, $\underline{v(m) \leqslant l}$.

Шаг 3. Так как объединение $I \cup [m+1, n]$ содержит $I = u([1, l-1])$ – базис $X^+_{[l,n]}$, – оно является системой образующих этого матроида. По лемме 3, существует базис C матроида $X^-_{[m+1,n]}$, такой, что число элементов $C \cap [1, l-1]$ не превосходит числа элементов $I \cap [1, m] = I \cap [1, m-1]$. Этот базис должен быть меньше, чем $v([1, m])$, поэтому $\#(v([1, m]) \cap [1, l-1])$ также не превосходит $\#(I \cap [1, m-1])$. Но если $v(m) < l$, то

$$\#(v([1, m]) \cap [1, l-1]) = \#(J \cap [1, l-1]) + 1 = \#(I \cap [1, m-1]) + 1.$$

Поэтому, в силу шага 2, $v(m) = l$. $\square$

Следствие 3. *Построенная выше функция $f : W \times W \to W$ является формальной мелкой клеткой.*

Замечание 5. Нетрудно видеть, что, наоборот, зная формальную мелкую клетку f, можно построить соответствующий ей биматроид. В самом деле, в соответствии с замечанием 3, положим $A \in \mathfrak{B}(X^+_B)$ (соответственно, $B \in \mathfrak{B}(X^-_A)$), если существуют такие $w_1, w_2 \in W$, что

1. $f(w_1, w_2) = w_1 w_0 w_2$;
2. $w_1([n-l+1, n]) = A$, где $l = \#A$;
3. $w_2^{-1}([l+1, n]) = B$.

Тогда условие 2 из определения выполняется по определению; условие же 1 биматроида выполняется для X_A^+ в силу замечания 3, а для X_A^- – в силу симметрии приведённых условий (заменив f на функцию $\bar{f}$, для которой $\bar{f}(w_1, w_2) = (f(w_2^{-1}, w_1^{-1}))^{-1}$, получаем те же самые условия, но с "переменой знаков" у матроидов).

По аналогии с теоремой 2, сформулируем теорему о представлении биматроида:

Теорема 4. *Пусть $f : W \times W \to W$ – формальная мелкая клетка, соответствующая биматроиду X согласно следствию 3. Пусть $q = (q_+, q_-)$ – некоторое представление биматроида X в пространстве V над полем k. Тогда матрица $R = \|r_{ij}\|$, такая, что*

$$q_+(i) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_-(j),$$

принадлежит мелкой клетке D_f. Обратно, любая матрица $R \in D_f$ получается таким образом из некоторого представления биматроида X.

Доказательство. Действительно, пусть $w_1^{-1} R w_2^{-1} \in BuB$, где $u \in W$. Пусть, кроме того, $R \in D_{f'}$, где f' – мелкая клетка, реализующаяся над k. Тогда, согласно замечанию 1, $u([1, l])$ – максимальное (в порядке из определения 4) множество I, для которого $\Delta_{I,[1,l]}(w_1^{-1} R w_2^{-1}) \neq 0$. Но последнее неравенство в точности означает, что образы элементов $q_+(i)$, где $i \in w_1(I)$, в пространстве $V/\langle q_-(w_2([l+1, n]))\rangle$ образуют базис этого пространства. А это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $q_+(w_1(I)) \cup q_-(w_2([l+1, n]))$ – базис пространства V. Поскольку (q_+, q_-) – представление биматроида, то, таким образом, $u([1, l])$ – максимальное множество, такое, что $w_1(I)$ – базис матроида $X^+_{w_2([l+1,n])}$. Отсюда $f'(w_1, w_2) w_2^{-1}([1, l]) = w_1 u([1, l])$ – такой базис J матроида $X^+_{w_2([l+1,n])}$, для которого $w_1^{-1}(J)$ максимально. Но последнее множество – не что иное, как $f(w_1, w_2) w_2^{-1}([1, l])$. Таким образом, $f = f'$ и $R \in R_f$.

Обратная импликация доказывается таким же образом. □

Будем использовать следующие обозначения: для любого множества X через X_+ (соотв., X_-, $X_\pm$) будет обозначено произведение $X \times \{+1\}$ (соотв., $X \times \{-1\}$, $X \times \{-1, +1\}$).

Теорема 5. *Пусть X – некоторый биматроид. Тогда существует единственный матроид на $X_\pm$, порождённый биматроидом X в том смысле, что $A_+ \cup B_- \in \mathfrak{B}(X_\pm)$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{B}(X_B^+)$. При этом $X_+, X_- \in \mathfrak{B}(X_\pm)$. Обратно, для любого матроида на $X_\pm$, для которого X_+ и X_- являются базисами, существует единственный порождающий его биматроид на X.*

Доказательство. Достаточно проверить, что для семейства всех множеств вида $A_+ \cup B_-$ выполняется условие замены. Пусть $A \in \mathfrak{B}(X_B^+)$ и $C \in \mathfrak{B}(X_D^+)$. Рассмотрим любой элемент из $(A_+ \cup B_-) \setminus (C_+ \cup D_-) = (A \setminus C)_+ \cup (B \setminus D)_-$. Пусть, для определённости, $\alpha \in A \setminus C$. Рассмотрим два варианта:

1. D не содержится в замыкании B в матроиде $X_{A\setminus\alpha}^-$. Тогда положим $\beta \in D$ – любой элемент, не лежащий в замыкании B. Далее, поскольку объединение $B \cup \beta$ независимо в $X_{A\setminus\alpha}^-$ и
$$\#(B \cup \beta) = \#B + 1 = \operatorname{rk} X_A^- + 1 = \operatorname{rk} X_{A\setminus\alpha}^-,$$
то $B \cup \beta$ является базисом $X_{A\setminus\alpha}$ и $(A_+ \cup B_-) \setminus (\alpha, +1) \cup (\beta, -1) = (A \setminus \alpha)_+ \cup (B \cup \beta)_-$ – базис $X_\pm$.
2. D содержится в замыкании B в матроиде $X_{A\setminus\alpha}^-$. Тогда D содержится в замыкании B в его геометрическом факторе – матроиде $X_{(A\setminus\alpha)\cup C}^-$. Но этот матроид является также геометрическим фактором X_C^-, а D является в этом матроиде системой образующих, откуда следует, что D также является системой образующих $X_{(A\setminus\alpha)\cup C}^-$. Поэтому B также является системой образующих $X_{(A\setminus\alpha)\cup C}^-$, откуда $(A \setminus \alpha) \cup C$ – система образующих X_B^+. Но $A \setminus \alpha$ – независимое множество в X_B^+, так как оно содержится в базисе A. Поэтому существует множество E, являющееся базисом X_B^+, и такое, что $A \setminus \alpha \subseteq E \subseteq (A \setminus \alpha) \cup C$. Далее,
$$\#E = \operatorname{rk} X_B^+ = \#A = \#(A \setminus \alpha) + 1,$$

поэтому существует такое $\gamma \in C \setminus A$, что $E = (A \setminus \alpha) \cup \gamma$. Отсюда $(A_+ \cup B_-) \setminus (\alpha, +1) \cup (\gamma, +1) = ((A \setminus \alpha) \cup \gamma)_+ \cup B_-$ – базис $X_\pm$.

Доказательство обратного утверждения представляет собой рутинную проверку. □

Замечание 6. По построению, если (q_+, q_-) – представление биматроида, то отображение $q : X_\pm \to V$, для которого $q((\alpha, +1)) = q_+(\alpha)$, $q((\alpha, -1)) = q_-(\alpha)$, является представлением матроида $X_\pm$.

Таким образом, более громоздкая внешне задача описания мелких клеток Брюа сводится к задаче о представлениях **одного** матроида, в то время как задача описания мелких клеток Шуберта требует рассмотрения согласованных представлений последовательности матроидов.

Литература

1. М. Айгнер, *Комбинаторная теория.* Мир, М. (1982).
2. А. Борель, *Линейные алгебраические группы.* Мир, М. (1972).
3. A. V. Borovik, I. M. Gelfand, and N. White, *Flag Matroids.* — Manchester Centre for Pure Mathematics, Preprint **17** (1997).
4. A. V. Borovik and I. M. Gelfand, *WP-matroids and thin Schubert cells on Tits systems.* — Adv. Math. **103** (1994), 162–179.
5. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Мир, М. (1972).
6. C. W. Curtis, *A further refinement of the Bruhat decomposition.* — Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988) 1, 37–42.
7. V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings.* I. *A finer decomposition of Bruhat cells.* — Invent. Math. **79** (1985), 499–511.
8. S. Fomin and A. Zelevinsky, *Double Bruhat cells and total positivity.* — J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 2, 335–380.
9. I. M. Gelfand and V. V. Serganova, *Combinatorial geometries and torus strata on homogeneous compact manifolds.* — Russian Math. Surveys **42** (1987), 133–168.
10. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* Наука, М. (1980).
11. G. Lusztig, *Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius.* — Invent. Math. **38** (1976), 101–159.
12. J. G. Oxley, *Matroid Theory.* — Oxford University Press, Oxford (1992).
13. M. Putcha, *Fine Bruhat decomposition of a reductive group.* — Department of Mathematics, North Carolina State University, Preprint (2000).
14. W. T. Tutte, *A homotopy theorem for matroids*: I, II. — Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1985), 144–174.
15. Н. А. Вавилов, М. Ю. Митрофанов, *Пересечение двух клеток Брюа.* — Докл. РАН **377** (2001) 1, 1–4.
16. N. White, ed., *Theory of Matroids.* — Cambridge University Press, Cambridge (1986).

Mitrofanov M. Yu. Matroids describing Bruhat cells.

The aim of this paper is to generalize results of A. V. Borovik and I. M. Gelfand to the case of two-sided small cells, which surprisingly appears to be much more simple.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: miguelimo38@yandex.ru

Поступило 1 октября 2004 г.