Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

А. Л. Смирнов

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

При изучении векторных расслоений на топологических пространствах заметную роль играют расщепимость мономорфизмов и эпиморфизмов расслоений, а также универсальность тавтологического расслоения на грассманиане. В алгебраической геометрии ни то, ни другое не имеет места. Например, каноническое вложение расслоений $\mathcal{O}(-1) \hookrightarrow \mathcal{O}^2$ на $\mathbf{P}^1$ не расщепляется, поскольку тавтологическое расслоение $\mathcal{O}(-1)$ не имеет нетривиальных глобальных сечений; необходимым условием того, что линейное расслоение L/X может быть индуцировано тавтологическим расслоением на $\mathbf{P}^n$, является наличие нетривиальных глобальных сечений у L^{-1}, что выполнено далеко не всегда. Можно сказать, что работа с алгебраическими векторными расслоениями затруднена отсутствием на них, вообще говоря, нетривиальных глобальных сечений.

В этой статье изложена техника, позволяющая преодолеть эти сложности и работать с расслоениями в гомотопической алгебраической геометрии [2, 3] столь же легко, как и в топологии. Эта техника была представлена в препринте И. А. Панина и автора [1].

Перейдем к изложению результатов. При этом термин "многообразие" используется для произвольного, в том числе и особого, квазипроективного многообразия над некоторым фиксированным полем k.

Уточним, что аффинное расслоение над многообразием – это торсер относительно некоторого векторного расслоения на этом многообразии. Таким образом, аффинное расслоение над X представляет собой, помимо прочего, некоторое многообразие Y вместе со структурной проекцией $Y \to X$. Композицией аффинных расслоений называется отображение многообразий, которое может быть разложено в композицию отображений, каждое из кото-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00633а).

рых представляет собой структурную проекцию некоторого аффинного расслоения.

Теорема 1. *В этой теореме E – произвольное векторное расслоение над многообразием X. Утверждается, что*

1) *вложения и эпиморфизмы векторных расслоений гомотопически расщепимы: для всякого вложения $i : E \to F$ (эпиморфизма $p : F \to E$) векторных X-расслоений существует аффинное расслоение $f : \tilde{X} \to X$, для которого f^*i (соответственно, f^*p) расщепимо;*
2) *над некоторой композицией аффинных расслоений $f : \tilde{X} \to X$ и для некоторого n существует эпиморфизм расслоений $1^n \to f^*(E)$;*
3) *над некоторой композицией аффинных расслоений $f : \tilde{X} \to X$ и для некоторого n существует вложение расслоений $f^*(E) \subset 1^n$.*

Выше 1^n – это тривиальное векторное расслоение ранга n над $\tilde{X}$.

Доказательство. В первом утверждении по двойственности достаточно рассмотреть вложения: на $\widetilde{X}$, определенном пучком $\{q \in \mathcal{H}om(F, E) : qi = id\}$, тавтологическая стрелка $p^*F \to p^*E$ расщепляет i, а $\tilde{X}$ – торсер относительно $\mathcal{H}om(F/E, E)$.

Перейдем ко второму утверждению и представим X как открытую часть замкнутого подмногообразия проективного пространства P, а E как фактор суммы расслоений вида $\mathcal{O}(d)/X$. Это возможно ввиду [4, 5.18] и продолжимости когерентных пучков с открытого множества на все многообразие [4, упр. 5.15]. Тем самым, достаточно проверить утверждение для расслоения $\mathcal{O}(d)$ на P. Для $d \geq 0$ это расслоение порождено глобальными сечениями на самом P. Для $d < 0$ имеется вложение $\mathcal{O}(d) \subset 1^m$ и утверждение следует из уже проверенной гомотопической расщепимости этого вложения. Третье утверждение следует из второго по двойственности.

Следствие 1. *Для любого векторного расслоения E/X ранга r существует композиция аффинных расслоений $p : \tilde{X} \to X$ и отображение $f : \tilde{X} \to \mathbf{Gr}_r(V)$ для некоторого векторного пространства V, такие, что $p^*(E) = f^*(\tau)$, где τ – тавтологическое расслоение.*

Если для отображений $f_0 : X \to \mathbf{Gr}_r(V_0)$ и $f_1 : X \to \mathbf{Gr}_r(V_1)$ расслоения $f_0^*(\tau)$ и $f_1^*(\tau)$ изоморфны, то существует отображение $h : X \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{Gr}_r(V)$ для некоторого векторного пространства V и *линейные вложения* $j_0 : \mathbf{Gr}_r(V_0) \to \mathbf{Gr}_r(V)$, $j_1 : \mathbf{Gr}_r(V_1) \to \mathbf{Gr}_r(V)$ *такие, что* $h \times 0 = j_0 f_0$, *а* $h \times 1 = j_1 f_1$.

Доказательство. Первое утверждение это переформулировка теоремы 1, п. 3. Для построения гомотопии рассмотрим над $X \times \mathbf{A}^1$ вложение $i : f_0^*(\tau) \times \mathbf{A}^1 \to V_1 \oplus V_2$, заданное для $t \in \mathbf{A}^1$ формулой $(1-t)i_0 \oplus t i_1 \varphi$, где $i_m : f_m^*(\tau) \subset V_m$ – вложение над X, соответствующее f_m, а $\varphi : f_0^*(\tau) \to f_1^*(\tau)$ – имеющийся по условию изоморфизм. Вложение i дает искомую гомотопию $h : X \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{Gr}_r(V_0 \oplus V_1)$. $\square$

Литература

1. I. Panin, A. Smirnov, *Push-forwards in oriented cohomology theories of algebraic varieties.* — K-theory Preprint Archives **459** (2000).
2. F. Morel, V. Voevodsky, *Homotopy category of schemes over a base.* — Preprint (1997).
3. V. Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-Homotopy theory.* — Doc. Math., Extra Vol. ICM 1998(I), 417–442.
4. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* М., Мир (1981).

Smirnov A. L. Homotopic properties of algebraic vector bundles.

A technique is given which allows to work easily with vector bundles in homotopic algebraic geometry just as in topology. In particular it is proven that any monomorphism and any epimorphism of algebraic vector bundles can be split homotopically and that the tautological vector bundle on the Grassmanian is homotopically universal.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 16 сентября 2004 г.