Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

Ю. Л. Ботников

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЭВИСА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

Неравенства типа Дэвиса были получены впервые в работе [3] (1970) как мартингальные обобщения неравенств Хинчина ([8], 1923) с целью расширения сферы действия неравенств Буркхольдера ([2], 1966). Неравенства типа Дэвиса являются двусторонними максимальными неравенствами. История получения такого рода неравенств подробно изложена в [10].

Целью данной работы является получение неравенств типа Дэвиса для двух типов диффузионных процессов: бесселевских процессов размерности $\delta > 1$ и радиального процесса Орнштейна-Уленбека размерности $\delta \geq 1$. Основой для неё послужила работа Граверсена и Пешкира ([6]), в которой рассматривается непрерывный процесс, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ланжевена:

$$dU_t = -\beta U_t dt + dW_t, \tag{1}$$

с начальным условием $U_0 = 0$, где $\beta > 0$. Для него были получены следующие неравенства типа Дэвиса ([6]).

Теорема 1 (S. E. Graversen, G. Peskir, 2000). *Пусть* $U = (U_t)_{t\geq 0}$ *– условный процесс Орнштейна–Уленбека, являющийся решением СДУ Ланжевена* (1).

Тогда существуют универсальные константы $A_1 > 0$ *и* $A_2 > 0$ *такие, что*

$$\frac{A_1}{\sqrt{\beta}}\,\mathbb{E}\sqrt{\ln(1+\beta\tau)} \leq \mathbb{E}(\max_{0\leq t\leq \tau}|U_t|) \leq \frac{A_2}{\sqrt{\beta}}\,\mathbb{E}\sqrt{\ln(1+\beta\tau)} \tag{2}$$

для произвольных моментов остановки τ *относительно фильтрации* $\mathbb{F} = (F_t)_{t\geq 0}$, *где* $F_t = \sigma(W_{\leq t})$, *и* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *– винеровский процесс из уравнения* (1).

Доказательство теоремы 1 основано на применении принципа доминирования Ленгляра (см. [6] или [9]). В результате некоторого обобщения принципа доминирования Ленгляра мы получаем неравенства типа Дэвиса для бесселевских процессов размерности $\delta > 1$ и радиального процесса Орнштейна–Уленбека размерности $\delta \geq 1$.

2. Принцип доминирования

Допустим, нам известно, что процесс X доминируется процессом A, в том смысле, что процесс X, остановленный в произвольный ограниченный момент остановки τ, "в среднем" принимает значения не большие, чем процесс A, остановленный в тот же момент времени, то есть

$$\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}A_\tau < +\infty. \tag{3}$$

Принцип доминирования Ленгляра позволяет оценить сверху некоторым функционалом от A математическое ожидание максимума преобразования $H(X)$ на интервале до произвольного (возможно неограниченного) момента остановки τ, если H принадлежит некоторому классу вещественнозначных монотонных функций.

В ([9]) предполагалось, что $X_0 = A_0 = 0$ (случай $a = 0$ в теореме 2). В нашем обобщении принципа доминирования предполагается, что X и A имеют некоторое общее неотрицательное начальное значение.

Основная идея применения принципа доминирования для получения неравенств типа Дэвиса состоит в получении некоторого равенства для математических ожиданий остановленных процессов, которое в дальнейшем рассматривется как "взаимное доминирование" этих процессов. Поочерёдно принимая один процесс за X, а другой за A, и применяя принцип доминирования, мы можем получить обе части неравенства типа Дэвиса.

Обозначим $\mathbb{R}_+ \triangleq \{x : x \geq 0\}$.

Теорема 2 (Обобщение принципа доминирования Ленгляра). *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство со стандартной фильтрацией. Допустим, что выполняются следующие условия:*

1. $X = (X_t)_{t\geq 0}$ – $\mathbb{F}$-*согласованный положительный случайный процесс с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями, такой, что* $X_0 = a$, *где* $a \geq 0$ – *некоторая константа.*
2. $A = (A_t)_{t\geq 0}$ –$\mathbb{F}$-*согласованный возрастающий непрерывный случайный процесс такой, что* $A_0 = a$.
3. $H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – *возрастающая функция класса* $C^1(\mathbb{R}_+)$ *такая, что* $H(0) = 0$.
4. *Процесс* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *доминируется процессом* $A = (A_t)_{t\geq 0}$, *то есть для произвольных ограниченных* $\mathbb{F}$-*согласованных моментов остановки* τ *справедливо неравенство* (3).

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq \tau} H(X_t) \leq \mathbb{E}(\widetilde{H}(A_\tau)), \tag{4}$$

для произвольных $\mathbb{F}$-*согласованных моментов остановки* τ, *где* $\widetilde{H}(0) = 0$ *и*

$$\widetilde{H}(x) = x \int\limits_x^\infty \frac{1}{s}\, dH(s) + 2H(x) \quad при \quad x > 0. \tag{5}$$

Доказательство. Это доказательство является аналогом доказательства принципа доминирования Ленгляра ([6, 9]), обобщённым на случай процессов X и A с неотрицательным начальным значением. Символом 1_A будем обозначать индикаторную функцию события A.

Рассмотрим функцию $H(x)$, определённую в пункте 3 теоремы. Оценим $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq \tau} H(X_t))$ для произвольного ограниченного момента остановки τ.

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq \tau} H(X_t)) = \mathbb{E}(H(\sup_{0\leq t\leq \tau} X_t)) = H(a) + \mathbb{E}\Bigg(\int\limits_a^{\sup_{0\leq t\leq \tau} X_t} dH(s)\Bigg) =$$

$$= H(a) + \mathbb{E}\Bigg(\int\limits_a^\infty 1_{\{\sup_{0\leq t\leq \tau} X_t \geq s\}} dH(s)\Bigg) \overset{\text{т. Фубини}}{=}$$

$$= H(a) + \int\limits_a^\infty \mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq \tau} X_t \geq s\} dH(s) \leq$$

$$\leq H(a) + \int\limits_a^\infty (\mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq\tau} X_t \geq s, A_\tau \leq s\} + \mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq\tau} X_t \geq s, A_\tau > s\})dH(s)$$

$$\leq H(a) + \int\limits_a^\infty (\mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq\tau} X_t \geq s, A_\tau \leq s\} + \mathbb{P}\{A_\tau > s\})dH(s).$$

Рассмотрим следующие моменты остановки:

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 \mid X_t > s\}, \quad \tau_2 = \inf\{t \geq 0 \mid A_t > s\}.$$

Далее, используя неравенство Чебышёва и свойство доминирования (3), получаем для $s \geq a$:

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq\tau} X_t \geq s, A_\tau \leq s\} \leq \mathbb{P}\{\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\{X_{\tau\wedge\tau_1\wedge\tau_2} \geq s\} \leq \frac{1}{s}\mathbb{E}X_{\tau\wedge\tau_1\wedge\tau_2} \leq \frac{1}{s}\mathbb{E}A_{\tau\wedge\tau_1\wedge\tau_2}.$$

Далее, оценим,

$$\mathbb{E}\big(\sup_{0\leq t\leq\tau} H(X_t)\big) \leq H(a) + \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{s}\mathbb{E}A_{\tau\wedge\tau_1\wedge\tau_2}dH(s) + \int\limits_a^{+\infty}\mathbb{P}\{A_\tau > s\}dH(s) =$$

$$= H(a) + \int\limits_a^{+\infty}\left(\frac{1}{s}\mathbb{E}\big(A_{\tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau}1_{\{A_\tau\leq s\}}\big) + \frac{1}{s}\mathbb{E}\big(A_{\tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau}1_{\{A_\tau > s\}}\big)\right)dH(s) +$$

$$+ \int\limits_a^{+\infty}\mathbb{P}\{A_\tau > s\}dH(s) \leq H(a) + \int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{s}\,\mathbb{E}\left(A_\tau 1_{\{A_\tau\leq s\}}\right)dH(s) +$$

$$+ \int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{s}\,\mathbb{E}\left(A_{\tau_2}1_{\{A_\tau > s\}}\right)dH(s) + \int\limits_a^{+\infty}\mathbb{P}\{A_\tau > s\}dH(s).$$

Используя то, что $A_{\tau_2} = s$ при $s \geq a$ в силу определения τ_2 и непрерывности процесса A, получаем, что

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{s}\,\mathbb{E}\left(A_{\tau_2}1_{\{A_\tau > s\}}\right)dH(s) = \int\limits_a^{+\infty}\mathbb{P}\{A_\tau > s\}dH(s).$$

Значит,

$$H(a)+\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{s}\,\mathbb{E}\left(A_\tau 1_{\{A_\tau\le s\}}\right)dH(s)+$$

$$+\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{s}\,\mathbb{E}\left(A_{\tau_2}1_{\{A_\tau>s\}}\right)dH(s)+\int\limits_a^{+\infty}\mathbb{P}\{A_\tau>s\}dH(s)=$$

$$=H(a)+\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{s}\,\mathbb{E}\left(A_\tau 1_{\{A_\tau\le s\}}\right)dH(s)+2\int\limits_a^{+\infty}\mathbb{P}\{A_\tau>s\}dH(s)=$$

$$=H(a)+\mathbb{E}\left(A_\tau\int\limits_a^{+\infty}\left(\frac{1_{\{A_\tau\le s\}}}{s}\right)dH(s)\right)+2\int\limits_a^{+\infty}\mathbb{E}\left(1_{\{A_\tau>s\}}\right)dH(s)=$$

$$=H(a)+\mathbb{E}\left(A_\tau\int\limits_{A_\tau}^{+\infty}\frac{1}{s}dH(s)\right)+2\mathbb{E}\int\limits_a^{+\infty}1_{\{A_\tau>s\}}dH(s)=$$

$$=H(a)+\mathbb{E}\left(A_\tau\int\limits_{A_\tau}^{+\infty}\frac{1}{s}\,dH(s)\right)+2\mathbb{E}(H(A_\tau))-2H(a)=$$

$$=\mathbb{E}(\widetilde{H}(A_\tau))-H(a)\le\mathbb{E}(\widetilde{H}(A_\tau)).$$

Таким образом, неравенство (4) доказано для произвольных ограниченных моментов остановки τ.

Пусть теперь τ – произвольный момент остановки (не обязательно ограниченный). В этом случае рассмотрим последовательность моментов остановки $\{\tau_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, где $\tau_k=\tau\wedge k$.

Заметим, что $\widetilde{H}$ является возрастающей функцией на $\mathbb{R}_+$, так как

$$\widetilde{H}'(x)=\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{s}\,dH(s)-x\frac{1}{x}H'(x)+2H'(x)=$$

$$=H'(x)+\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{s}\,dH(s)\ge 0,$$

поскольку $H(x)$ возрастает на $\mathbb{R}_+$.

Так как $\tau_k \le \tau$, A_t является возрастающим процессом, а $\widetilde{H}$ – возрастающая функция, то справедливо неравенство

$$\mathbb{E}(\widetilde{H}(A_{\tau_k})) \le \mathbb{E}(\widetilde{H}(A_\tau)).$$

Для момента остановки τ_k имеем,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le \tau_k} H(X_t)\right) \le \mathbb{E}(\widetilde{H}(A_{\tau_k})).$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le \tau_k} H(X_t)\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le t\le \tau} H(X_t)\right) 1_{\{\tau\le k\}}\right) +$$

$$+\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le t\le k} H(X_t)\right) 1_{\{\tau> k\}}\right) \ge$$

$$\ge \mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le t\le \tau} H(X_t)\right) 1_{\{\tau\le k\}}\right). \qquad (6)$$

Так как

$$\left(\sup_{0\le t\le \tau} H(X_t)\right) 1_{\{\tau\le k\}} \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \sup_{0\le t\le \tau} H(X_t),$$

то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le t\le \tau} H(X_t)\right) 1_{\{\tau\le k\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le \tau} H(X_t)\right).$$

И отсюда, используя (6), в итоге получаем

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le \tau} H(X_t)\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le t\le \tau} H(X_t)\right) 1_{\{\tau\le k\}}\right) \le$$

$$\le \liminf_{k\to+\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le \tau_k} H(X_t)\right) \le \liminf_{k\to+\infty} \mathbb{E}(\widetilde{H}(A_{\tau_k})) \le \mathbb{E}(\widetilde{H}(A_\tau))$$

для произвольных моментов остановки τ. $\square$

3. Неравенства типа Дэвиса для бесселевских процессов

Определение 1 (см., например, [5]). *Для произвольных* $\delta \geq 0$ *и* $z_0 \geq 0$ *единственное сильное решение СДУ (на вероятностном пространстве, на котором задан винеровский процесс* $W = (W_t)_{t\geq 0}$*)*

$$dZ_t = \delta dt + 2\sqrt{Z_t}dW_t, \quad Z_0 = z_0 \tag{7}$$

называется квадратом δ*-мерного бесселевского процесса и обозначается* $BESQ^{\delta}_{z_0}$.

Определение 2. *Квадратный корень процесса* $BESQ^{\delta}_{y^2}$, $\delta \geqslant 0$, $y > 0$ *называется бесселевским процессом размерности* δ *и обозначается* BES^{δ}_{y}.

Для $\delta > 1$ *процесс* $BES^{\delta}_{r_0}$ *является сильным решением уравнения*

$$dR_t = \frac{\delta - 1}{2}\frac{1}{R_t}\,dt + dW_t. \tag{8}$$

Замечание. Существование сильного решения уравнения (8) доказывается, например, в [4]. Некоторые максимальные неравенства для бесселевских процессов были получены в работе [7].

Хорошо известно, что для натуральных значений параметра размерности δ бесселевский процесс $R_t(\delta) \equiv R_t$ может быть определён как модуль радиус-вектора

$$(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(\delta)}),$$

где $W^{(k)} = (W_t^{(k)})_{t\geq 0}, 1 \leq k \leq \delta$ - независимые винеровские процессы.

То есть,

$$R_t = \sqrt{\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(W_t^{(\delta)}\right)^2},\ t \geq 0. \tag{9}$$

Мы докажем, что для бесселевсого процесса имеет место следующее неравенство типа Дэвиса.

Теорема 3. *Пусть* $R = (R_t)_{t\geq 0}$ *– процесс* $BES^{\delta}_{r_0}$*, где* $R_0 = r_0 = \mathrm{const} \geq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{3}\mathbb{E}\sqrt{\delta\tau + r_0^2} \leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} R_t\right) \leq 3\mathbb{E}\sqrt{\delta\tau + r_0^2} \tag{10}$$

для произвольных моментов остановки τ относительно фильтрации $\mathbb{F} = (F_t)_{t\geq 0}$, где $F_t = \sigma(W_{\leq t})$, и $W = (W_t)_{t\geq 0}$ – винеровский процесс из уравнения (8).

Доказательство. По формуле Ито для любой функции $F(x) \in C^2$ имеем

$$F(R_t) = F(R_0) + \int_0^t (\mathrm{L}\, F)(R_s)ds + \int_0^t F'(R_s)dW_s, \qquad (11)$$

где

$$\mathrm{L} = \frac{\delta - 1}{2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

– инфинитезимальный оператор для процесса R. Для дифференциального уравнения $\mathrm{L}F = 1$ рассмотрим его решение

$$F(x) = \frac{x^2}{\delta}.$$

Пусть τ – ограниченный момент остановки. Из (11) следует, что

$$F(R_\tau) = F(R_0) + \int_0^\tau (\mathrm{L}\, F)(R_s)ds + \int_0^\tau F'(R_s)dW_s. \qquad (12)$$

Возьмём математическое ожидание обеих частей равенства (12). Получаем

$$\mathbb{E}F(R_\tau) = \frac{r_0^2}{\delta} + \mathbb{E}\int_0^\tau (\mathrm{L}\, F)(R_s)ds + \mathbb{E}\int_0^\tau F'(R_s)dW_s.$$

Учитывая, что $\mathbb{E}\int_0^\tau F'(R_s)dW_s = 0$, мы приходим к следующему равенству для произвольных ограниченных моментов остановки τ:

$$\mathbb{E}F(R_\tau) = \mathbb{E}\left(\tau + \frac{r_0^2}{\delta}\right). \qquad (13)$$

Функция $F(x)$ является строго возрастающей на $\mathbb{R}_+$. Для применения принципа доминирования положим

$$H(x) \triangleq F^{-1}(x) = \sqrt{\delta x}.$$

Вычислим функцию

$$\widetilde{H}(x) = x \int\limits_x^\infty \frac{1}{s}\, dH(s) + 2H(x).$$

Имеем

$$\int\limits_x^\infty \frac{1}{s}\, dH(s) = \frac{\delta}{2} \int\limits_x^{+\infty} \frac{ds}{s\sqrt{\delta s}} = \frac{\sqrt{\delta}}{2} \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{H(x)}{x}.$$

Откуда следует, что

$$\widetilde{H}(x) = 3H(x). \tag{14}$$

Возьмём $X_t = F(R_t)$ и $A_t = t + \frac{r_0^2}{\delta}$. Применяя (4), мы получаем оценку сверху:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} R_t\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} H(F(R_t))\right) \le 3H(A_\tau) = 3\mathbb{E}\sqrt{\delta\tau + r_0^2}. \tag{15}$$

Для доказательства оценки снизу переобозначим $X_t = t + \frac{r_0^2}{\delta}$ и $A_t = \sup_{0\le s\le t} F(R_s)$. Из (13) следует, что для всяких ограниченных моментов остановки τ

$$\mathbb{E}\left(\tau + \frac{r_0^2}{\delta}\right) \le \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} F(R_t)\right).$$

В итоге, применяя (4), мы получаем

$$\mathbb{E}\sqrt{\delta\tau + r_0^2} = \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} H(X_t)\right) \le$$

$$\le 3H(A_\tau) = 3\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} R_t\right). \square \tag{16}$$

4. Неравенства типа Дэвиса для радиального процесса Орнштейна–Уленбека

Определение 3 (см. [5]). *Пусть $\beta, \sigma > 0$, $\delta \geqslant 1$. Процесс Q_t называется радиальным процессом Орнштейна–Уленбека размерности δ с параметром β, если он является решением следующего* СДУ

$$dQ_t = \left(\frac{\beta\sigma^2(\delta-1)}{Q_t} - \beta Q_t\right) dt + \sqrt{2\beta}\sigma dW_t, \quad Q_0 = q_0 \ge 0. \tag{17}$$

Отметим также, что мы можем получить радиальный процесс Орнштейна–Уленбека из бесселевского процесса с помощью неслучайной замены времени (см., например, [1]):

$$Q_t = \sigma \exp\{-\beta t\} R_{\exp\{2\beta t\}-1}. \tag{18}$$

Рассмотрим $m \in \mathbb{N}$ независимых процессов Орнштейна–Уленбека, являющихся решениями СДУ

$$dU_t^{(k)} = -\beta U_t^{(k)} dt + \sigma\sqrt{2\beta} dW_t^{(k)},\ t \geq 0,\ 1 \leq k \leq \delta,$$

где $\{(W_t^{(k)})_{t\geq 0}\}$, – независимые винеровские процессы, $\beta > 0$ и $\sigma > 0$.

Известно, что для натуральных значений m радиальный процесс Орнштейна-Уленбека Q_t размерности m может быть определён как модуль радиус-вектора

$$(U_t^{(1)}, U_t^{(2)}, \dots, U_t^{(\delta)}),$$

то есть, как

$$Q_t = \sqrt{\left(U_t^{(1)}\right)^2 + \left(U_t^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(U_t^{(\delta)}\right)^2},\ t \geq 0. \tag{19}$$

Справедливо следующее неравенство типа Дэвиса для радиального процесса Орнштейна–Уленбека.

Теорема 4. *Пусть $Q = (Q_t)_{t\geq 0}$ – радиальный процесс Орнштейна–Уленбека, являющийся решением* (17). *Введём функционал*

$$I_t = \int_0^t e^{Q_s^2/2\sigma^2} ds. \tag{20}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma\, \mathbb{E}\sqrt{\ln(e^{q_0^2/2\sigma^2} + \beta\delta I_\tau)} &\leq \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} Q_t) \leq \\ &\leq 3\sqrt{2}\sigma\, \mathbb{E}\sqrt{\ln(e^{q_0^2/2\sigma^2} + \beta\delta I_\tau)} \end{aligned} \tag{21}$$

для произвольных моментов остановки τ относительно фильтрации $\mathbb{F} = (F_t)_{t\geq 0}$, где $F_t = \sigma(W_{\leq t})$, и $W = (W_t)_{t\geq 0}$ – винеровский процесс из уравнения (17).

Доказательство. Для любой функции $F(x) \in C^2$ по формуле Ито мы получаем,

$$F(Q_\tau) = F(Q_0) + \int\limits_0^\tau (\mathrm{L}\, F)(Q_s) ds + \int\limits_0^\tau F'(Q_s) dW_s, \qquad (22)$$

где

$$\mathrm{L} = \left(\frac{\beta\sigma^2(\delta-1)}{q} - \beta q \right) \frac{\partial}{\partial q} + \beta\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2}$$

– инфинитезимальный оператор для процесса Q.

Рассмотрим уравнение $\mathrm{L}\, F = \exp(q^2/2\sigma^2)$. Его решения имеют вид

$$F(q) = \frac{1}{\delta\beta} e^{q^2/2\sigma^2} + c,$$

где $c = \mathrm{const}$. Будем рассматривать такое решение, что $F(0) = 0$, то есть

$$F(q) = \frac{1}{\delta\beta} \left(e^{q^2/2\sigma^2} - 1 \right).$$

Функция $F(q)$ возрастает на $\mathbb{R}_+$, поэтому мы можем рассматривать обратную к ней функцию

$$H(q) \equiv H(q; \beta, \sigma, \delta) \stackrel{\Delta}{=} F^{-1}(q) = \sigma\sqrt{2\ln(\delta\beta q + 1)},$$

которая определена на $\mathbb{R}_+$.

Обозначим

$$\widetilde{H}(q) \equiv \widetilde{H}(q; \beta, \sigma, \delta) = \\ = q \int\limits_q^\infty \frac{1}{s}\, dH(s) + 2H(q), \quad q \geq 0. \qquad (24)$$

Рассмотрим функцию

$$\widehat{G}(q, \beta, \sigma, \delta) = \frac{q}{H(q)} \int\limits_q^\infty \frac{1}{s}\, dH(s) = \\ = \frac{q}{2\sqrt{\ln(1+\delta\beta q)}} \int\limits_q^{+\infty} \frac{\delta\beta ds}{s(1+\delta\beta s)\sqrt{\ln(1+\delta\beta s)}}.$$

В следующей лемме мы докажем ограниченность $\widehat{G}(q, \beta, \sigma, \delta)$ единицей. Это будет означать, что интеграл в правой части (24) не превосходит $H(q)$.

Лемма 1. *При* $q > 0$ *верно неравенство:* $\widehat{G}(q, \beta, \sigma, \delta) \leq 1$.

Доказательство. Введём функцию

$$G(q; \beta) \triangleq \frac{q}{2\sqrt{\ln(1+\beta q)}} \int\limits_q^{+\infty} \frac{ds}{s(1+\beta s)\sqrt{\ln(1+\beta s)}}.$$

Очевидно, что

$$\widehat{G}(q, \beta, \sigma, \delta) = \frac{q}{2\sqrt{\ln(1+\beta\delta q)}} \int\limits_q^{+\infty} \frac{ds}{s(1+\beta\delta s)\sqrt{\ln(1+\beta\delta s)}} =$$

$$= \frac{\beta\delta q}{2\sqrt{\ln(1+\beta\delta q)}} \int\limits_{\beta\delta q}^{+\infty} \frac{ds}{s(1+s)\sqrt{\ln(1+s)}} = \widehat{G}(q\delta\beta, 1, 1, 1, 0) = G(q\delta\beta, 1).$$

То есть теперь достаточно доказать, что $G(q, 1) \leq 1$ при $q > 0$. Для этого нужно показать, что

$$\int\limits_q^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{\ln(1+s)}(1+s)s} \leq \frac{2\sqrt{\ln(1+q)}}{q}, \quad \text{при} \quad q > 0.$$

Несложно проверить, что

$$\frac{2\sqrt{\ln(1+q)}}{q} = \int\limits_q^{+\infty} \left(\frac{2\sqrt{\ln(1+s)}}{s^2} - \frac{1}{\sqrt{\ln(1+s)}(1+s)s} \right) ds.$$

Теперь нам достаточно доказать, что

$$\int\limits_q^{+\infty} \frac{2ds}{\sqrt{\ln(1+s)}(1+s)s} \leq \int\limits_q^{+\infty} \frac{2\sqrt{\ln(1+s)}}{s^2} ds \quad \text{при} \quad q > 0.$$

Для этого покажем, что

$$\frac{2}{\sqrt{\ln(1+s)}(1+s)s} \leq \frac{2\sqrt{\ln(1+s)}}{s^2} \quad \text{при} \quad s > 0,$$

то есть, что

$$\frac{s}{1+s} \leq \ln(1+s), \quad \text{при} \quad s > 0. \square$$

Продолжим доказательство теоремы 4.

Из леммы 1 следует, что

$$\widetilde{H}(q,\beta,\sigma,\delta) \leq 3H(q,\beta,\sigma,\delta) \tag{25}$$

на $\mathbb{R}_+$.

Возьмём математическое ожидание от обеих частей равенства (22). Затем, учитывая, что стохастический интеграл в (22) имеет нулевое математическое ожидание, мы получаем равенство:

$$\mathbb{E}F(Q_\tau) = \mathbb{E}\left(I_\tau + \frac{\left(e^{q_0^2/2\sigma^2}-1\right)}{\beta\delta}\right) \tag{26}$$

для произвольных ограниченных моментов остановки τ.

Тогда условия принципа доминирования выполняются при $X_t = F(Q_t)$ и $A_t = I_t + \left(e^{q_0^2/2\sigma^2}-1\right)/(\beta\delta)$.

Применяя (4) и (25), получаем оценку сверху

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} Q_t) = \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} H(F(Q_t))) \leq$$

$$\leq 3\mathbb{E}H(A_\tau) = 3\sqrt{2}\,\sigma\,\mathbb{E}\sqrt{\ln(e^{q_0^2/2\sigma^2} + \delta\beta I_\tau)}.$$

Из (26) следует, что

$$\mathbb{E}\left(I_\tau + \frac{\left(e^{q_0^2/2\sigma^2}-1\right)}{\beta\delta}\right) \leq \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} F(Q_t)).$$

С учётом последнего неравенства мы можем применить (4) для $X_t = I_t + \left(e^{q_0^2/2\sigma^2}-1\right)/(\beta\delta)$ и $A_t = \sup_{0\leq s\leq t} F(Q_s)$. То есть мы получаем оценку снизу

$$\sqrt{2}\,\sigma\,\mathbb{E}\sqrt{\ln(e^{q_0^2/2\sigma^2} + \delta\beta I_\tau)} = \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} H(F(Q_t))) \leq$$

$$\leq 3\mathbb{E}H(F(Q_\tau)) = 3\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} Q_t). \ \square$$

Автор выражает благодарность О. В. Русакову за помощь и конструктивные замечания в процессе написания работы.

Литература

1. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению.* "Лань", С.-Петербург (2000).
2. D. L. Burkholder, *Martingale transforms.* — Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.
3. B. Davis, *On the integrability of the martingale square function.* — Israel J. Math. **8** (1970), 187–190.
4. A. Göing-Jaeschke, *Some generalizations of Bessel processes.* — Risklab report, April (1997).
5. A. Göing-Jaeschke, M. Yor, *A survey and some generalizations of Bessel process.* — Risklab report (1999).
6. S. E. Graversen, G. Peskir, *Maximal inequalities for the Ornstein–Uhlenbeck process.* — Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3035–3041.
7. S. E. Graversen, G. Peskir, *Maximal inequalities for Bessel processes.* — J. Inequal. Appl. **2** (1998), 99–119.
8. A. Khintchine, *Über dyadische Bruche.* — Math. Z. **18** (1923), 109–116.
9. E. Lenglart, *Relation de domination entre deux processus.* — Ann. Inst. Poincaré Probab. Statist. **13** (1977), 171–179.
10. Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, *Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия.* — Успехи мат. наук **50**, вып. 5 (1995), 305.

Botnikov Yu. L. Davis-type inequalities for a number of diffusion processes.

In this paper we obtain Davis-type maximal inequlaities for Bessel process of dimension parameter $\delta > 1$ and for the radial Ornstein–Uhlenbeck process. The proofs are based on generalization of the Lenglart domination principle.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: botnikov@rambler.ru

Поступило 25 мая 2004 г.