Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

М. С. Ермаков

МИНИМАКСНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА В ВЕСОВОМ ГАУССОВСКОМ БЕЛОМ ШУМЕ

Постановка задачи. Основные результаты. Пусть на интервале $(0,1)$ наблюдается случайный процесс $Y(t)$ задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY(t) = S(t)dt + \epsilon q(t)dw(t), \quad \epsilon > 0, \tag{1}$$

где $dw(t)$ – гауссовский белый шум и $q(t)$ – весовая функция. Шум $q(t)dw(t)$ обычно называется весовым гауссовским белым шумом (см. [2, 6]). Такая модель естественным образом возникает в теории статистических выводов. Как показывают результаты по асимптотической эквивалентности статистических экспериментов (см. [1, 8]) к ней сводятся задачи асимптотических статистических выводов о плотности распределения и регрессии. Задачи оценивания в весовом гауссовском белом шуме рассматривались в [2, 6]. Вопросы непараметрической проверки гипотез для такой модели менее изучены, хотя и аналогичная модель и рассматривалась в несколько других ситуациях (см. [4, 5]). По существу цель работы показать, что результаты мало отличаются от случая $q(t) = 1$, исследованного в [3].

О сигнале предполагается известным, что

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \phi_j(t),$$

$$S = \{s_j\}_1^{\infty} \in U = \{S = \{s_j\}_1^{\infty}, \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_j^2 \leqslant P_0,\ s_j \in R^1\}, \tag{2}$$

где $\phi_j(t)$ – ортонормированная система функций в $L_2(0,1)$ и $P_0 > 0, a_j > 0$ – заданные числа. В случае тригонометрической системы функций и $a_{2j} = a_{2j+1} = 1 + (2\pi j)^{2\beta}, \beta > 0$ такая априорная

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ-ННИО 04-01-04001, РФФИ 02-01-00262, и НШ 2258.2003.1.

информация соответствует предположению, что сигнал принадлежит шару в пространстве Соболева.

Мы будем проверять гипотезу, что сигнал отсутствует H_0 : $S(t) = 0$, $t \in (0,1)$ против альтернатив

$$S \in V_\epsilon = \{S : ||S||_2 > \rho_\epsilon, S \in U\}, \tag{3}$$

где $||S||_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_j^2$. Будет предполагаться, что $\rho_\epsilon \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Для любого критерия M_ϵ обозначим $\alpha_\epsilon(M_\epsilon)$ вероятность ошибки первого рода и $\beta_\epsilon(M_\epsilon, \theta)$ вероятность ошибки второго рода при альтернативе $\theta \in V_\epsilon$. Положим $\beta_\epsilon(M_\epsilon) = \sup\limits_{S \in V_\epsilon} \beta_\epsilon(M_\epsilon, S)$.

Скажем, что последовательность критериев K_ϵ имеющих вероятности ошибок первого рода $\alpha(K_\epsilon) = \alpha, 0 < \alpha < 1$ является асимптотически минимаксной, если для любой последовательности критериев $M_\epsilon, \alpha(M_\epsilon) \leqslant \alpha$ имеет место

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \{\beta_\epsilon(K_\epsilon) - \beta_\epsilon(M_\epsilon)) \leqslant 0.$$

Результаты получены при следующих ограничениях (сравни с [4]).

A1. Последовательность a_j возрастающая и существует $\delta > 0$ такая что $a_j/j^\delta \to \infty$ при $j \to \infty$.
A2. Существует такое c, $0 < c < 1$, что

$$\lim\inf_{t \to \infty} \frac{Z(ct)}{Z(t)} > 0. \tag{4}$$

Здесь $Z(t)$ – число элементов $\{a_j : a_j < t,\ 1 \leqslant j < \infty\}$.

Из A2 следует, что последовательность a_j возрастает не быстрее чем некоторая степень j.
A3. $\sup\{a_{t+1}/a_t : t > j\} \to 1$ при $j \to \infty$.
A4. Существует такое $C > 0$, что для всех j

$$\sup\{|\phi_j(x)| : x \in (0,1)\} \leqslant C < \infty.$$

Для любых p и h из $L_2(0,1)$ и любых j, j_1 обозначим

$$(p,h) = \int_0^1 ph\,dx, \quad p_j = (p)_j = (p,\phi_j), \quad p_{jj_1} = (p\phi_j)_{j_1}$$

A5. $0 < c < q(x) < C < \infty$ для всех $x \in (0,1)$.
A6. Существует такие $\tau > \frac{1}{2}$ и $C > 0$, что для всех j

$$\sum_{r=1}^{\infty} |j-r|^{2\tau} (q)_{jr}^2 < C, \tag{5}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} |j-r|^{2\tau} (q^2)_{jr}^2 < C. \tag{6}$$

Простые достаточные условия для выполнения A6 приведены в [4].

Обозначим $\Phi(x)$ функцию стандартного нормального распределения. Для любого $z \in R^1$ обозначим $(z)_+ = \max(z,0)$ и $[z]$ – целую часть числа $z \in R^1$. Для любого события D обозначим $\chi(D)$ индикатор этого события. Буквы C, c в дальнейшем обозначают положительные постоянные.

Определим последовательность $\kappa_j^2 = \kappa_{j\epsilon}^2 = (\lambda_1 - \lambda_2 a_j)_+$, где λ_1, λ_2 находятся из уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2 ||q^2\phi_j||^2 = \rho_\epsilon, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \kappa_j^2 ||q^2\phi_j||^2 = P_0. \tag{8}$$

Обозначим $k = k_\epsilon = \max\{j : \kappa_j \neq 0\}$ и

$$A_\epsilon = \epsilon^{-4} \sum_{1}^{k} \kappa_j^4 ||q^2\phi_j||^2. \tag{9}$$

Определим тестовые статистики

$$T_\epsilon(Y_\epsilon) = \epsilon^{-2} \sum_{1}^{k} \kappa_j^2 \left(\left(\int_0^1 \phi_j(t)\, dY_\epsilon(t) \right)^2 - \epsilon^2 (q^2)_{jj} \right).$$

Зададим критерии

$$K_\epsilon(Y_\epsilon) = \chi(\epsilon^{-2} T_\epsilon(Y_\epsilon) > (2A_\epsilon)^{1/2} x_\alpha),$$

где x_α критическое значение для K_ϵ.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A1–A6. *Тогда последовательность критериев* K_ϵ, $0 < C_1 < \alpha_\epsilon = \alpha(K_\epsilon) < C_2 < 1$ *является асимптотически минимаксной. Если*

$$0 < \liminf_{\epsilon \to 0} A_\epsilon \leqslant \limsup_{\epsilon \to 0} A_\epsilon < \infty, \tag{10}$$

то x_{α_ϵ} *можно задать уравнением* $\alpha_\epsilon = 1 - \Phi(x_{\alpha_\epsilon})$ *и*

$$\beta_\epsilon(K_\epsilon) = \Phi(x_{\alpha_\epsilon} - (A_\epsilon/2)^{1/2})(1 + o(1)) \tag{11}$$

при $\epsilon \to 0$.

Замечание 1. Множители $||q^2\phi_j||^2$ в (7)–(9) исчезают в случае тригонометрической системы функций и заменяются на $\frac{1}{2}||q^2||^2$. Это обусловлено тем, что $\sin^2(2\pi jt) + \cos^2(2\pi jt) = 1$.

Замечание 2. В [4] рассмотрен определенный аналог данной задачи для непараметрической проверки гипотез о плотности распределения. Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ независимых одинаково распределенных наблюдений имеющих плотность распределения $f(x)$. Известно, что

$$f(x) = p(x) + q(x) \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j(x).$$

Необходимо проверить гипотезу $H_0 : f = p$ против альтернатив $H_\epsilon \theta \in V_\epsilon$, где V_ϵ имеет тоже самое задание (3). Для этой задачи результат аналогичен, при этом $||q^2\phi_j||^2$ в (7)–(9) заменяется в [4] на $||pq^{-2}\phi_j||^2$.

На самом деле теорема 1 справедлива для гораздо более широкого множества альтернатив

$$\overline{V}_\epsilon = \left\{ S : \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{j\epsilon}^2 s_j^2 > \rho_\epsilon, S = \{s_j\}_1^\infty \right\} \tag{12}$$

для широкого класса последовательностей $\{\kappa_{j\epsilon}\}_1^\infty$. Приведем результат для такой постановки задачи.

Пусть для каждого $\epsilon > 0$ определена последовательность коэффициентов $\{\kappa_{j\epsilon}\}_1^\infty$, удовлетворяющая следующим условиям.

B1. При всех $\epsilon > 0$ последовательность $\kappa_{j\epsilon}^2$ убывающая.

B2. Имеет место (10) и

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{j\epsilon}^2 = 0.$$

Здесь определение A_ϵ совпадает с (9).

Зададим k_ϵ уравнением

$$k_\epsilon = \sup\left\{k : \sum_{j\leqslant k_\epsilon}\kappa_{j\epsilon}^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{j\epsilon}^2\right\}.$$

B3. Для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{\delta k_\epsilon < j < \delta^{-1}k_\epsilon}\left|\frac{\kappa_{j\epsilon}^2}{\kappa_{j+1,\epsilon}^2} - 1\right| = 0.$$

B4.

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sum_{\delta k_\epsilon < j < \delta^{-1}k_\epsilon}\kappa_{j\epsilon}^2||q^2\phi_j||^2}{\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{j,\epsilon}^2||q^2\phi_j||^2} = 1, \tag{13}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-4}A_\epsilon^{-1}\sum_{\delta k_\epsilon < j < \delta^{-1}k_\epsilon}\kappa_{j\epsilon}^4||q^2\varphi_j|| = 1. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* B1–B4, A4–A6. *Тогда последовательность критериев K_ϵ асимптотически минимаксна в задаче проверки гипотезы $H_0 : S = 0$ против альтернатив $H_\epsilon : S \in \overline{V}_\epsilon$. Если $0 < \alpha(K_\epsilon)(1 + o(1)) = \alpha < 1$, то критическое значение x_α находится из уравнения $\alpha = 1 - \Phi(x_\alpha)$ и*

$$\beta_\epsilon(K_\epsilon) = \Phi(x_\alpha - (A_\epsilon/2)^{1/2})(1 + o(1))$$

при $\epsilon \to 0$.

Доказательство теоремы 2 по существу представляет собой незначительную модификацию доказательства теоремы 1 и поэтому опускается.

Данные результаты легко переносятся на случай задач проверки параметрических гипотез.

2. Проверка параметрической гипотезы против непараметрических множеств альтернатив. Предположим, что нам надо проверить гипотезу $H_0 : S(t) = S(t,\theta)$, $\theta \in \Theta$ против непараметрических множеств альтернатив

$$S \in \widetilde{V}_\epsilon = \{S : \inf_{\theta \in \Theta} ||S - S(\theta)|| > \rho_\epsilon, S \in \widetilde{U}_\epsilon\}, \tag{15}$$

где

$$\widetilde{U}_\epsilon = \{S : S(t) = S(t,\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j \phi_j(t), \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_j^2 \leqslant P_0\}.$$

Предположим, что Θ является открытым ограниченным множеством в R^d.

Скажем, что семейство критериев $M_\epsilon, \alpha_\theta(M_\epsilon) = E_\theta M_\epsilon \leqslant \alpha$, $0 < \alpha < 1, \theta \in \Theta$ является равномерно асимптотически минимаксным для множества альтернатив $\widetilde{V}_\epsilon$, если семейство критериев M_ϵ является асимптотически минимаксным при каждом фиксированном θ в задаче проверки простой гипотезы $S = S(s,\theta)$ против альтернатив $S \in \widetilde{V}_\epsilon$.

Обозначим $\beta(K_\epsilon, \theta) = \sup\{\beta(K_\epsilon, S),\ S \in \widetilde{V}_\epsilon\}$.

Сделаем следующие предположения.

D1. Для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\theta_1 \neq \theta_2$ имеет место $||S(\theta_1) - S(\theta_2)|| \neq 0$.

Предположим, что $S(t,\theta)$ непрерывно дифференцируем по $\theta \in \Theta$ и обозначим $S_{\theta_i}(t,\theta) = \frac{\partial S(t,\theta)}{\partial \theta_i}$, $1 \leqslant i \leqslant d$ его частные производные. Положим $S_\theta(t,\theta) = \{S_{\theta_i}(t,\theta)\}_1^d$.

Для любых u, $v \in R^d$ определим скалярное произведение $u'v$.

D2. Найдется такое $\omega > 0$, что для всех θ_1, $\theta_2 \in \Theta$

$$||S(\theta_2) - S(\theta_1) - S'_\theta(\theta_1)(\theta_2 - \theta_1)||^2 < C|\theta_1 - \theta_2|^{2+\omega}.$$

D3. Найдется постоянная $C > 0$ такая, что $||S_{\theta_i}(\cdot,\theta)||^2 < C$ для всех $1 \leqslant i \leqslant d$ и $\theta \in \Theta$ и равномерно по $\theta \in \Theta$

$$(S_{\theta_i}(\cdot,\theta)q^2)_j \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{16}$$

D4. Существует функционал $\overline{\theta} : L_2(0,1) \to \Theta$ такой, что $\overline{\theta}(S) \to \theta$ при $||S - S(\theta)|| \to 0$ равномерно по $\theta \in \Theta$

D5. Существует такая оценка $\hat{\theta}_\epsilon$, что для любого $\delta > 0$

$$P_S(|\hat{\theta}_\epsilon - \overline{\theta}(S)| > \delta\epsilon^2/\kappa) = o(1)$$

равномерно по $S \in \widetilde{V}_\epsilon$. Здесь $\kappa = \max\{\kappa_j,\ 1 \leqslant j < \infty\}$.

Как следует из леммы 3.1 в [4] $\kappa^2 = O(\epsilon^2 k^{-1/2})$. Так что D5 дает оценку вероятностей больших уклонений $\hat\theta_\epsilon$. Отметим, что эти вероятности рассматриваются для S не из параметрического множества. Однако в статистике оценка $\hat\theta(Y_\epsilon)$ часто может быть интерпретирована как некоторый функционал $\overline{\theta}(S)$ на всем множестве сигналов и мы можем рассматривать вероятности больших уклонений $\hat\theta(Y_\epsilon) - \overline{\theta}(S)$ на всем множестве сигналов. С этой позиции условие D5 не очень ограничительно. Отметим, что в подобной постановке в [5] в аналогичном условии D4 указанные в D4 оценки вероятностей $|\hat\theta_\epsilon - \overline{\theta}(S)|$ можно заменить менее ограничительной оценкой

$$P_S(|\hat\theta_\epsilon - \overline{\theta}(S)| > \delta\epsilon^{2/(2+\omega)}) = o(1),$$

равномерно по S из $\widetilde{V}_\epsilon$. Здесь $\omega > 0$ определена в [5]. Такое же изменение можно сделать в условии E3 в [5].

D6. Существует $\gamma(u) \to 0$ при $u \to 0$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(s_j(\theta_1) - s_j(\theta_2))^2 \leqslant \gamma(|\theta_1 - \theta_2|)$$

Определим тестовые статистики

$$T(Y_\epsilon, \hat\theta_\epsilon) = \epsilon^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2\left(\left(\int_0^1 \phi_j(t)(dY_\epsilon(y) - S(t,\hat\theta_\epsilon)dt)\right)^2 - \epsilon^2(q^2)_{jj}\right),$$

где κ_j^2 задаются так же как в теореме 1.

Определим последовательность критериев $K_\epsilon = \chi(\epsilon^{-2}T(Y_\epsilon,\hat\theta_\epsilon) > x_\alpha(A_\epsilon)^{1/2})$, где x_α находятся из уравнения $\alpha = 1 - \Phi(x_\alpha)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A1–A6, D1–D6 *и имеет место* (10). *Тогда последовательность критериев* K_ϵ *является асимптотически минимаксной и*

$$\beta(K_\epsilon) = \Phi(x_\alpha - (A_\epsilon/2)^{1/2})(1 + o(1))$$

при $\epsilon \to 0$.

3. Доказательство теоремы 1. Определим матрицу $Q=\{q_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ и матрицу $\Lambda = \Lambda_\epsilon = \{\lambda_{ij}\}_{ij=1}^{\infty}$, где $\lambda_{ij} = \kappa_j^2$, если $i = j$, и $\lambda_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Здесь $\kappa_j^2 = (\lambda_{1\delta} - \lambda_{2\delta} a_j)_+$, где параметры $\lambda_{1\delta}, \lambda_{2\delta}$ находятся из уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2 ||q^2 \phi_j||^2 = (1+\delta)\rho_\epsilon,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \kappa_j^2 ||q^2 \phi_j||^2 = (1-\delta) P_0,$$

где $0 < \delta < 1$. Определим вектор $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$, где ξ_j, $1 \leqslant j < \infty$, независимые гауссовские случайные величины, $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 = 1$.

В этих обозначениях уравнение (1) запишется в виде

$$Y = S + \epsilon Q \xi,$$

где $S = \{s_j\}_1^{\infty}$, $Y = \{y_j\}_1^{\infty}$, $y_j = \int_0^1 \phi_j dY_\epsilon$.

Доказательство нижней границы базируется на известном факте, что байесовский риск не превосходит минимаксный. Определяется последовательность байесовских критериев и показывается, что на ней достигается минимаксный риск.

Определим гауссовский случайный вектор $\zeta = \{\zeta_j\}_1^{\infty}$, состоящий из независимых гауссовских случайных величин ζ_j, $E\zeta_j = 0, E\zeta_j^2 = 1$. По нему построим гауссовский случайный вектор

$$\eta = \eta_{\epsilon\delta} = \{\eta_j\}_1^{\infty} = Q^2 \Lambda^{1/2} \zeta.$$

Обозначим $\mu_{\epsilon\delta}$ вероятностную меру случайного вектора $\eta_{\epsilon\delta}$. Определим байесовское априорное распределение $\nu_{\epsilon,\delta}$, как условное распределение $\eta_{\epsilon\delta}$ при условии что $\eta_{\epsilon\delta} \in Q_\epsilon$.

Лемма 1. *Для любого* $\delta > 0$

$$\lim_{\epsilon \to 0} P(\eta_\epsilon \in Q_\epsilon) = 1. \tag{17}$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из неравенства Чебышова и следующих соотношений

$$E\left(\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (q^2)_{jk} \kappa_j^2 (q^2)_{kj} = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2 ||q^2\phi_j||^2 (1 + o(1)), \tag{18}$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \eta_j^2\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \kappa_j^2 ||q^2\phi_j||^2(1+o(1)), \tag{19}$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2\right) = 2\sum_{j,t=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(q^2)_{jk}\kappa_j^2(q^2)_{kt}\right)^2 =$$

$$= 2\sum_{j,t=1}^{\infty}((q^4)_{jt})^2\kappa_t^4(1+o(1)) = 2\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^4||q^4\phi_j||^2(1+o(1)), \tag{20}$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\eta_j^2\right) = 2\sum_{j,t=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(q^2)_{jk}a_j\kappa_j^2(q^2)_{kt}\right)^2 =$$

$$= 2\sum_{j,t=1}^{\infty}((q^4)_{jt})^2 a_t^2\kappa_t^4(1+o(1)) = 2\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\kappa_j^4||q^4\phi_j||^2(1+o(1)). \tag{21}$$

Детальное доказательство (18)–(21) аналогично оценкам доказательства леммы 2.2 в [4] и опускается.

Аналогично [3, 5] утверждение леммы позволяет свести задачу проверки гипотезы для вероятностной меры ν_ϵ к аналогичной задаче для меры μ_ϵ. Таким образом достаточно решить задачу для вероятностной меры μ_ϵ.

Заметим, что в силу условия A5 у матрицы Q существует обратная. Положим $\Lambda^{-1} = \left\{\lambda_{ij}^{-1}\right\}_{i,j=1}^{\infty}$, где мы считаем, что $0^{-1} = 0$.

Обозначим $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – единичный оператор.

Байесовское апостериорное отношение правдоподобия для априорного распределения $\mu_{\epsilon\delta}$ равно

$$C\int \exp\left\{-\frac{1}{2\epsilon^2}(Y-S)'Q^{-2}(Y-S)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}S'Q^{-2}\Lambda^{-1}Q^{-2}S + \frac{1}{2}Y'Q^{-2}Y\right\} d\mu_{\epsilon\delta} =$$

$$C\int \exp\left\{\frac{1}{2\epsilon^2}Y'Q^{-2}S - \frac{1}{2}S'(\epsilon^{-2}Q^{-2} + Q^{-2}\Lambda^{-1}Q^{-2}S\right\} d\mu_{\epsilon\delta} =$$

$$C\int \exp\left\{-\frac{1}{2\epsilon^2}||(I+\epsilon^2 Q^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1})^{-1/2}Q^{-1}Y-\right.$$

$$-|(I+\epsilon^2 Q^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1})^{1/2}Q^{-1}S||^2\Big\}\, d\mu_{\epsilon\delta}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\epsilon^2}Y'Q^{-1}(I+\epsilon^2Q^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1})^{-1}Q^{-1}Y\right\}=$$

$$C\exp\left\{-\frac{1}{2\epsilon^2}Y'Q^{-1}(I+\epsilon^2Q^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1})^{-1}Q^{-1}Y\right\}. \qquad (22)$$

Таким образом в качестве байесовской статистики можно взять

$$T^a_\epsilon(Y)=Y'Q^{-1}(I+\epsilon^2Q^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1})^{-1}Q^{-1}Y.$$

Покажем, что разницей между $T^a_\epsilon(Y)$ и $T_\epsilon(Y)$ можно пренебречь. Обозначим $W_\epsilon=\epsilon^{-4}Y'\Lambda Q\Lambda QY$. Имеем

$$|T^a_\epsilon(Y)-T_\epsilon(Y)-E_0[W_\epsilon]|<|W_\epsilon-E_0[W_\epsilon]|. \qquad (23)$$

Непосредственными вычислениями находим

$$E_0[W_\epsilon]=\epsilon^{-4}\sum_{j,i,l=1}^{\infty}(q^2)_{ji}\kappa_j^2q_{jl}\kappa_l^2q_{li}=$$

$$\epsilon^{-4}\sum_{j,l=1}^{\infty}(q^3)_{jl}\kappa_j^2q_{jl}\kappa_l^2=\epsilon^{-4}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^4(q^4)_{jj}(1+o(1)), \qquad (24)$$

$$\mathrm{Var}_0[W_\epsilon]=\epsilon^{-8}\sum_{j,i,l,j_1,l_1,i_1=1}^{\infty}(q^2)_{jj_1}\kappa_j^2q_{jl}\kappa_l^2q_{li}\kappa_{j_1}^2q_{j_1l_1}\kappa_{l_1}^2q_{l_1i_1}(q^2)_{ii_1}+$$

$$\epsilon^{-8}\sum_{j,i,l,j_1,l_1,i_1=1}^{\infty}(q^2)_{ji_1}\kappa_j^2q_{jl}\kappa_l^2q_{li}\kappa_{j_1}^2q_{j_1l_1}\kappa_{l_1}^2q_{l_1i_1}(q^2)_{j_1i}=$$

$$\epsilon^{-8}\sum_{j,l,j_1,l_1,1=1}^{\infty}(q^2)_{jj_1}\kappa_j^2q_{jl}\kappa_l^2\kappa_{j_1}^2q_{j_1l_1}\kappa_{l_1}^2(q^4)_{ll_1}+$$

$$\epsilon^{-8}\sum_{j,l,j_1,l_1,1=1}^{\infty}(q^3)_{jl_1}\kappa_j^2q_{jl}\kappa_l^2\kappa_{j_1}^2q_{j_1l_1}\kappa_{l_1}^2(q^3)_{j_1l}=$$

$$2\epsilon^{-8}\sum_{l,l_1=1}^{\infty}(q^4)^2_{ll_1}\kappa_l^4\kappa_{l_1}^4(1+o(1))\leqslant$$

$$2\epsilon^{-8}\kappa^4 \sum_{l=1}^{\infty} ||q^4\phi_l||^2\kappa_l^4(1+o(1)) = o(1), \tag{25}$$

$$E_\eta[W_\epsilon] = E_0[W_\epsilon] + \epsilon^{-4} \sum_{i,j,l,m=1}^{\infty} (q^2)_{ij}\kappa_j^4 q_{jl}\kappa_l^2 q_{lm}(q^2)_{mi} = E_0[W_\epsilon] +$$

$$+\epsilon^{-4}\sum_{j,l=1}^{\infty}(q^5)_{lj}\kappa_j^4 q_{jl}\kappa_l^2 = E_0[W_\epsilon] + O\left(\epsilon^{-4}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^6\right) = E_0V_\epsilon + o(1). \tag{26}$$

$$\mathrm{Var}_\eta[W_\epsilon] = \mathrm{Var}_0[W_\epsilon] + 2\epsilon^{-8}\mathrm{Sp}\,[Q^2\Lambda Q^2\Lambda Q\Lambda QQ^2\Lambda Q^2\Lambda Q\Lambda Q] +$$
$$2\epsilon^{-8}\mathrm{Sp}\,[Q^2\Lambda Q\Lambda QQ^2\Lambda Q^2\Lambda Q\Lambda Q] \leqslant$$
$$\mathrm{Var}_0[W_\epsilon] + 2\epsilon^{-8}(\sup_t q^{12}(t)\mathrm{Sp}\,[\Lambda^6] + \sup_t q^{10}(t)\mathrm{Sp}\,[\Lambda^5]) = o(1). \tag{27}$$

В (27) $\mathrm{Sp}\,[A]$ обозначает след оператора A.

Из (24)–(27), в силу неравенства Чебышова получаем

$$|T_\epsilon^a(Y) - T_\epsilon(Y) - E_0V_\epsilon| < |V_\epsilon - E_0V_\epsilon| = o_P(1), \tag{28}$$

как в случае гипотезы, так и байесовской альтернативы.

В случае альтернативы имеем

$$Y'\Lambda Y = \sum_{j,k,l=1}^{\infty}(s_j + q_{jk}\zeta_k)\kappa_j^2(s_j + q_{jl}\zeta_l) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}s_j^2\kappa_j^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2 s_j\sum_{j=1}^{\infty}q_{jk}\zeta_k +$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}q_{jk}\zeta_k\kappa_j^2\sum_{i=1}^{\infty}q_{ji}\zeta_i = J_1(S) + J_2(S) + J_3 = J_1 + J_2 + J_3. \tag{29}$$

Непосредственными вычислениями находим

$$E_\theta[J_2] = 0, \quad E_0[J_2] = 0,$$

$$E_0[J_3] = \epsilon^2\sum_{j,l=1}^{\infty}\kappa^2 q_{jl}q_{lj} = \epsilon^2\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2(q^2)_{jj},$$

$$\mathrm{Var}_\theta[J_2] = 4\sum_{j,i,l=1}^{\infty}\kappa_j^2\theta_j q_{ji}q_{il}\theta_l\kappa_l^2 =$$

$$4\sum_{j,l=1}^{\infty}\kappa_j^2\theta_j(q^2)_{jl}\theta_l\kappa_l^2 \leqslant$$

$$4\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2|\theta_j|\left(\sum_{l=1}^{\infty}\kappa_l^4\theta_l^2\right)^{1/2}||q^2\phi_j|| \leqslant 4C\kappa^2k^{1/2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2\theta_j^2||q^2\phi_j|| =$$

$$o\left(\sum_{j=1}^{\infty}\kappa^2\theta_j^2||q^2\phi_j||\right), \tag{30}$$

$$\mathrm{Var}_0[J_3] = \mathrm{Var}_0\, Y'\Lambda Y = 2\sum_{j,i,l,m=1}^{\infty}\kappa_j^2 q_{ji}q_{il}\kappa_l^2(q^2)_{lm}q_{mj} =$$

$$2\sum_{j,l=1}^{\infty}\kappa_j^2\kappa_l^2(q^2)_{jl}^2 = 2\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^4||q^2\phi_j||^2(1+o(1)) = 2A_\epsilon(1+o(1)). \tag{31}$$

В случае байесовской альтернативы получаем

$$\epsilon^{-2}E_\eta[Y'\Lambda Y] = A_\epsilon(1+o(1)) + \sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2(q^2)_{jj},$$

$$\epsilon^{-4}\,\mathrm{Var}_\eta[Y'\Lambda Y] = 2A_\epsilon + 4\epsilon^{-4}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^6(q^2)_{jj} = 2A_\epsilon(1+o(1)).$$

При этом

$$\epsilon^{-4}\,\mathrm{Var}_\eta[J_2] = 4\epsilon^{-4}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^6(q^2)_{jj}$$

Поскольку

$$\mathrm{Var}_\theta[J_2] = o(J_1^2), \quad \mathrm{Var}[J_3] = 2A_\epsilon(1+o(1)) = O(J_1),$$

то в силу неравенства Чебышова $\beta(K_\epsilon, S_\epsilon) \to 0$ при $\epsilon \to 0$, если $J_1(S_\epsilon) \to \infty$ при $\epsilon \to 0$.

Таким образом для доказательства теоремы 1 остается только показать асимптотическую нормальность статистики J_3. Это доказательство мало чем отличается от доказательства аналогичного утверждения леммы 3.7 в [4] и поэтому опускается.

Доказательство теоремы 3. Начнем с доказательства границы сверху. Имеем

$$T_\epsilon^{1/2}(Y_\epsilon - S(\hat\theta)) \leqslant T_\epsilon^{1/2}(Y_\epsilon - S) + T_\epsilon^{1/2}(S - S(\theta(S)))+ \\ T_\epsilon^{1/2}(S(\theta(S)) - S(\hat\theta)). \tag{32}$$

Распределение статистики $T_\epsilon(Y_\epsilon - S)$ совпадает с распределением статистики $T_\epsilon(Y_\epsilon)$ для нулевой гипотезы в постановке теоремы 1.

Имеем

$$T_\epsilon(S - S(\theta(S))) = \epsilon^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2(s_j - s_j(\theta(S)))^2 \geqslant \\ \epsilon^{-2}\lambda_1\sum_{j=1}^{k}(s_j - s(\overline{\theta}(S)))^2 - \epsilon^{-2}\lambda_2\sum_{j=1}^{k}a_j(s_j - s(\overline{\theta}(S)))^2 = \Gamma_1 - \Gamma_2 = \Gamma. \tag{33}$$

где $s_j(\theta) = (S(\theta))_j$. Оценим сверху Γ_2. Будем считать, что

$$||S - S(\overline{\theta}(S))|| = o(1). \tag{34}$$

В противном случае $A_\epsilon = o(\epsilon^{-2}T_\epsilon(S - S(\overline{\theta}(S))))$ и $\beta_\epsilon(K_\epsilon, S) \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Пусть $\widetilde{\theta}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s_j - s_j(S(\widetilde{\theta})))^2 \leqslant P_0. \tag{35}$$

Тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s_j - s_j(\overline{\theta}(S)))^2 - \sum_{j=1}^{\infty}a_j(s_j - s_j(\widetilde{\theta}(S)))^2\right| \leqslant \\ \left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s_j - s_j(\overline{\theta}(S)) + s_j - s_j(\widetilde{\theta}(S)))^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s_j(\overline{\theta}(S)) - s_j(\widetilde{\theta}(S)))^2\right)^{1/2} \\ \leqslant 2P_0^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s_j(\overline{\theta}(S)) - s_j(\widetilde{\theta}(S)))^2\right)^{1/2} \leqslant \\ 2P_0^{1/2}\gamma^{1/2}(|\widetilde{\theta} - \overline{\theta}(S)|) = o(1), \tag{36}$$

где последнее равенство вытекает из (34) и D4, D6.

Из (33), (35), (36) следует, что

$$\Gamma \geqslant \epsilon^{-2}\lambda_1\rho_\epsilon - \epsilon^{-2}\lambda_2 P_0(1+o(1)) \geqslant \epsilon^2 A_\epsilon. \qquad (37)$$

Имеем

$$T_\epsilon(S(\hat\theta) - S(\overline{\theta}(S)) =$$
$$= \epsilon^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2(s_j(\hat\theta) - s_j(\overline{\theta}(S)))^2 \leqslant \epsilon^{-2}\kappa^2||S(\hat\theta) - S(\overline{\theta}(S))||^2 \leqslant$$
$$\epsilon^{-2}\left(\kappa||S(\hat\theta) - S(\theta(S)) - (\hat\theta - \theta(S))' S_\theta(\overline{\theta}(S))|| + \kappa|\hat\theta - \overline{\theta}(S)|||S_\theta(\overline{\theta}(S))||\right)^2$$
$$\leqslant C\epsilon^{-2}\kappa^2|\hat\theta - \overline{\theta}(S)|^2 = o_P(\epsilon^2), \qquad (38)$$

где последнее равенство следует из D5.

Из (32), (33), (37), (38) следует, что для любого $S \in \widetilde{V}_\epsilon$ вероятность ошибки второго рода $\beta(K_\epsilon S)$, не превосходит $\beta_\epsilon(K_\epsilon)(1 + o(1))$.

Доказательство границы снизу во многом аналогично [5]. Возьмем в качестве $\mu_{\epsilon\delta}$ вероятностную меру случайного процесса $S(\theta_0) + \eta_\epsilon$. Обозначим

$$\rho_{\eta_\epsilon} = \inf_\theta ||S(\theta_0) + \eta_\epsilon - S(\theta)||^2$$

Тогда, как следует из доказательства нижней границы в теореме 1, нам достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 2.
$$\frac{\rho_{\eta_\epsilon}}{\rho_\epsilon} \to 1 + \delta \qquad (39)$$
по вероятности при $\epsilon \to 0$.

Доказательство в основном аналогично доказательству (4.26) в [5]. Отличие заключается в том, что сглаживающее ядро заменяется дельта-функцией.

Обозначим $\widetilde{\theta}_\epsilon = \arg\min_\theta ||S(\theta_0) + \eta_\epsilon - S(\theta)||$. Поскольку $||\eta_\epsilon||^2 = \rho_\epsilon(1 + o_P(1))$ при $\epsilon \to 0$, то, в силу D1–D3, $\widetilde{\theta}_\epsilon - \theta_0 = o_P(1)$. Отсюда, рассуждая аналогично (4.50)–(4.59) в [5] на основе D1–D3, получаем

$$\rho_{\eta_\epsilon} = ||\eta_\epsilon||^2(1 + o(1)) + 2\int_0^1 (\widetilde{\theta} - \theta_0)' S_\theta(t, \theta_0)\eta_\epsilon(t)dt +$$

$$+||(\widetilde{\theta}-\theta_0)'S_\theta(t,\theta_0)||^2(1+o(1))$$

и для доказательства (39) достаточно показать, что

$$\int_0^1 S_{\theta_i}(t,\theta_0)\eta_\epsilon(t)dt = o_P(\rho_\epsilon^{1/2}) \tag{40}$$

для $1 \leqslant i \leqslant d$.

Имеем

$$E\left(\int_0^1 S_{\theta_i}\eta_\epsilon dt\right)^2 = \sum_{j=1}^\infty \kappa_j^2 (S_{\theta_i} q^2)_j^2 = o(\rho_\epsilon)$$

в силу (16). Отсюда следует (40), а значит и (39).

Литература

1. L. D. Brawn, M. Low, *Asymptotic equivalence of nonparametric regression and white noise.* — Ann. Statist. **24** (1996), 2384–2398.
2. S. Efromovich, M. Pinsker, *Sharp-optimal and adaptive estimation for heteroscedastic nonparametric regression.* — Statistica Sinica **6** (1996), 925–942.
3. М. С. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме.* — Теор. вероятн. примен. **35** (1990), 704–715.
4. М. С. Ермаков, *Минимаксная непараметрическая проверка гипотез о плотности распределения.* — Теор. вероятн. примен. **39** (1994), 396–416.
5. M. S. Ermakov, *On asymptotic minimaxity of kernel-based tests.* — ESAIM Probability and Statistics **7** (2003), 277–310.
6. M. S. Ermakov, *Asymptotically minimax and Bayes estimation in a deconvolution problem.* — Inverse Problems **19** (2003), 1339–1359.
7. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-fit Testing under Gaussian Models.* Lect. Notes Statist. **169** Springer N. Y. (2002).
8. M. Nussbaum, *Asymptotic equivalence of density estimation and Gaussian white noise.* — Ann. Statist. **24** (1996), 2399–2430.

Ermakov M. S. Minimax detection of signal in weighted Gaussian white noise.

We consider the problem of signal detection in weighted Gaussian white noise where the set of alternatives is essentially nonparametric. In this setting we find the family of asymptotically minimax tests. The results are extended on the case of tested parametric hypothesis versus nonparametric sets of alternatives.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 25 июня 2004 г.