Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

Д. Н. Запорожец

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПОЛИНОМА

1. Введение

Пусть даны случайные величины

$$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n. \tag{1}$$

Построим по ним случайный полином

$$G(t) = \xi_0 t^n + \xi_1 t^{n-1} + \cdots + \xi_{n-1} t + \xi_n. \tag{2}$$

Обозначим через η число его вещественных корней.

После получения М. Кацем [1] формулы, вычисляющей $\mathbf{E}\eta$ в случае, когда (1) являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами, вопросы, касающиеся теории случайных полиномов, изучались многими математиками. Среди полученных интересных результатов стоит отметить работы Д. Стивенса [2], П. Эрдеша и А. Оффорда [3] и И. А. Ибрагимова и Н. Б. Масловой [4]. Также большого внимания заслуживает статья Э. Костлана и А. Эдельмана [5], в которой методами интегральной геометрии получен вывод формулы М. Каца и различных ее обобщений.

Обнаруженная взаимосвязь теории случайных полиномов и интегральной геометрии используется автором данной заметки для нахождения вероятностного распределения числа вещественных корней случайного полинома.

2. Основной результат

Введем обозначения для элементарных симметрических мно-

Работа выполнена при поддержке грантов “Ведущие научные школы” (НШ-2258.2003.1), РФФИ-ННИО (04-01-04000) и ИНТАС (03-51-5018).

гочленов

$$\begin{aligned}
\sigma_0(y_1,\dots,y_n) &= 1,\\
\sigma_1(y_1,\dots,y_n) &= y_1+\dots+y_n,\\
\sigma_2(y_1,\dots,y_n) &= y_1y_2+\dots+y_{n-1}y_n,\\
\sigma_3(y_1,\dots,y_n) &= y_1y_2y_3+\dots+y_{n-2}y_{n-1}y_n,\\
&\dots,\\
\sigma_{n-1}(y_1,\dots,y_n) &= y_1y_2\dots y_{n-1}+\dots+y_2y_3\dots y_n,\\
\sigma_n(y_1,\dots,y_n) &= y_1y_2\dots y_n
\end{aligned}$$

и для определителя Вандермонда

$$\Delta(y_1,\dots,y_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|y_i-y_j|.$$

Теорема 1. *Пусть случайные величины* (1) *имеют совместную плотность* $p(a_0,\dots,a_n)$. *Тогда число вещественных корней* η *распределено следующим образом:*

$$P\{\eta=n-2k\}=$$

$$\frac{2^k}{k!(n-2k)!}\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2k}}dx_1\dots dx_{n-2k}\int\limits_{\mathbf{R}_+^k}dr_1\dots dr_k\int\limits_{[0,\pi]^k}d\alpha_1\dots d\alpha_k\int\limits_{\mathbf{R}^1}dar_1\dots r_k$$

$$\times p(a\sigma_0,a\sigma_1,\dots,a\sigma_n)\,|a^n\Delta|\,, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_j &= \sigma_j\left(x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k}\right),\\
\Delta &= \Delta\left(x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k}\right).
\end{aligned}$$

Доказательство. Случайному полиному (2) соответствует случайный вектор $(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n)$, плотность распределения которого есть $p(a_0,\dots,a_n)$. Это означает, что мы имеем $(n+1)$-мерное векторное пространство $\mathbf{V}$ полиномов вида

$$G(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\dots+a_{n-1}t+a_n,$$

на котором задана мера μ, определяемая как интеграл дифференциальной формы

$$dG=p(a_0,a_1,\dots,a_n)da_0\wedge\dots\wedge da_n. \tag{4}$$

При этом вероятность любого события равна мере соответствующего множества полиномов. Значит наша цель заключается в нахождении $\mu(V_k)$, где V_k состоит из полиномов, имеющих ровно $n-2k$ вещественных корня. Заметим, что в этом случае k из оставшихся корней лежат строго выше вещественной оси, а k, сопряженные им, – ниже.

Итак, пусть $G \in V_k$. Обозначим все его корни следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1, \\ &\dots, \\ z_{n-2k} &= x_{n-2k}, \\ z_{n-2k+1} &= r_1 e^{i\alpha_1}, \\ z_{n-2k+2} &= r_1 e^{-i\alpha_1}, \\ &\dots, \\ z_{n-1} &= r_k e^{i\alpha_k}, \\ z_n &= r_k e^{-i\alpha_k}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} -\infty < x_1, \dots, x_{n-2k} < \infty, \\ 0 < r_1, \dots, r_k < \infty, \\ 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_k < \pi. \end{aligned}$$

Опишем дальнейший ход доказательства. Из вышесказанного следует, что для нахождения $\mu(V_k)$ нужно проинтегрировать диффрециальную форму (4) по множеству V_k. Однако в том виде, в котором она определена, ее интегрировать неудобно (т.к. структура V_k как подмножества $\mathbf{R}^{n+1}$ совершенно неясна). Поэтому мы сделаем замену координат: $a_1, \dots, a_n$ заменим на $x_1, \dots, x_{n-2k}, r_1, \dots, r_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, а a_0 оставим на месте. При такой замене множество V_k примет вполне определенный вид:

$$V_k \to \mathbf{R}^{n-2k} \times \mathbf{R}_+^k \times [0,\pi]^k \times \mathbf{R}^1.$$

Найдем вид формы dG в новых координатах. Для этого выпишем n равенств, соответствующих тому, что $z_1, \dots, z_n$ являются

корнями G.

$$a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0,$$
$$\cdots,$$
$$a_0x_{n-2k}^n + a_1x_{n-2k}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{n-2k} + a_n = 0,$$
$$a_0r_1^n\cos n\alpha_1 + a_1r_1^{n-1}\cos(n-1)\alpha_1 + \cdots + a_{n-1}r_1\cos\alpha_1 + a_n = 0,$$
$$a_0r_1^n\sin n\alpha_1 + a_1r_1^{n-1}\sin(n-1)\alpha_1 + \cdots + a_{n-1}r_1\sin\alpha_1 = 0,$$
$$\cdots,$$
$$a_0r_k^n\cos n\alpha_k + a_1r_k^{n-1}\cos(n-1)\alpha_k + \cdots + a_{n-1}r_k\cos\alpha_k + a_n = 0,$$
$$a_0r_k^n\sin n\alpha_k + a_1r_k^{n-1}\sin(n-1)\alpha_k + \cdots + a_{n-1}r_k\sin\alpha_k = 0.$$

Возьмем от каждого из этих равенств полный дифференциал, после чего перенесем некоторые слагаемые в правую часть:

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_1^j da_{n-j} = -x_1^n da_n - \left[\sum_{j=1}^{n} ja_{n-j}x_1^{j-1}\right] dx_1,$$
$$\cdots,$$
$$\sum_{j=0}^{n-1} x_{n-2k}^j da_{n-j} = -x_{n-2k}^n da_n - \left[\sum_{j=1}^{n} ja_{n-j}x_{n-2k}^{k-1}\right] dx_{n-2k},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} r_1^j\cos j\alpha_1 da_{n-j} = -r_1^n\cos n\alpha_1 da_n$$
$$- \left[\sum_{j=1}^{n} ja_{n-j}r_1^{j-1}\cos j\alpha_1\right] dr_1 + r_1\left[\sum_{j=1}^{n} ja_{n-j}r_1^{j-1}\sin j\alpha_1\right] d\alpha_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} r_1^j\sin j\alpha_1 da_{n-j} = -r_1^n\sin n\alpha_1 da_n$$
$$- \left[\sum_{j=1}^{n} ja_{n-j}r_1^{j-1}\sin j\alpha_1\right] dr_1 - r_1\left[\sum_{j=1}^{n} ja_{n-j}r_1^{j-1}\cos j\alpha_1\right] d\alpha_1,$$
$$\cdots,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} r_k^j \cos j\alpha_k da_{n-j} = -r_k^n \cos n\alpha_k da_n$$
$$- \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_k^{j-1} \cos j\alpha_k\right] dr_k + r_k \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_k^{j-1} \sin j\alpha_k\right] d\alpha_k,$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} r_k^j \sin j\alpha_k da_{n-j} = -r_k^n \sin n\alpha_k da_n$$
$$- \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_k^{j-1} \sin j\alpha_k\right] dr_k - r_k \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_k^{j-1} \cos j\alpha_k\right] d\alpha_k.$$

Перемножим внешне (т.е. по правилам внешнего произведения дифференциальных форм) эти равенства между собой и с тождеством $da_n = da_n$, после чего возьмем модуль от обеих частей:

$$|\det A| da_0 \wedge \cdots \wedge da_n$$
$$= \left| \prod_{h=1}^{n-2k} \left(\sum_{j=1}^{n} j a_j x_1^{j-1}\right) \prod_{h=1}^{k} \det A_h \right|$$
$$\times dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-2k} \wedge dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_k \wedge d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_k \wedge da_n, \quad (5)$$

где через A и A_h мы обозначили следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-2k} & \dots & x_{n-2k}^{n-2} & x_{n-2k}^{n-1} \\ 1 & r_1\cos\alpha_1 & \dots & r_1^{n-2}\cos(n-2)\alpha_1 & r_1^{n-1}\cos(n-1)\alpha_1 \\ 0 & r_1\sin\alpha_1 & \dots & r_1^{n-2}\sin(n-2)\alpha_1 & r_1^{n-1}\sin(n-1)\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_k\cos\alpha_k & \dots & r_k^{n-2}\cos(n-2)\alpha_k & r_k^{n-1}\cos(n-1)\alpha_k \\ 0 & r_k\sin\alpha_k & \dots & r_k^{n-2}\sin(n-2)\alpha_k & r_k^{n-1}\sin(n-1)\alpha_k \end{pmatrix}$$

и

$$A_h = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} \cos j\alpha_h & r_h \sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} \sin j\alpha_h \\ -\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} \sin j\alpha_h & -r_h \sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} \cos j\alpha_h \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы вычислить определитель матрицы A, преобразуем ее следующим образом (не изменяя при этом определителя): для всех $j = 1, 2, \ldots, k$ к строке с номером $n - 2k + 2j$ прибавим строку с номером $n - 2k + 2j - 1$, домноженную на мнимую единицу i, после чего к строке с номером $n - 2k + 2j - 1$ прибавим строку с номером $n - 2k + 2j$, домноженную на $i/2$. Матрица A примет следующий вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-2k} & \ldots & x_{n-2k}^{n-2} & x_{n-2k}^{n-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} r_1 e^{i\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{2}\left(r_1 e^{i\alpha_1}\right)^{n-2} & \frac{1}{2}\left(r_1 e^{i\alpha_1}\right)^{n-1} \\ i & i r_1 e^{-i\alpha_1} & \ldots & i\left(r_1 e^{-i\alpha_1}\right)^{n-2} & i\left(r_1 e^{-i\alpha_1}\right)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} r_k e^{i\alpha_k} & \ldots & \frac{1}{2}\left(r_k e^{i\alpha_k}\right)^{n-2} & \frac{1}{2}\left(r_k e^{i\alpha_k}\right)^{n-1} \\ i & i r_k e^{-i\alpha_k} & \ldots & i\left(r_k e^{-i\alpha_k}\right)^{n-2} & i\left(r_k e^{-i\alpha_k}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Видно, что с точностью до множителя перед некоторыми строками, $\tilde{A}$ является матрицей Вандермонда, значит

$$\begin{aligned} |\det A| &= |\det \tilde{A}| \\ &= 2^{-k} \left|\Delta(x_1, \ldots, x_{n-2k}, r_1 e^{i\alpha_1}, r_1 e^{-i\alpha_1}, \ldots, r_k e^{i\alpha_k}, r_k e^{-i\alpha_k})\right| \end{aligned} \tag{6}$$

Определитель A_h вычисляется непосредственно:

$$\begin{aligned} &|\det A_h| \\ &= r_h \left[\left(\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} \cos j\alpha_h\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} \sin j\alpha_h\right)^2\right] \\ &= r_h \left|\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} e^{i(j-1)\alpha_h}\right| \\ &= r_h \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} e^{i(j-1)\alpha_h}\right] \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r_h^{j-1} e^{-i(j-1)\alpha_h}\right]. \end{aligned}$$

Преобразуем множитель в правой части (5) следующим образом:

$$\left|\prod_{h=1}^{n-2k}\left(\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j}\, x_h^{j-1}\right)\prod_{h=1}^{k}\det A_h\right|$$

$$= \Bigg|\prod_{h=1}^{n-2k}\left(\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j}\, x_h^{j-1}\right)\times$$
$$\prod_{h=1}^{k}\left(r_h\left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j}\, r_h^{j-1} e^{i(j-1)\alpha_h}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j}\, r_h^{j-1} e^{-i(j-1)\alpha_h}\right]\right)\Bigg|$$

$$= \Big|r_1\dots r_k G'(x_1)\dots G'(x_{n-2k})G'(r_1e^{i\alpha_1})\times$$
$$G'(r_1e^{-i\alpha_1})\dots G'(r_ke^{i\alpha_k})G'(r_ke^{-i\alpha_k})\Big|$$
$$= \left|r_1\dots r_k a_0^n \Delta^2(x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k})\right|. \tag{7}$$

Используя (6) и (7) приводим (5) к следующему виду:

$$da_0\wedge\dots\wedge da_n =$$
$$= 2^k r_1\dots r_k\left|a_0^n\Delta(x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k})\right|$$
$$\times dx_1\wedge\dots\wedge dx_{n-2k}\wedge dr_1\wedge\dots\wedge dr_k\wedge d\alpha_1\wedge\dots\wedge d\alpha_k\wedge da_n$$

Домножим обе части на $p(a_0,a_1,\dots,a_n)$, причем справа вместо $a_{n-1},a_{n-2},\dots,a_0$ мы подставим их выражения через старший коэффициент a_n и корни

$$x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k},$$

полученные из теоремы Виетта:

$$dG =$$
$$2^k r_1\dots r_k p(a_0,a_0\sigma_1(x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k}),$$
$$\dots,a_0\sigma_n(x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k}))$$
$$\times|a_0^n\Delta(x_1,\dots,x_{n-2k},r_1e^{i\alpha_1},r_1e^{-i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},r_ke^{-i\alpha_k})|$$
$$\times dx_1\wedge\dots\wedge dx_{n-2k}\wedge dr_1\wedge\dots\wedge dr_k\wedge d\alpha_1\wedge\dots\wedge d\alpha_k\wedge da_n$$

Проинтегрируем это равенство по всем полиномам G, у которых $n-2k$ вещественных и k комплексных корней в верхней полуплоскости. Так как существует $(n-2k)!$ перестановок вещественных корней и $k!$ комплексных, то при интегрировании каждый полином слева будет встречаться $k!(n-2k)!$ раз. Значит после интегрирования слева будет стоять $k!(n-2k)!P\{\eta = n-2k\}$. Справа же мы получим

$$2^k \int\limits_{\mathbf{R}^{n-2k}} dx_1 \dots dx_{n-2k} \int\limits_{\mathbf{R}_+^k} dr_1 \dots dr_k \int\limits_{[0,\pi]^k} d\alpha_1 \dots d\alpha_k \int\limits_{\mathbf{R}^1} da r_1 \dots r_k$$
$$\times p\big(a_0, a_0\sigma_1(x_1, \dots, x_{n-2k}, r_1e^{i\alpha_1}, r_1e^{-i\alpha_1}, \dots, r_ke^{i\alpha_k}, r_ke^{-i\alpha_k}\big),$$
$$\dots, a_0\sigma_n(x_1, \dots, x_{n-2k}, r_1e^{i\alpha_1}, r_1e^{-i\alpha_1}, \dots, r_ke^{i\alpha_k}, r_ke^{-i\alpha_k}))$$
$$\times|a_0^n\Delta(x_1, \dots, x_{n-2k}, r_1e^{i\alpha_1}, r_1e^{-i\alpha_1}, \dots, r_ke^{i\alpha_k}, r_ke^{-i\alpha_k})|,$$

что доказывает теорему. □

3. Среднее число корней в заданной области комплексной плоскости

Укажем еще одно применение описанного метода. Пусть Ω — область комплексной плоскости, лежащая строго выше вещественной прямой. Обозначим через η_Ω число корней полинома (2), лежащих в Ω.

Теорема 2.

$$\mathbf{E}\eta_\Omega = \int\limits_\Omega dr d\alpha \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} da_0 \dots da_{n-2} \frac{r^2}{\sin\alpha} \times$$
$$\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\left[\sum_{j=2}^n j a_{n-j} r^{j-2} \sin(j-1)\alpha\right]^2 + \left[\sum_{j=2}^n (j-2) a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha\right]^2\right)\times$$
$$p\Big(a_0, \dots, a_{n-2}, -\frac{r}{\sin\alpha}\sum_{j=2}^n a_{n-j} r^{j-2} \sin j\alpha, \frac{r^2}{\sin\alpha}\sum_{j=2}^n a_{n-j} r^{j-2} \sin(j-1)\alpha\Big) \tag{8}$$

Доказательство. Как уже было сказано, идея та же, что и в теореме 1. Снова рассматривается дифференциальная форма (4) на

пространстве полиномов $\mathbf{V}$. Пусть $G(z) = 0$, $z \in \Omega$ и в экспоненциальной форме $z = re^{i\alpha}$. Тогда мы можем написать

$$\begin{aligned} a_0 r^n \cos n\alpha + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)\alpha + \cdots + a_{n-1} r \cos\alpha + a_n = 0, \\ a_0 r^n \sin n\alpha + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)\alpha + \cdots + a_{n-1} r \sin\alpha = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Возьмем от каждого из этих равенств полный дифференциал, после чего перенесем некоторые слагаемые в правую часть:

$$\begin{aligned} r\cos\alpha da_{n-1} + da_n \\ = -\sum_{j=2}^{n} r^j \cos j\alpha da_{n-j} - \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \cos j\alpha\right] dr \\ + r\left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha\right] d\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\sin\alpha da_{n-1} \\ = -\sum_{j=2}^{n} r^j \sin j\alpha da_{n-j} - \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha\right] dr \\ - r\left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \cos j\alpha\right] d\alpha. \end{aligned}$$

Перемножим внешне эти равенства между собой и с тождеством $da_0 \wedge \cdots \wedge da_{n-2} = da_0 \wedge \cdots \wedge da_{n-2}$, после чего возьмем модуль от обеих частей:

$$\begin{aligned} r\sin\alpha da_0 \wedge \cdots \wedge da_n \\ = r\left(\left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \cos j\alpha\right]^2 \right. \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha\right]^2\right) da_0 \wedge \cdots \wedge da_{n-2} \wedge dr \wedge d\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая (9), имеем:

$$a_{n-1} = -\sin^{-1}\alpha \sum_{j=2}^{n} a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha,$$
$$a_n = \sin^{-1}\alpha \sum_{j=2}^{n} a_{n-j} r^{j} \sin(j-1)\alpha,$$

что влечет

$$\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \cos j\alpha$$
$$= \sum_{j=2}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \cos j\alpha - \operatorname{ctg}\alpha \sum_{j=2}^{n} a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha$$
$$= \sin^{-1}\alpha \sum_{j=2}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \sin(j-1)\alpha,$$

$$\sum_{j=1}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha$$
$$= \sum_{j=2}^{n} j a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha - \sum_{j=2}^{n} a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha$$
$$= \sum_{j=2}^{n} (j-1) a_{n-j} r^{j-1} \sin j\alpha.$$

Поэтому из (10) домножением на p получаем:

$$dG = \frac{r^2}{\sin\alpha} \Bigg(\sin^{-2}\alpha \Bigg[\sum_{j=2}^{n} j a_{n-j} r^{j-2} \sin(j-1)\alpha \Bigg]^2$$
$$+ \Bigg[\sum_{j=2}^{n} (j-1) a_{n-j} r^{j-2} \sin j\alpha \Bigg]^2 \Bigg) \times$$

$$\times p\biggl(a_0,\dots,a_{n-2},-\sin^{-1}\alpha\sum_{j=2}^{n}a_{n-j}r^{j-1}\sin j\alpha,$$
$$\sin^{-1}\alpha\sum_{j=2}^{n}a_{n-j}r^{j}\sin(j-1)\alpha\biggr)$$
$$\times da_0\wedge\dots\wedge da_{n-2}\wedge dr\wedge d\alpha.$$

Проинтегрируем это равенство по всем полиномам G, имеющим хотя бы один корень в Ω. При этом слева каждый полином будет считаться столько раз, сколько корней у него в Ω. Поэтому после интегрирования слева будет стоять $\mathbf{E}\eta_\Omega$. Справа же получится требуемое нам выражение. Теорема доказана.

Автор весьма признателен И. А. Ибрагимову за постановку задачи и многочисленные советы, а также за помощь в подготовке статьи к выходу в печать.

Литература

1. M. Kac, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 314–320.
2. D. Stevens D., Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 457–477.
3. P. Erdös, A. Offord, Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 139–160.
4. И. А. Ибрагимов, Н. Б. Маслова, Теория вероятностей и ее применения **16**, Но. 2 (1971), 229–248.
5. A. Edelman, E. Kostlan, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1995), 1–37.
6. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Том 2, Мир, М. (1984).
7. Л. Сантало, *Интегральная геометрия и геометрические вероятности.* Наука, М. (1983).

Zaporozhets D. N. On distribution of the number of real zeros of a random polynomial.

In this note we find the distibution of the number of real zeros of a random polynomial. Also we derive the formula for the expected number of complex zeros lying in the specified domain of the complex plain.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 декабря 2004 г.