Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

М. А. Лифшиц

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ В БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

1. Введение

1.1. Линейные и билинейные модели.

Для моделирования стационарных последовательностей данных экономического характера в эконометрике обычно используется линейная авторегрессионная модель

$$X_k = \alpha X_{k-1} + \varepsilon_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_k\}$ – последовательность независимых центрированных одинаково распределенных случайных величин, а $\alpha \in (-1, 1)$. Для нестационарного случая простейшей моделью является

$$X_k = X_{k-1} + \varepsilon_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

то есть случайное блуждание. В экономической литературе эту модель принято относить к классу "unit root models". Разумеется, она недостаточна для описания многих реальных данных и были предложены различные обобщения, в том числе несколько типов т.н. билинейных моделей (см. монографии [4, 5]). Простейшим примером нестационарной билинейной модели является

$$X_k = X_{k-1} + \varepsilon_k + bX_{k-1}\varepsilon_{k-1}, \tag{3}$$

В то время как стационарные билинейные модели изучены достаточно подробно, о поведении нестационарных моделей этого типа известно значительно меньше, чем о случайных блужданиях.

В работе [3] были рассмотрены возможности применения моделей (2) и (3) к описанию макроэкономических данных по странам с переходной экономикой (эти данные, разумеется, весьма

Работа поддержана грантами INTAS 03-51-3714, РФФИ 02-01-0065 и НШ-2258.2003.1.

нестационарны) и разработан необходимый статистический аппарат для различения моделей (2) и (3) между собой. Собранные в [3] статистические данные свидетельствуют о том, что билинейная модель (3) достаточно адекватна и заслуживает дальнейшего изучения.

Говоря языком математической статистики, при сравнении моделей (2) и (3) случайное блуждание (2) обычно принимается за нулевую гипотезу и анализ поведения статистических оценок основывается на изучении траекторий случайного блуждания. В частности, большую роль здесь играет классический принцип инвариантности Донскера–Прохорова (см. [1]). Речь в нем идет о нормированных процессах частных сумм, определяемых соотношением

$$X^{(n)}(t) = \frac{X_k}{\sqrt{n}}\ , \qquad \frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{4}$$

Принцип инвариантности утверждает, что если $\sigma^2 = \mathbb{D}\varepsilon_k < \infty$, то

$$X^{(n)}(\cdot) \Rightarrow \sigma W(\cdot), \tag{5}$$

где W – винеровский процесс, а сходимость понимается в смысле пространства Скорохода $D[0,1]$.

Разумеется, представляет интерес получение подобного результата для билинейной модели. Это, в частности, позволит изучать поведение статистических оценок не только при "нулевой гипотезе", но и при "альтернативе".

К сожалению, если коэффициент b в (3) фиксирован, то динамика модели экспоненциальна по параметру k и нет никаких шансов получить аналог (5) с полиномиальными нормировками. Однако если коэффициент b в определенном смысле мал, то все же удается получить принцип инвариантности именно с классическими нормировками, хотя и с другим предельным процессом. Этому вопросу и посвящена данная заметка.

Отметим, что со статистической точки зрения именно случай малого параметра билинейности представляет особый интерес при сравнении с линейной моделью.

2. Основные результаты

Рассмотрим схему серий с переменным коэффициентом b,

$$X_k^{(n)} = X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k + b_n X_{k-1}^{(n)} \varepsilon_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Определим процессы частнных сумм,

$$X^{(n)}(t) = \frac{X_k^{(n)}}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n}, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbb{E}\varepsilon_k^4 < \infty$ *и* $b_n := \frac{\beta}{\sqrt{n}}$, *где* $\beta > 0$ *фиксировано. Тогда*

$$X^{(n)}(\cdot) \Rightarrow Y_\beta(\cdot),$$

где предельный процесс Y_β *является решением стохастического дифференциального уравнения (СДУ)*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,Y &= \sigma(1+\beta Y)\,\mathrm{d}\,W + \beta\sigma^2\,\mathrm{d}\,t \\ Y(0) &= 0. \end{cases} \tag{6}$$

Далее выясняется, что полученное уравнение удается решить в явном виде и найти таким образом предельный диффузионный процесс.

Теорема 2.2. *Решение уравнения* (6) *может быть записано в виде*

$$Y_\beta(t) = \sigma A(t) \int\limits_0^t \frac{1+\beta^2\sigma^2 s}{A(s)}\,(\mathrm{d}\,W(s) - \beta\sigma\,\mathrm{d}\,s) + \beta\sigma^2 t\,, \tag{7}$$

где W *– винеровский процесс и* $A(t) = \exp\{\beta\sigma W(t) - \beta^2\sigma^2 t/2\}$.

3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 2.1.

Введем вспомогательную последовательность

$$Y_k^{(n)} := (1+b_n\varepsilon_k)X_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - \varepsilon_{k+1}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} Y_k^{(n)} - Y_{k-1}^{(n)} &= (1+b_n\varepsilon_k)\ X_k^{(n)} - Y_{k-1}^{(n)} \\ &= (1+b_n\varepsilon_k)\ (Y_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k) - Y_{k-1}^{(n)} \\ &= (1+b_n Y_{k-1}^{(n)})\ \varepsilon_k + b_n\,(\varepsilon_k^2 - \sigma^2) + b_n\sigma^2. \end{aligned}$$

Подставляя значение b_n, получим

$$\frac{Y_k^{(n)}}{\sqrt{n}} - \frac{Y_{k-1}^{(n)}}{\sqrt{n}} = \left(1 + \beta\ \frac{Y_{k-1}^{(n)}}{\sqrt{n}}\right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}} + \frac{\beta}{\sqrt{n}}\ \frac{\varepsilon_k^2 - \sigma^2}{\sqrt{n}} + \frac{\beta\sigma^2}{n}\ . \tag{8}$$

Теперь мы используем теорему Гихмана–Скорохода о сходимости решений разностных мартингальных уравнений к решениям СДУ (теоремы 12 и 13 §3 гл. 2 в [2]). Получим, что процессы

$$Y^{(n)}(t)=\frac{Y_k^{(n)}}{\sqrt{n}}\ ,\qquad \frac{k}{n}\leqslant t<\frac{k+1}{n},\ 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

сходится в $D[0,1]$ к решению уравнения (6). При этом первое слагаемое в (8) приводит к диффузионному члену, последнее слагаемое порождает снос, а среднее слагаемое пренебрежимо мало и не влияет на ответ. Наконец, разница между процессами $X^{(n)}$ и $Y^{(n)}$ пренебрежимо мала, и это наблюдение завершает доказательство теоремы 2.1. $\square$

3.2. Доказательство теоремы 2.2.

Прежде всего, исключим снос, введя новый процесс $Z(t)=Y(t)-\beta\sigma^2 t$. Придем к уравнению

$$\mathrm{d}\,Z=\sigma(1+\beta Y)\,\mathrm{d}\,W=\sigma(1+\beta Z+\beta^2\sigma^2 t)\ \ \mathrm{d}\,W.$$

Затем произведем шкалирование, полагая $V(t)=\sigma^{-1}Z(t)$ и $h=\beta\sigma$. Тогда уравнение примет вид

$$\mathrm{d}\,V=(1+hV+h^2t)\ \ \mathrm{d}\,W, \tag{9}$$

причем в нем остался единственный скалярный параметр h.

Согласно общему подходу к решению СДУ, следует сперва решить *однородное* уравнение

$$\mathrm{d}\,V_0=h\,V_0\ \ \mathrm{d}\,W. \tag{10}$$

Решение последнего хорошо известно, именно

$$V_0(t)=c\ \exp\{hW(t)-h^2t/2\}$$

(для проверки (10) достаточно применить формулу Ито к винеровскому процессу и функции $g(x,t)=\exp\{hx-h^2t/2\}$). Теперь будем искать решение неоднородного уравнения (9) в виде $V(t)=V_0(t)R(t)$ с начальным условием $R(0)=0$ и

$$\mathrm{d}\,R(t)=R^{(W)}(t)\,\mathrm{d}\,W(t)+R^{(T)}(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

где $R^{(W)}(t)$ и $R^{(T)}(t)$ – неизвестные гладкие функции.

Стохастическое дифференцирование дает

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\, V(t) &= V_0(t)\,\mathrm{d}\, R(t) + R(t)\,\mathrm{d}\, V_0(t) + \langle \mathrm{d}\, V_0(t), \mathrm{d}\, R(t)\rangle \\
&= V_0(t) R^{(W)}(t)\,\mathrm{d}\, W(t) + V_0(t) R^{(T)}(t)\,\mathrm{d}\, t \\
&\quad + hV_0(t)R(t)\,\mathrm{d}\, W(t) + hV_0(t)R^{(W)}(t)\,\mathrm{d}\, t \\
&= V_0(t) R^{(W)}(t)\,\mathrm{d}\, W(t) + V_0(t) R^{(T)}(t)\,\mathrm{d}\, t \\
&\quad + hV(t)\,\mathrm{d}\, W(t) + hV_0(t)R^{(W)}(t)\,\mathrm{d}\, t.
\end{aligned}
$$

Сравнивая полученное выражение с (9), приходим к системе уравнений

$$
\begin{cases}
V_0(t) R^{(W)}(t)\,\mathrm{d}\, W(t) = (1+h^2 t)\,\mathrm{d}\, W(t) \\
V_0(t) R^{(T)}(t)\,\mathrm{d}\, t + hV_0(t)R^{(W)}(t)\,\mathrm{d}\, t = 0
\end{cases},
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
R^{(W)}(t) &= \frac{1+h^2 t}{V_0(t)}\ , \\
R^{(T)}(t) &= -\ \frac{h(1+h^2 t)}{V_0(t)}\ .
\end{aligned}
$$

Таким образом, найдено следующее представление

$$
\begin{aligned}
R(t) = \int_0^t \mathrm{d}\, R(s) &= \int_0^t \Big(R^{(W)}(s)\,\mathrm{d}\, W(s) + R^{(T)}(s)\,\mathrm{d}\, s \Big) \\
&= \int_0^t \frac{1+h^2 s}{V_0(s)} \left(\mathrm{d}\, W(s) - h\,\mathrm{d}\, s\right)\ .
\end{aligned}
$$

Обратная подстановка дает

$$
\begin{aligned}
V(t) &= V_0(t) R(t) \\
&= \exp\left\{hW(t) - h^2 t/2\right\}\ \int_0^t \frac{1+h^2 s}{\exp\{hW(s) - h^2 s/2\}} \left(\mathrm{d}\, W(s) - h\,\mathrm{d}\, s\right) \\
&= A(t) \int_0^t \frac{1+h^2 s}{A(s)} \left(\mathrm{d}\, W(s) - h\,\mathrm{d}\, s\right)\ ,
\end{aligned}
$$

где $A(t) = \exp\left\{hW(t) - h^2t/2\right\}$. Окончательное решение принимает вид

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sigma V(t) + \beta\sigma^2 t \\ &= \sigma\ A(t)\ \int\limits_0^t \frac{1+h^2 s}{A(s)}\,(\mathrm{d}\,W(s) - h\,\mathrm{d}\,s) + \beta\sigma^2 t\ , \end{aligned}$$

как и утверждается в (7). □

4. Некоторые следствия

4.1. Поведение моментов предельного процесса.

Рассмотрим поведение двух первых моментов предельного процесса $Y(t) = Y_\beta(t)$.

Для первого момента $M_1(t) = \mathbb{E}Y(t)$ ответ очевиден. Из уравнения (6) следует, что $M_1'(t) = \beta\sigma^2$, откуда

$$M_1(t) = \beta\sigma^2 t.$$

Для нахождения второго момента $M_2(t) = \mathbb{E}Y^2(t)$ запишем стохастический дифференциал

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(Y^2(t)) &= 2Y(t)\,\mathrm{d}\,t + \langle \mathrm{d}\,Y(t), \mathrm{d}\,Y(t)\rangle \\ &= 2Y(t)\left[\sigma(1+\beta Y(t))\,\mathrm{d}\,W(t) + \beta\sigma^2\,\mathrm{d}\,t\right] + \sigma^2(1+\beta Y(t))^2\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,M_2(t) &= \mathrm{d}\,\mathbb{E}\ (Y^2(t)) = \mathbb{E}\,\mathrm{d}(Y^2(t)) \\ &= 2\beta\sigma^2\ \mathbb{E}Y(t)\,\mathrm{d}\,t + \sigma^2\mathbb{E}(1+\beta Y(t))^2\,\mathrm{d}\,t \\ &= 2\beta\sigma^2\ \mathbb{E}Y(t)\,\mathrm{d}\,t + \sigma^2\,\mathrm{d}\,t + 2\beta\sigma^2\mathbb{E}Y(t)\,\mathrm{d}\,t + \beta^2\sigma^2\mathbb{E}(Y^2(t))\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left(4\beta^2\sigma^4 t + \sigma^2\right)\mathrm{d}\,t + \beta^2\sigma^2 M_2(t)\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

Решая возникшее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} M_2'(t) = \beta^2\sigma^2 M_2(t) + 4\beta^2\sigma^4 t + \sigma^2 \\ M_2(0) = 0 \end{cases},$$

найдем

$$M_2(t) = \frac{5(\exp\{\beta^2\sigma^2 t\} - 1)}{\beta^2} - 4\beta^2\sigma^4 t.$$

Замечание. К таким же выражениям можно прийти предельным переходом от явных формул для моментов допредельных последовательностей $X_k^{(n)}$, найденных в [3].

4.2. Статистические оценки.

В работе [3] рассматривалась задача проверки присутствия билинейности, т.е. различения моделей (2) и (3). Для этого использовалась статистика стьюдентовского типа

$$T_n = \frac{\sqrt{n}\ J_n}{\hat{\sigma}\ \sqrt{I_n}},$$

где $\hat{\sigma}$ некоторая состоятельная оценка параметра σ, а агрегаты I_n, J_n определяются по разностям $\Delta X_k^{(n)} = X_k^{(n)} - X_{k-1}^{(n)}$ с помощью формул

$$I_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k \leqslant n} [\Delta X_k^{(n)}]^2 [X_k^{(n)}]^2$$

и

$$J_n := \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k \leqslant n} \Delta X_k^{(n)} \Delta X_{k-1}^{(n)} X_{k-1}^{(n)}.$$

В условиях "нулевой гипотезы" (2) и предположениях $\mathbb{E}\varepsilon_k^3 = 0, \mathbb{E}\varepsilon_k^6 < \infty$ было показано, что

$$T_n \ \Rightarrow\ \frac{\int_0^1 W_1(t)\,\mathrm{d}\,W_2(t)}{\left[\int_0^1 W_1^2(t)\,\mathrm{d}\,t\right]^{1/2}}, \qquad n \to \infty,$$

где W_1, W_2 – два независимых винеровских процесса. Несмотря на громоздкую запись, легко видеть, что предельная случайная величина имеет стандартное нормальное распределение.

Представляет интерес предельное поведение этих агрегатов и в нашем случае, т.е. "при альтернативах, близких к нулевой гипотезе".

В духе теоремы 2.1 нетрудно (хотя вычисления и получаются достаточно громоздкими) доказать, что при выполнении ее условий и моментных предположениях $\mathbb{E}\varepsilon_k^3 = 0, \mathbb{E}\varepsilon_k^{10} < \infty$ верно

$$I_n \ \Rightarrow\ \sigma^2 \int_0^1 \left(Y_\beta^2(t) + \beta^2 Y_\beta^4(t)\right) \mathrm{d}\,t, \qquad n \to \infty$$

и

$$J_n \Rightarrow \beta\sigma^2 \int\limits_0^1 Y_\beta^2(t)\,\mathrm{d}\,t, \qquad n \to \infty,$$

причем сходится и совместное распределение (I_n, J_n). Отсюда следует, что статистика T_n имеет при рассматриваемых нами альтернативах порядок роста $\sqrt{n}$ и соответствующее нетривиальное предельное распределение:

$$n^{-1/2}\, T_n \;\Rightarrow\; \frac{\beta \int_0^1 Y_\beta^2(t)\,\mathrm{d}\,t}{\left[\int_0^1 \left(Y_\beta^2(t) + \beta^2 Y_\beta^4(t)\right)\mathrm{d}\,t\right]^{1/2}}\,, \qquad n \to \infty.$$

В заключение автор выражает большую признательность В. Харемзе (W. Charemza) и С. Б. Макаровой за полезные обсуждения предмета данной статьи.

Литература

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, Москва (1977).
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов.* т.3, Наука, Москва (1975).
3. W. W. Charemza, M. A. Lifshits, S. B. Makarova, *Conditional testing for unit-root bilinearity in financial time series: some theoretical and empirical results.* — J. Econ. Dynamics and Control **29**, 1–2 (2004), 63–96.
4. T. Subba Rao, M. M. Gabr, *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models.* Ser.: Lecture Notes in Staistics. **24**, Springer, New York (1979).
5. G. Terdik, *Bilinear Stochastic Models and Related Problems of Non-linear Time Series Analysis.* Ser.: Lecture Notes in Staistics. **142**, Springer, New York (1999).

Lifshits M. A. Invariance principle in a bilinear model with weak nonlinearity.

We consider a series of bilinear sequences

$$X_k^{(n)} = X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k + b_n X_{k-1}^{(n)} \varepsilon_{k-1}, \qquad k \geqslant 1,$$

with i.i.d. sequence ε_k, small bilinearity coefficients $b_n = \beta n^{-1/2}$ and show that the processes obtained from $X_k^{(n)}$ by usual scaling in time and space converge to a diffusion process Y_β. We provide an explicit form of Y_β, investigate the moments of Y_β and study the limit behavior of some other quantities related to $X_k^{(n)}$ and important for statistical applications.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 19 ноября 2004 г.