Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

Я. Ю. Никитин[1], **Э. Орсингер**

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ПРОЦЕССОВ СЛЕПЯНА И ВАТСОНА В ГИЛЬБЕРТОВОЙ НОРМЕ

Задаче об асимптотике вероятностей малых уклонений L_2-нормы гауссовских процессов за последние годы было уделено много внимания. Историю вопроса можно найти в обзорах [17] и [16]. Как правило, речь шла о логарифмической асимптотике, и лишь в последнее время для некоторых классов процессов, например, для многократно проинтегрированных броуновского движения и процесса Орнстейна-Уленбека, удалось найти точную асимптотику вплоть до константы [7, 18, 1, 12, 11, 10, 2]. В настоящей работе мы вычислим точную асимптотику вероятностей малых уклонений в гильбертовой норме для двух важных конкретных процессов. Первый из них – это процесс Слепяна X на $[0,1]$, то есть стационарный центрированный гауссовский процесс с корреляционной функцией

$$C_X(s,t) = \begin{cases} 1-|s-t|, & |s-t| \le 1 \\ 0, & |s-t| > 1. \end{cases}$$

Впервые этот процесс изучался в [21] и [20]. Он появляется во многих теоретических и прикладных вероятностных моделях, см., например, [4, 13, 19, 5, 14]. Мы ограничимся простейшей формой процесса Слепяна, хотя возможны его обобщения. Заметим, что по распределению $X(t) = W(t+1) - W(t)$, где W – процесс броуновского движения.

Второй процесс – это процесс Ватсона, то есть стационарный центрированный гауссовский процесс Y с корреляционной функцией

$$C_Y(t,s) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2}|t-s| + \frac{1}{2}(t-s)^2.$$

[1] Поддержано грантами РФФИ 04-01-00716, 02-01-01099 и грантом НШ-2258.2003.01.

Этот процесс был впервые рассмотрен Ватсоном [22] в задачах непараметрической проверки гипотез. Известно, что процесс $Y(t)$ на $[0,1]$ совпадает по распределению с процессом $B(t)-\int_0^1 B(s)ds$, где B – стандартный броуновский мост.

Для случайного процесса Z положим $||Z|| = \left(\int\limits_0^1 Z^2(t)dt\right)^{1/2}$ и рассмотрим $P(||Z|| \le \varepsilon)$. Нас интересует точная асимптотика при $\varepsilon \to 0$ этой вероятности для рассмотренных выше процессов. Основной результат этой заметки формулируется так.

Теорема 1. *При $\varepsilon \to 0$ справедливы соотношения*

$$P(||X|| \le \varepsilon) \sim 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varepsilon^2 \exp(-\frac{1}{4}\varepsilon^{-2});$$

$$P(||Y|| \le \varepsilon) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varepsilon^{-2} \exp(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}).$$

Доказательство. В силу классического разложения Карунена-Лоэва для процесса X имеет место равенство по распределению (см., например, [6, 8])

$$||X||^2 = \int\limits_0^1 X^2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2, \qquad (1)$$

где ξ_n, $n \ge 1$, стандартные независимые гауссовские с.в., а $\lambda_n > 0$, $n \ge 1$, $\sum\limits_n \lambda_n < \infty$ являются собственными значениями интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int\limits_0^1 C_X(s,t) f(s)ds, \quad 0 \le t \le 1. \qquad (2)$$

В последние годы задача о малых уклонениях в L_2 была хорошо изучена, так что информацию об асимптотическом поведении λ_n при $n \to \infty$ удается использовать для получения асимптотики вероятностей малых уклонений. Поэтому в первую очередь следует найти и исследовать спектр уравнения (2).

Пусть $t \in [0,1]$. Уравнение (2) можно записать в виде

$$\lambda f(t) = \int\limits_0^t (1+s-t)f(s)ds + \int\limits_t^1 (1-s+t)f(s)ds.$$

После двукратного дифференцирования приходим к уравнению

$$-\lambda f''(t) = 2f(t)$$

при краевых условиях

$$f'(0) - f(0) = f(1), \qquad f'(0) + f'(1) = 0. \tag{3}$$

Отметим, что краевые условия являются неразделенными, что не позволяет сразу применить результаты из [1] и [18]. Обозначим для простоты $\mu = (2/\lambda)^{1/2}$. Тогда надо решить уравнение

$$f''(t) + \mu^2 f(t) = 0$$

при краевых условиях (3). Общее решение этого уравнения имеет вид $f(t) = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t$. Подставляя его в краевые условия, приходим после преобразований к следующему уравнению для определения собственных значений:

$$\cos\frac{\mu}{2}\left(2\cos\frac{\mu}{2} - \mu\sin\frac{\mu}{2}\right) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет две серии корней. Первая из них – это корни вида $\mu_k = (2k-1)\pi$, $k \geq 1$, которые соответствуют собственным числам $\lambda_k = (2\pi^2(k-1/2)^2)^{-1}$, $k \geq 1$.

Вторая серия – это корни μ_n^* трансцендентного уравнения

$$\tan\frac{\mu}{2} = \frac{2}{\mu},\ \mu > 0. \tag{5}$$

При больших μ правая часть (5) мала, и корни μ_n^* при больших n должны иметь вид

$$\mu_n^* = 2(\pi n + y_n), \tag{6}$$

где $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Подставляя представление (6) в уравнение (5), убеждаемся в том что $y_n = O(n^{-1})$, $n \to \infty$. Следовательно, большие корни уравнения (6) имеют вид $\mu_n^* = 2\pi n + O(n^{-1})$, так что вторая серия собственных чисел λ_n^* асимптотически ведет себя так:

$$\lambda_n^* = (2\pi^2 n^2)^{-1}(1 + O(n^{-2})),\ n \to \infty. \tag{7}$$

Имея в виду точную асимптотику в нашей задаче, полезно выписать численные значения первых корней второй серии. Вычисления показывают, что с точностью до четырех знаков $\mu_0^* =$

$1.7207, \mu_1^* = 6.8512, \mu_2^* = 12.8746, \mu_3^* = 19.0587, \mu_4^* = 25.2906, \ldots$ Это говорит о том, что разумно рассмотреть приближенную последовательность μ_n' корней (5) в виде $\mu_0' = \sqrt{2}, \mu_1' = 2\pi, \mu_2' = 4\pi, \ldots$ и в общем случае $\mu_n' = 2\pi n, n \geq 1$. Ей отвечает приближенная последовательность собственных чисел $\lambda_0' = 1, \lambda_n' = (2\pi^2 n^2)^{-1}, n \geq 1$.

В силу (1) можно записать точное представление для $||X||^2$ в виде равенства по распределению

$$||X||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^* \eta_n^2 + \lambda_0^* \eta_0^2, \tag{8}$$

где $\{\xi_k\}_1^\infty$ и $\{\eta_n\}_0^\infty$ – две независимые последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин. Наряду с (8) рассмотрим приближенное представление $||X||^2$ в виде бесконечной квадратичной формы, разбитой на части

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n' \eta_n^2 + \eta_0^2 \equiv Q_1 + Q_2 + \eta_0^2.$$

По теореме сравнения Ли [15], см. также [10], мы вправе написать

$$P(||X||^2 \leq \varepsilon^2) \sim C_{\text{dist}} P(Q \leq \varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,$$

где

$$C_{\text{dist}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0^*}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n'}{\lambda_n^*} \right)^{1/2} = \frac{\mu_0^*}{\sqrt{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_n^*}{2\pi n} \right). \tag{9}$$

Бесконечное произведение сходится ввиду соотношения (7).

Константу “расхождения” (9) мы вычислим позже, а пока перейдем к вычислению асимптотики $P(Q \leq \varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого используем следующее утверждение, принадлежащее М. А. Лифшицу,которое мы приведем без доказательства.

Теорема 2. *Пусть $V_1, V_2 > 0$ две независимые случайные величины с известным поведением малых уклонений, а именно*

$$P(V_1 \leq r) \sim c_1 r^{a_1} \exp(-b_1 r^{-d})$$

и

$$P(V_2 \leq r) \sim c_2 r^{a_2} \exp(-b_2 r^{-d}),$$

при $r \to 0$. Тогда справедлива следующая асимптотика малых уклонений для их суммы:

$$P(V_1+V_2\le r)\sim Kr^{a_1+a_2-d/2}\exp(-S^{d+1}r^{-d}),$$

$$S=b_1^{1/(d+1)}+b_2^{1/(d+1)},$$

$$K=c_1c_2\sqrt{\frac{2\pi d}{d+1}}S^{d/2-1/2-a_1-a_2}b_1^{(2a_1+1)/2(d+1)}b_2^{(2a_2+1)/2(d+1)}.$$

Заметим, что по распределению $Q_1=\frac{1}{2}||W||^2$, где W—стандартный винеровский процесс, для которого точная асимптотика вероятностей малых уклонений в L_2 хорошо известна [15, 16, 17]. Поэтому

$$P\{Q_1\le r\}\sim\frac{2^{5/2}}{\sqrt{\pi}}\cdot r^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{16}r^{-1}\right),\ r\to 0. \qquad (10)$$

Асимптотику вероятностей малых уклонений формы

$$Q_2=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2/(2\pi^2n^2)$$

также легко найти, поскольку по распределению $Q_2=\frac{1}{2}||B||^2$, где B—стандартный броуновский мост, см.,например, [15, 17] или [18]. Справедливо соотношение

$$P\left\{Q_2\le r\right\}\sim\frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{16}r^{-1}\right),\ r\to 0. \qquad (11)$$

Теперь вычислим асимптотику вероятностей малых уклонений для $Q_2+\eta_0^2$. Ясно, что при $r\to 0$

$$P(\eta_0^2\le r)=P(-\sqrt{r}\le\eta_0\le\sqrt{r})=2\Phi(\sqrt{r})-1\sim(\sqrt{2\pi r})^{-1}.$$

Поэтому

$$P(\eta_0^2+Q_2\le r)=\frac{2}{\pi}\int_0^r\exp\left(-\frac{1}{16}(r-x)^{-1}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

При малых r подынтегральное выражение близко к нулю, и его точка максимума имеет порядок $O(r^2)$, так что мы можем линеаризовать функцию в экспоненте в окрестности нуля, заменяя ее посредством $-1/(16r)-x/(16r^2)$ с пренебрежимой ошибкой. Но

$$\int_0^r \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{x}{16r^2}\right)\, dx \sim 4\sqrt{\pi}\, r\,, \quad r \to 0.$$

Следовательно

$$P(\eta_0^2 + Q_2 \le r) = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\, r \exp\left(-\frac{1}{16r}\right), \quad r \to 0. \tag{12}$$

Теперь объединим (10) и (12) с помощью теоремы 2, полагая в ней $d = 1, b_1 = b_2 = 1/16, a_1 = 1/2, a_2 = 1, c_1 = 2^{5/2}/\sqrt{\pi}, c_2 = 8/\sqrt{\pi}$. Получаем

$$P(\eta_0^2 + Q_1 + Q_2 \le r) = C_{\mathrm{dist}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}}\; r \exp(-\frac{1}{4r}),\ r \to 0.$$

Остается вычислить константу C_{dist}. Ее вычисление проводится с помощью комплексного анализа, как это было впервые продемонстрировано в [1], см. также [12].

Пусть $f(z), f(0) \ne 0$ – аналитическая функция в круге $|z| < R$ и пусть модули ее нулей $r_1, r_2, \ldots$ в этом круге расположены в неубывающем порядке. Применим теорему Иенсена, см., например, [3], раздел 3.6.1. Тогда при $r_n \le r \le r_{n+1}$

$$\log \frac{r^n |f(0)|}{r_1 \ldots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Отсюда для двух функций f и g с модулями нулей $r_1, r_2, \ldots$ и $s_1, s_2, \ldots$ соответственно имеем

$$\log \frac{|f(0)| s_1 \ldots s_n}{|g(0)| r_1 \ldots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|f(re^{i\vartheta})|}{|g(re^{i\vartheta})|} d\vartheta$$

или эквивалентным образом

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{s_n} = \left|\frac{f(0)}{g(0)}\right| \lim_{r\to\infty} \exp\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|g(re^{i\vartheta})|}{|f(re^{i\vartheta})|} d\vartheta\,\}. \tag{13}$$

У нас при вычислении (9) первые нули r_j порождаются функцией

$$f(z) = z\sin(z/2) - 2\cos(z/2),\ f(0) = -2,$$

а вторые нули s_k – функцией

$$g(z) = (z^2 - 2)\sin(z/2)/z,\ g(0) = -1.$$

Тогда $|f(0)/g(0)| = 2$, а предел в правой части (13) при таких f и g равен единице.

Поскольку наши функции четные и их нули засчитываются дважды, то мы фактически вычислили квадрат бесконечного произведения отношения вещественных нулей. Отсюда следует, что $C_{\mathrm{dist}} = \sqrt{2}$. Окончательно получаем

$$P(||X||^2 \le r) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, r \exp(-\frac{1}{4r}),\ r \to 0,$$

что эквивалентно первому утверждению теоремы 1.

При изучении процесса Y Ватсон [22] обнаружил, что собственные числа ядра C_Y двукратны и имеют вид $\lambda_n = (2\pi n)^{-2}$, $n \ge 1$. Это значит, что вероятности малых уклонений надо искать для суммы двух независимых форм $Q_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2/(4\pi^2 i^2)$ и $Q_4 = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2/(4\pi^2 j^2)$, где, как и выше, $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_j\}$ – независимые стандартные гауссовские величины. Опираясь на формулу (11), получаем

$$P(Q_3 \le \varepsilon^2) \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-(1/32)\varepsilon^{-2}),\ \varepsilon \to 0.$$

Теперь надо соединить две такие асимптотики по теореме 2. Применяя ее с $d = 1, b_1 = b_2 = 1/32, a_1 = a_2 = 0, c_1 = c_2 = 2\sqrt{2}\pi^{-1/2}$, находим, что справедливо и второе утверждение теоремы 1.

В заключение авторы выражают благодарность А. И. Назарову за ряд полезных советов.

Литература

1. А. И. Назаров, *О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов.* — Нелинейные уравнения и математический анализ (Проблемы матем. анализа, вып. 26). Новосибирск, Т.Рожковская (2003), 179–214.

2. Я. Ю. Никитин, П. А. Харинский, *Точная асимптотика малых уклонений в L_2–норме для одного класса гауссовских процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 214–221.
3. Е. Титчмарш, *Теория функций.* Наука, М. (1980).
4. А. М. Яглом, *Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии.* Гидрометеоиздат, Л. (1981).
5. J. Abrahams, *Ramp crossings for Slepian's process.* — IEEE Trans. Inform. Theory **30**, N 3 (1984), 574–575.
6. R. Adler, *An introduction to continuity, extrema and related topics for general Gaussian processes. IMS Lecture Notes – Monograph Series* 12. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California (1990).
7. L. Beghin, Y. Y. Nikitin, E. Orsingher, *Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L^2-norm.* — Zap. nauqn. semin. POMI **298**, (2003), 5–21.
8. P. Deheuvels, G. Martynov, *Karhunen-Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions.* — Progress in Probab., Birkhäuser **55** (2003), 57–93.
9. T. Dunker, M. A.Lifshits, W. Linde, *Small deviations of sums of independent variables*, in: Proc. Conf. High Dimensional Probability. Ser. Progress in Probability (Birkhäuser, Vol.43) (1998), 59–74.
10. F. Gao, J. Hannig, T.-Y. Lee, F. Torcaso, *Comparison theorems for small deviations of random series.* — J. of Theor. Prob. **17**, No. 2 (2004), 503–520.
11. F. Gao, J. Hannig, F. Torcaso, *Integrated Brownian motions and Exact L_2-small balls.* — Ann. Prob. **31** (2003), 1320–1337.
12. F. Gao, J. Hannig, T.-Y. Lee, F. Torcaso, *Laplace transforms via Hadamard Factorization with applications to Small Ball probabilities.* — Electr. J. Prob., **8**, No. 13 (2003), 1–20.
13. B. Jamison, *Reciprocal processes: the stationary Gaussian case.* — Ann. Math. Stat. **41**, No. 5 (1970), 1624–1630.
14. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootz'en, *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer-Verlag (1986).
15. W. V. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms.* — Journ. Theor. Prob. **5** (1992), 1–31.
16. Cxao W. V. Li, Q. M. Shao, *Gaussian processes: Inequalities, Small Ball Probabilities and Applications.* In: Stochastic Processes: Theory and Methods, Handbook of Statistics, Vol.19, 2001, C. R. Rao and D.Shanbhag (Eds), 533–597.
17. M. A. Lifshits, Asymptotic behavior of small ball probabilities. In: Prob. Theory and Math. Stat., B.Grigelionis et al. (Eds) (1999), VSP/TEV, 453–468.
18. A. I.Nazarov, Ya. Yu. Nikitin, *Exact small ball behavior of integrated Gaussian processes under L^2-norm and spectral asymptotics of boundary value problems.* — Probab. Theory and Rel. Fields, **129**, No. 4 (2004), 469–494.
19. E. Orsingher, *On the maximum of Gaussian Fourier series emerging in the analysis of random vibrations.* — J. Appl. Prob. **26**, No. 1 (1989), 182–188.
20. L. A. Shepp, *First passage time for a particular Gaussian process.* — Ann. Math. Stat. **42** (1971), 946–951.
21. D. Slepian, *First passage time for a particular Gaussian process.* — Ann. Math. Stat. **32** (1961), 610–612.

22. G. S. Watson, *Goodness-of-fit tests on a circle.* — Biometrika **48** (1961), 109–114.

Nikitin Ya. Yu., Orsingher E. Sharp small ball asymptotics for Slepian and Watson processes in Hilbert norm.

We find the exact asymptotic behavior of small ball probabilities in Hilbert norm for the simplest form of Slepian process and for the Watson process appearing in nonparametric Statistics.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 ноября 2004 г.