Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

Л. В. Розовский

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Результаты

Пусть неотрицательная случайная величина Z принимает значения с положительной, не равной единице, вероятностью в любой окрестности нуля.

Для $u \geqslant 0$ положим

$$\Lambda(u) = \mathbf{E}\, e^{-uZ}, \quad m(u) = -\left(\log \Lambda(u)\right)', \quad \sigma^2(u) = \left(\log \Lambda(u)\right)'', \qquad Q(u) = -u\, m(u) - \log \Lambda(u). \tag{1.1}$$

Напоминаем, что

$$m(u) = \mathbf{E}\, Z(u), \quad 0 < \sigma^2(u) = \mathbf{Var}\, Z(u), \tag{1.2}$$

где случайная величина $Z(u) \geqslant 0$ имеет распределение, сопряженное по отношению к Z, т.е.

$$\mathbf{P}\left(Z(u) \leqslant r\right) = \int_0^r e^{-uy} d\, \mathbf{P}\left(Z \leqslant y\right)/\Lambda(u), \;\; r \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Заметим (см.[1, лемма 2.1]), что функция $m(u)$ монотонно убывает, а функция $Q(u)$ монотонно возрастает на $(0, \infty)$, причем

$$m(0) = \mathbf{E}\, Z \leqslant \infty, \;\; m(\infty) = 0, \;\; Q(0) = 0, \;\; Q(\infty) = -\log \mathbf{P}\left(Z = 0\right). \tag{1.4}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При всех r, $0 < r \leqslant \mathbf{E}\, Z$,*

$$e^{-Q(h)} \geqslant \mathbf{P}\left(Z \leqslant r\right) \geqslant \tfrac{1}{2} e^{-2a\left(1+\sqrt{1+2Q(h)/a}\right)}\, e^{-Q(h)}, \tag{1.5}$$

Работа над статьей была поддержана грантом Мин.Образования No. E02-1.0-219, грантом РФФИ No. 02-01-01099 и грантом НШ No. 2258.2003.1.

где $a = \sup_{u>0} \frac{u^2\sigma^2(u)}{Q(u)}$ *и* h *является единственным решением уравнения*

$$m(h) = r. \tag{1.6}$$

Замечание 1. Положим $\rho(r) = \sup\limits_{u\geqslant 0}(-ur - \log\Lambda(u))$. Поскольку $\rho(r) = Q(h)$, если имеет место равенство (1.6) и $0 < r \leqslant \mathbf{E}\, Z < \infty$, $\rho(0) = Q(\infty)$, а $\rho(r)$ равно $+\infty$ при $r < 0$ и 0, когда $r > \mathbf{E}\, Z$, с помощью леммы 1 получим уже при всех r:

$$e^{-\rho(r)} \geqslant \mathbf{P}\,(Z \leqslant r) \geqslant \tfrac{1}{2} e^{-2a\,(1+\sqrt{1+2\rho(r)/a})}\ e^{-\rho(r)}.$$

Из (1.5) (при $a \neq \infty$) следует, что величины $\mathbf{P}\,(Z \leqslant r)$ и $1/Q(h)$ малы одновременно и, кроме того, если $Q(h)$ неограниченно растет, то $\log \mathbf{P}\,(Z \leqslant r)$ *приблизительно* равен $-Q(h)$. Другими словами, лемма 1 позволяет при некоторых дополнительных предположениях найти асимптотику логарифма вероятности $\mathbf{P}\,\big(Z \leqslant r\big)$. Следующий результат является хорошей основой для исследования асимптотического поведения самой вероятности.

Пусть (см.(1.2)) $Z_0(u) = \frac{Z(u) - \mathbf{E}\, Z(u)}{\sqrt{\mathbf{Var}\, Z(u)}}$, $u > 0$. Положим

$$\delta_\varepsilon(u) = \int\limits_0^{1/\varepsilon} |\,\mathbf{E}\, e^{itZ_0(u)} - e^{-t^2/2}|\, dt \ (\varepsilon > 0). \tag{1.7}$$

Лемма 2. *При любых положительных* r, h, s *и* ε

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\,(r - s < Z \leqslant r)\\ &= \Lambda(h) e^{h\,r}\, \frac{1 - e^{-h\,s}}{\tau\sqrt{2\pi}}\ \Big(e^{-\beta^2/2} + \theta\,(\beta\, e^{-\beta^2/2}/\tau + 1/\tau^2 + \rho_\varepsilon(h,s))\Big),\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $|\theta|$ *не превосходит некоторую абсолютную постоянную,*

$$\tau = h\,\sigma(h),\ \beta = \frac{r - m(h)}{\sigma(h)},\ \rho_\varepsilon(h,s) = \delta_\varepsilon(h) + (1 + \delta_\varepsilon(h))(1 + \tfrac{1}{h\,s})\,\tau\varepsilon. \tag{1.9}$$

В частности, если $r = m(h)$, *то* $\beta = 0$ *и*

$$\mathbf{P}\,(r - s < Z \leqslant r) = e^{-Q(h)}\, \frac{1 - e^{-h\,s}}{\tau\sqrt{2\pi}}\ \big(1 + \theta\,(1/\tau^2 + \rho_\varepsilon(h,s)\big)\,, \tag{1.10}$$

Отметим, что из (1.8) помимо (1.10) следует, что при r, $0 < r < \mathbf{E}\, Z$, h, удовлетворяющем (1.6), и любом δ

$$\mathbf{P}\,(Z \leqslant r + \delta/h)$$
$$= e^{-Q(h)}\,\frac{e^{\delta}}{\tau\sqrt{2\pi}}\,\left(e^{-\delta^2/2\tau^2} + \theta(1 + \delta e^{-\delta^2/2\tau^2})/\tau^2 + \rho_\varepsilon(h,\infty)\right). \tag{1.11}$$

Замечание 2. Если $\delta_0(h) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \delta_\varepsilon(h) < \infty$, то из (1.8) при всех положительных s вытекает равенство

$$\mathbf{P}\,(r - s < Z \leqslant r)$$
$$= \Lambda(h) e^{h\,r}\,\frac{1 - e^{-h\,s}}{\tau\sqrt{2\pi}}\,\left(e^{-\beta^2/2} + \theta\,(\beta\, e^{-\beta^2/2}/\tau + 1/\tau^2 + \delta_0(h))\right), \tag{1.12}$$

(и аналогичные следствия из (1.10), (1.11)), В частности,

$$\frac{d\,\mathbf{P}\,(Z \leqslant r)}{dr} = \Lambda(h) e^{h\,r}\,\frac{h}{\tau\sqrt{2\pi}}\,\left(e^{-\beta^2/2} + \theta\,(\beta\, e^{-\beta^2/2}/\tau + 1/\tau^2 + \delta_0(h))\right)$$

т.е. лемма 2 позволяет исследовать вероятности малых уклонений также в локальной постановке.

Далее покажем, что функция $e^{-Q(h)}/\tau\sqrt{2\pi}$, из равенства (1.10) может не вполне удовлетворительно приближать вероятность $\mathbf{P}\,(Z \leqslant r)$, если величина $\tau = h\,\sigma(h)$ ограничена.

Пусть независимые случайные величины Z_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеют функции распределения $F_j(x)$ такие, что

$$F_j(x) = l_j(x)\, x^{\alpha_j}, \ \ x \searrow 0, \tag{1.13}$$

где α_j – некоторые положительные числа, а $l_j(x)$ – медленно меняющиеся при $x \searrow 0$ функции. Тогда при фиксированном n

$$P_n(r) = \mathbf{P}\,(Z_1 + \cdots + Z_n \leqslant r) \sim k_n \prod_{j=1}^{n} F_j(r), \ \ r \searrow 0, \tag{1.14}$$

где $k_n = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 + \alpha_j)/\Gamma(1 + \alpha)$, $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. (Соотношение (1.14), используя свойства медленно меняющихся функций, можно доказать индукцией).

С другой стороны, если $Z = Z_1 + \cdots + Z_n$, то(см.(1.1)),

$$\Lambda(u) = \prod_{j=1}^{n} \Lambda_j(u), \quad m(u) = \sum_{j=1}^{n} m_j(u), \quad \sigma^2(u) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2(u), \qquad Q(u) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(u), \tag{1.15}$$

где

$$\Lambda_j(u) = \mathbf{E}\, e^{-uZ_j}, \quad m_j(u) = -\left(\log \Lambda_j(u)\right)', \quad \sigma_j^2(u) = \left(\log \Lambda_j(u)\right)'', \qquad Q_j(u) = -u\, m_j(u) - \log \Lambda_j(u).$$

Если выполнено условие (1.13), то

$$\Lambda_j(u) \sim \Gamma(1+\alpha_j)\, F_j(1/u), \quad m_j(u) \sim \alpha_j/u, \quad \sigma_j^2(u) \sim \alpha_j/u^2, \; u \to \infty, \tag{1.16}$$

и, следовательно,

$$u\, m(u) \to \alpha, \quad u^2 \sigma^2(u) \to \alpha, \; u \to \infty.$$

Принимая во внимание (1.15), (1.16),а также вытекающее из (1.6) соотношение $h \sim \alpha/r, \; r \searrow 0$, найдем

$$e^{-Q(h)}/(h\sigma(h)\sqrt{2\pi}) = e^{hr} \prod_{j=1}^{n} \Lambda_j(h)/(h\sigma(h)\sqrt{2\pi}) \sim \omega_\alpha\, P_n(r) \; r \searrow 0.$$

Здесь $\omega_\alpha = \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\sqrt{2\pi\alpha}} > 1$ при любом конечном $\alpha > 0$ (и $\omega_\alpha \to 1, \; \alpha \to \infty$). Таким образом, главный член в правой части (1.10) и асимптотика из (1.14) действительно различны.

В заключение приведем один пример использования соотношения (1.12).

Пусть $\{X\}$ является центрированным гауссовским вектором, принимающим значения в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда $X = \sum \lambda_j^{1/2} \xi_j\, e_j$, где $\{e_j\}$ – некоторый ортогональный базис из H, $\{\lambda_j\}$ – последовательность неотрицательных невозрастающих чисел, ряд, составленный из которых сходится, а ξ_j – независимые стандартные нормальные случайные величины.

Пусть $a = \sum \alpha_j\, e_j \in H$, $\sum \alpha_j^2 < \infty$ и $r > 0$. Нас интересуют оценки для вероятностей $\mathbf{P}\,(r - s < Z \leqslant r)$, где $Z = ||X - a||^2 = \sum (\lambda_j^{1/2} \xi_j - \alpha_j)^2$.

Для $\gamma > 0$ положим (см.[2])

$$\Lambda(\gamma) = \mathbf{E}\exp(-\gamma Z) = \prod (1+2\gamma\lambda_j)^{-1/2}\exp(-\gamma\,\alpha_j^2/(1+2\gamma\lambda_j)),$$

$$m(\gamma) = \sum_j \left(\frac{\lambda_j}{1+2\gamma\lambda_j} + \frac{\alpha_j^2}{(1+2\gamma\lambda_j)^2}\right),$$

$$\sigma^2(\gamma) = \sum_j \sigma_j^2 = \sum_j \left(\frac{2\,\lambda_j^2}{(1+2\gamma\lambda_j)^2} + \frac{4\,\lambda_j\,\alpha_j^2}{(1+2\gamma\lambda_j)^3}\right). \tag{1.17}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_3 > 0$. Тогда при любых r, $s > 0$ и $\gamma > 0$*

$$\mathbf{P}(r - s < ||X-a||^2 \leqslant r)$$
$$= \Lambda(\gamma)\,e^{\gamma r}\,\frac{1-e^{-\gamma s}}{\gamma\,\sigma(\gamma)\sqrt{2\pi}}\,\left(e^{-\beta^2/2} + \theta\,((\gamma\,\sigma(\gamma))^{-1} + (\gamma\,\sigma(\gamma))^{-2})\right), \tag{1.18}$$

где $\beta = (r-m(\gamma))/\sigma(\gamma)$, $|\theta| \leqslant c\,\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}\,(1+\log(\lambda_2/\lambda_3))$, c– некоторая абсолютная постоянная.

Напоминаем, что если γ является решением уравнения $m(\gamma) = r$, то $\beta = 0$.

Заметим, что теорема 1 позволяет уточнить ранее полученные результаты общего вида относительно асимптотического поведения вероятности гауссовского вектора из гильбертова пространства попасть в шар малого радиуса (см. например, [3]–[9], а также теорему 4 из [2]).

Доказательство теоремы 1. Пусть в (1.12) $Z = ||X-a||^2$. Тогда(см. (1.2), (1.3), (1.7) и [2, стр.441]) случайная величина $Z(\gamma)$ распределена так же, как $\sum(\beta_j^{1/2}\xi_j - \omega_j)^2$ при $\beta_j = \lambda_j/(1+2\gamma\lambda_j)$, $\omega_j = \alpha_j/(1+2\gamma\lambda_j)$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\,e^{itZ(\gamma)} = \prod (1-2it\beta_j)^{-1/2}\exp(it\omega_j^2/(1-2it\beta_j)). \tag{1.19}$$

Положим (см.(1.17)) $f(t) = \mathbf{E}\exp(it(Z(\gamma)-m(\gamma))/\sigma(\gamma))$, $\tau_j = \gamma\beta_j$. Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $\mathbf{E}\,Z(\gamma) = m(\gamma)$, а $\mathbf{Var}\,Z(\gamma) = \sigma^2(\gamma)$, из (1.19) с помощью стандартных рассуждений найдем

$$\log f(t) = -t^2/2 + \theta\,(t/\tau)^3 \sum \tau_j\,\gamma^2\sigma_j^2 = -t^2/2 + \theta\,t^3/\tau, \quad |t| \leqslant \varepsilon\tau,$$

где $\tau = \gamma\,\sigma(\gamma)$, $|\theta| \leqslant c$, а c, ε – некоторые абсолютные положительные постоянные. Отсюда следует

$$\int_0^{\varepsilon\tau} |f(t) - e^{-t^2/2}|\,dt \leqslant c_1/\tau.$$

Теперь оценим $I = \int_{\varepsilon\tau}^{\infty} |f(t)|\,dt$. Имеем, $I = \tau \int_{\varepsilon}^{\infty} \prod \xi_j(u)\,du$, где

$$\xi_j(u) = (1 + 4u^2\tau_j^2)^{-1/4} \exp\left(-2\,u^2\tau_j\gamma\omega_j^2/(1 + 4u^2\tau_j^2)\right).$$

Имея в виду равенство (см.(1.17)) $\sigma_j^2 = 2\beta_j^2 + 4\beta_j\omega_j^2$, нетрудно проверить, что при $\delta = 1/10$

$$\begin{aligned} &\xi_j(u) \leqslant \exp\left(-\delta u^2\gamma^2\sigma_j^2\right),\ \ u\tau_j \leqslant 1,\\ &\xi_j(u) \leqslant (e/(1 + 4u^2\tau_j^2))^{-1/4}\ \exp\left(-\delta\gamma^2\sigma_j^2/\tau_j^2\right),\ \ u\tau_j \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Пусть натуральное n выбрано из условия

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \geqslant \sigma^2/2 > \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2$$

и

$$I = (\tau \int_{\varepsilon}^{1/\tau_n} + \tau \int_{1/\tau_n}^{\infty}) \prod \xi_j(u)\,du = I_1 + I_2.$$

При помощи (1.20) получим

$$I_1 \leqslant \tau \int_{\varepsilon}^{1/\tau_n} \prod_{j \geqslant n} \xi_j(u)\,du \leqslant \tau \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\delta u^2\gamma^2\sigma^2/2} du \leqslant c/\tau^2.$$

Теперь оценим I_2. Здесь следует рассмотреть три случая: $n = 1$, $n = 2$ и $n \geqslant 3$. Ограничимся первым, как наиболее общим. Имея в виду (1.20) и то, что $\tau_j \geqslant \tau_n$, если $j \leqslant n$, найдем

$$\begin{aligned} I_2 \leqslant \tau \int_{1/\tau_3}^{\infty} \xi_1(u)\xi_2(u)\xi_3(u)\,du + \tau \int_{1/\tau_2}^{1/\tau_3} \xi_1(u)\xi_2(u)\,du \\ + \tau \int_{1/\tau_1}^{1/\tau_2} \xi_1(u)\,du = I_{21} + I_{22} + I_{23}, \end{aligned}$$

причем
$$I_{21} \leqslant \tau e^{1-\delta\tau^2/2\tau_1^2} \int\limits_{1/\tau_3}^{\infty} \prod_{j=1}^{3} (1+4u^2\tau_j^2)^{-1/4}\, du$$
и
$$\int\limits_{1/\tau_3}^{\infty} \prod_{j=1}^{3} (1+4u^2\tau_j^2)^{-1/4}\, du \leqslant \frac{1}{\tau_1}\sqrt{\tau_1/2\tau_2} \leqslant \frac{1}{\tau_1}\sqrt{\lambda_1/2\lambda_2};$$
$$I_{22} \leqslant \tau/\tau_1\, e^{1-\delta\tau^2/2\tau_1^2} \sqrt{\lambda_1/2\lambda_2}\, \log \lambda_2/\lambda_3;$$
$$I_{23} \leqslant \tau/\tau_1\, e^{1-\delta\tau^2/2\tau_1^2} \sqrt{2\lambda_1/2\lambda_2}.$$

Утверждение теоремы 1 следует из (1.12) и проделанных выкладок.

2. Доказательства лемм 1 и 2

Доказательство леммы 1 в значительной степени повторяет доказательство теоремы 1 из [10]. Приведем его, поскольку выкладки не занимают много места.

При любом $u \geqslant 0$
$$\mathbf{P}\left(Z \leqslant r\right) = \Lambda(u)\, \mathbf{E}\, e^{u\bar{Z}}\, \mathbf{I}\, [\bar{Z} \leqslant r], \tag{2.1}$$
где $\bar{Z} = Z(u)$, а случайная величина $Z(u)$ имеет распределение (1.3). Отсюда
$$\mathbf{P}\left(Z \leqslant r\right) = e^{-Q(h)}\, I(u), \quad I(u) = \mathbf{E}\, e^{u\sigma(u)Z_0(u)}\, \mathbf{I}\, [Z_0(u) \leqslant \frac{r-m(u)}{\sigma(u)}], \tag{2.2}$$
($Z_0(u)$ определено перед соотношением (1.7)).

Пусть h является решением уравнения (1.6). Тогда $I(h) \leqslant 1$, и из (4.2) при $u = h$ следует, что
$$\mathbf{P}\left(Z \leqslant r\right) \leqslant e^{-Q(h)}, \tag{2.3}$$

Если $a = \infty$, оценка снизу, очевидно, верна. Пусть теперь $a < \infty$. Если $m(u) < r$ (или $u > h$), то
$$\begin{aligned} I(u) &\geqslant e^{u\,(m(u)-r)}\, \mathbf{P}\left(|Z_0(u)| \leqslant \frac{r-m(u)}{\sigma(u)}\right) \\ &\geqslant e^{u\,(m(u)-r)} \left(1 - \frac{\sigma^2(u)}{(r-m(u))^2}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

При $t \geqslant h$ положим $\xi(t) = t\,(r - m(t))$. Очевидно,

$$Q(u) - Q(h) = -\int_h^u t m'(t) dt = \xi(u) + \int_h^u (m(t) - m(h)) dt \leqslant \xi(u), \qquad h \leqslant u < \infty. \tag{2.5}$$

Положим $\nu = a + \sqrt{a^2 + 2aQ(h)}$. Пусть u является решением уравнения $\xi(u) = \nu$ (такое решение существует и единственно, поскольку функция $\xi(t)$ монотонно растет от нуля до бесконечности на $[h, \infty)$). Тогда по (2.5)

$$Q(u) \leqslant Q(h) + \xi(u) = Q(h) + \nu, \quad u\,(r - m(u)) = \xi(u) = \nu,$$
$$\frac{\sigma^2(u)}{(r - m(u))^2} = \frac{u^2\sigma^2(u)}{\xi^2(u)} \leqslant \frac{a\,Q(u)}{\nu^2} = \frac{a(Q(h) + \nu)}{\nu^2} = \frac{1}{2}$$

по выбору ν. Отсюда и из (4.2)–(4.4) следует утверждение леммы 1.

Доказательство леммы 2. Пусть $h > 0$. Из (2.1) и (2.2) следует

$$\mathbf{P}\,(r - s < Z \leqslant r) = e^{-Q(h)} \int_\gamma^\beta e^{\tau t}\, F^{(h)}(dt), \tag{2.6}$$

где $\beta = (r - m(h))/\sigma(h)$, $\gamma = (r - s - m(h))/\sigma(h)$, $\tau = h\,\sigma(h)$, $F^{(h)}(t)$– функция распределения $Z_0(h)$. Пусть $\Delta(t) = F^{(h)}(t) - \Phi(t)$($\Phi(t)$– стандартная нормальная функция распределения). Очевидно,

$$\int_\gamma^\beta e^{\tau t}\, F^{(h)}(dt) = \int_\gamma^\beta e^{\tau t}\, \Phi(dt) + \int_\gamma^\beta e^{\tau t}\, \Delta(dt) = I + J. \tag{2.7}$$

Так же, как в [11, (2.4)–(2.8)], получим

$$|J| \leqslant c\, \frac{e^{\tau\beta} - e^{\tau\gamma}}{\tau}\, (\delta_\varepsilon(h) + \varepsilon\,(1 + \delta_\varepsilon(h))\,(\tau + 1/(\beta - \gamma)). \tag{2.8}$$

Займемся теперь интегралом I. Имеем,

$$\sqrt{2\pi}\, I = \frac{1}{\tau}\, e^{\tau\,\beta} \int_{-\mu}^0 e^{u - (\beta + u/\tau)^2/2}\, du, \tag{2.9}$$

где $\mu = \tau(\beta - \gamma) = hs$. Далее,

$$e^{-(\beta+u/\tau)^2/2} = e^{-\beta^2/2}(1 - 4\beta/\tau) + \frac{1}{2}(u/\tau)^2 (e^{-t^2/2})''\Big|_{t=\beta+\theta u/\tau},$$

$$0 < \theta < 1,$$

откуда следует

$$\int_{-\mu}^{0} e^{u-(\beta+u/\tau)^2/2}\,du = e^{-\beta^2/2}(1 - e^{-\mu} - \frac{\beta}{\tau}\int_{-\mu}^{0} t\,e^t\,dt) + \frac{\theta_1}{2\tau^2}\int_{-\mu}^{0} t^2 e^t\,dt =$$

$$(1 - e^{-\mu})(e^{-\beta^2/2}(1 + \theta_2\beta/\tau) + \theta_3/\tau^2),$$

$$-1 < \theta_1 < 2e^{-3/2},\ 0 < \theta_2 < 1,\ |\theta_3| < 1. \quad (2.10)$$

Утверждение леммы 2 вытекает из (2.6)–(2.10).

Литература

1. N. C. Jain , W. E. Pruitt, *Lower tail probability estimates for subordinators and nondecreasing random walks.* — Ann. Probab. **15** No. 1 (1987), 76–101.
2. M. A. Lifshits, *On the lower tail probabilities of some random series.* — Ann. Probab. **25** (1997), 424–442.
3. Г. Н. Сытая, *Об асимптотическом представлении гауссовой меры в гильбертовом пространстве.* — Теория стохастических процессов **2** (1974), 94–104.
4. И. А. Ибрагимов, *О вероятностях попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **85** (1979), 75–93.
5. V. M. Zolotarev, *Asymptotic behavior of the Gaussian measure in* l_2. — Journal of Soviet Mathematics **24** (1986), 2330–2334.
6. W. V. Li, *On the lower tail of Gaussian measures.* — Probability in Banach spaces **8** (1992), 106–117.
7. W. V. Li, W. Linde, *Small ball problems for non-centered Gaussian measures.* — Probability and Mathematical Statistics **14** (1993), 231–251.
8. J. Kuelbs, W. V. Li, W. Linde, *The Gaussian measures of shifted balls.* — Probab. Theory Related Fields **98** (1994), 143–162.
9. A. Dembo, E. Mayer-Wolf, O. Zeituni, *Exact behavior of Gaussian seminorms.* — Probab. Statist. Letters **23** (1995), 275–280.
10. Л. В. Розовский, *О нижней границе вероятностей больших уклонений для выборочного среднего при выполнении условия Крамера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 208–224.

11. Л. В. Розовский, *Вероятности больших уклонений для некоторых классов распределений, удовлетворяющих условию Крамера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298** (2003), 161–185.

Rozovsky L. V. On small deviation probabilities of positive random variables.

In the note two lemmas are deduced, which seem to be useful while studing the small deviation probabilities of positive random variables. As the example so called small balls problem is examined.

Санкт-Петербургская
химико-фармацевтическая академия

Поступило 1 ноября 2004 г.