Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

А. Н. Фролов

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Введение

В работах [1–3] автора был предложен единый подход к предельным теоремам о п.н. (почти наверное) поведении приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Этот подход позволил охватить единой теорией усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) Эрдёша–Реньи, законы Чёргё–Ревеса, УЗБЧ и закон повторного логарифма (ЗПЛ). В [4] аналогичный подход к сильным предельным теоремам для приращений был развит для случайных величин с неодинаковыми распределениями.

В настоящей работе мы применим методы, развитые в [4], к исследованию предельного поведения некоторых функционалов от приращений, длина которых близка к максимально возможной. При этом мы будем рассматривать такие функционалы, которые совпадают с самими суммами и с максимумами сумм для приращений максимальной длины. Наша цель – получение результатов для приращений сумм независимых случайных величин, включающих в себя теоремы Колмогорова [5] и Хартмана–Винтнера [6] о ЗПЛ. Для этого мы скомбинируем технику из [4] и технику некоторых работ о ЗПЛ. Так как литература, посвященная ЗПЛ, весьма обширна (см., например, монографию Петрова [7]), мы ограничиваемся работами Петрова [8], Егорова [9–11], Мартикайнена [12] и Розовского [13], в которых содержится ряд простых условий, достаточных для ЗПЛ. При формулировке результатов мы будем использовать предложенные Мартикайненом [12] односторонние условия на распределения слагаемых. Отметим, что условия Мартикайнена обобщают целый ряд известных

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Е02-1.0-56 Минобразования РФ, гранта 02–01–00779 РФФИ и гранта ведущих научных школ НШ–2258.2003.1.

двусторонних достаточных условий, среди которых условия Колмогорова [5], Петрова [10], Егорова [9–11].

Здесь следует подчеркнуть, что полученные в работе результаты и использованные методы можно комбинировать с техникой других работ, посвященных ЗПЛ. Мы ограничиваем наше внимание лишь упомянутыми выше работами, так как этого достаточно для того, чтобы показать возможности единого подхода к сильным предельным теоремам для приращений сумм независимых случайных величин.

Полученные в работе результаты позволяют включить теоремы Колмогорова и Хартмана–Винтнера о ЗПЛ в единую теорию сильных предельных теорем для приращений. Кроме того, результаты в [3] для больших приращений доказаны в предположении конечности второго момента с логарифмической добавкой у положительных частей слагаемых. Приводимые ниже результаты позволяют устранить этот логарифмический дефект и включить в упомянутую выше единую теорию ЗПЛ при правильных моментных ограничениях на правый хвост распределения слагаемых.

2. Результаты

Пусть $\{X_k\}$ – последовательность независимых случайных величин с $EX_k = 0$, $DX_k = \sigma_k^2$, $F_k(x) = P(X_k < x)$. Пусть $B_0 = 0$ и $B_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \to \infty$. (Всюду в тексте, где использованы символы $\limsup$, $\liminf$, $\lim$, O, o, $\to$ мы считаем, что $n \to \infty$, если не оговорено противное.)

Обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $S_0 = 0$. Пусть $\{a_n\}$ – неубывающая последовательность натуральных чисел, $1 \le a_n \le n$. Положим

$$U_n = \max_{0\le k\le n-a_n}(S_{k+a_n} - S_k), \quad W_n = \max_{0\le k\le n-a_n}\max_{1\le j\le a_n}(S_{k+j} - S_k),$$
$$R_n = S_n - S_{n-a_n}.$$

Отметим, что $U_n = R_n = S_n$ и $W_n = \max\limits_{1\le k\le n} S_k$ при $a_n = n$.

Обозначим

$$B_n^* = \max_{0\le k\le n-a_n}(B_{k+a_n} - B_k), \quad \tilde B_n = B_n - B_{n-a_n}.$$

Положим

$$b_n = \sqrt{2B_n^* \beta_n}, \quad \beta_n = \log \frac{B_n}{B_n^*} + \log\log B_n.$$

Всюду далее мы будем считать, что $B_n^*/\beta_n \to \infty$.

Обозначим $v_n = \sqrt{B_n^*/(2\beta_n)}$.

Мы начнем со случая ограниченных сверху величин.

Теорема 1. *Предположим, что* $\operatorname{ess\,sup} X_n = o(v_n)$, $B_n^* \sim \tilde{B}_n$, *последовательности* $\{B_n/B_n^*\}$ *и* $\{v_n\}$ *эквивалентны некоторым неубывающим последовательностям,* $\max\limits_{1 \le k \le n} \sigma_k^2 = o(B_n^*)$ *и*

$$\frac{1}{B_n^*} \sum_{j=n-a_n+1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon v_n} x^2 dF_j(x) \to 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Тогда

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} = \limsup \frac{U_n}{b_n} = \limsup \frac{R_n}{b_n} = 1 \qquad \text{п.н.}$$

При дополнительных предположениях в последнем соотношении $\limsup$ можно заменить на $\lim$ для W_n и U_n. Примером таких предположений являются условия теорем 12 и 13 из работы автора [4]. Так как наша цель – ЗПЛ, мы ограничиваемся результатами для $\limsup$.

При $a_n = n$ из теоремы 1 мы получаем теорему 3 из работы Мартикайнена [12]. Если, кроме того, $\operatorname{ess\,sup} |X_n| = o(v_n)$, то мы приходим к теореме Колмогорова.

Для формулировки следующего результата нам понадобится один класс функций из статьи Мартикайнена [12]. Пусть $\mathcal{F}$ обозначает класс функций $f(x)$, заданных на положительной полуоси, положительных при всех достаточно больших x и удовлетворяющих условиям: $f(x)x^m$ не убывает при некотором $m = m(f)$ и всех достаточно больших x, $\sum_{n=1}^{\infty} f(c^n)^{-r} < \infty$ при некоторых $c > 1$ и $r > 0$.

Для фиксированных n и $\varepsilon > 0$ определим последовательность натуральных чисел $\{i_m\}$ следующим образом. Положим $i_0 = 0$, $i_m = \min\{i : \ B_i \ge 2\varepsilon m B_n^*\}$, где $m = 1, 2, \ldots, M-1$, $M = \min\{m : m \ge 1, i_m \ge n - a_n\}$. Обозначим $i_M = n - a_n$. В случае $M = 1$ мы считаем, что последовательность $\{i_m\}$ состоит из двух элементов $i_0 = 0$ и $i_1 = n - a_n$.

Подчеркнем, что $i_m = i_m(n, \varepsilon)$, $M = M(n, \varepsilon)$.

Если $\max\limits_{1 \le i \le n} \sigma_i^2 / B_n^* \to 0$, то мы имеем

$$B_{i_m} = B_{i_m - 1} + \sigma_{i_m}^2 < 2\varepsilon(m+1) B_n^* \le B_{i_{m+1}}.$$

Поэтому $i_{m+1} > i_m$, если n достаточно велико. Следовательно, в этом случае $\{i_m\}$ и M хорошо определены при всех достаточно больших n.

Теорема 2. *Предположим, что $B_n^* \sim \tilde{B}_n$, последовательность $\{B_n / B_n^*\}$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности, $\max\limits_{1 \le k \le n} \sigma_k^2 = o(B_n^*)$, $B_n / B_n^* = o(\log \log B_n)$ и*

$$\frac{1}{B_n^*} \sum_{j=n-a_n+1}^{n} \int\limits_{|x| \ge \varepsilon v_n} x^2 dF_j(x) \to 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Пусть для любого $\tau > 0$

$$\max_{0 \le k \le n - a_n} \sum_{j=k+1}^{k+a_n} \int\limits_{\tau v_j}^{\infty} x dF_j(x) = o(b_n), \tag{3}$$

$$\max_{1 \le m \le M} \sum_{j=i_{m-1}+1}^{i_m + a_n} \int\limits_{\tau v_j}^{\infty} x dF_j(x) = o(b_n). \tag{4}$$

Пусть существует такая функция $f(x) \in \mathcal{F}$, что

$$\sum_{k=1}^{n} P(X_k > \varepsilon v_n) \le \frac{1}{f(b_n)} \tag{5}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть для любого $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \delta b_n) < \infty. \tag{6}$$

Тогда

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} = \limsup \frac{U_n}{b_n} = \limsup \frac{R_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Простые условия, достаточные для (2)–(4), получатся, если в формулах (2)–(4) суммирование взять по всем индексам j, $1 \le j \le n$, а максимумы в (3) и (4) убрать. Заметим, что в условии (2) v_n можно заменить на v_j.

При $a_n = n$ условие (2) совпадает с условием Линдеберга, а теорема 2 превращается в теорему 6 из работы Мартикайнена [12], которая обобщает и теорему Колмогорова, и теорему Хартмана–Винтнера. Кроме того, в работе Мартикайнена [12] содержится ряд простых условий, достаточных для ЗПЛ и обобщающих условия Петрова [8] и Егорова [9–11]. Ниже мы приведем эти условия.

Для $y > 0$ положим

$$L_n(y) = \int\limits_{|x|\ge y} x^2 dF_n(x),\ L_n^-(y) = \int\limits_{-\infty}^{-y} x^2 dF_n(x),\ L_n^+(y) = \int\limits_{y}^{+\infty} x^2 dF_n(x).$$

Обозначим $w_n = (B_n/\log\log B_n)^{-1/2}$.

Приведем теперь упомянутые выше условия, достаточные для ЗПЛ, в историческом порядке.

A) Колмогоров, [5]: $\operatorname{ess\,sup}|X_n| = o(w_n)$.

B) Петров, [8]: для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(\varepsilon w_n) = o(B_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(\varepsilon w_n)}{B_n \log\log B_n} < \infty.$$

C) Егоров, [9]: для некоторого $\delta > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 \log|X_i|(\log\log\log|X_i|)^{1+\delta} = O(B_n).$$

D) Егоров, [10]: для некоторой случайной величины X с конечным вторым моментом

$$\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| \ge x) = O(nP(|X| \ge x))$$

равномерно по всем достаточно большим x, $\liminf B_n/n > 0$.

E) Егоров, [11]: для некоторой функции $f \in \Psi_c$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(\varepsilon w_n) = o(B_n \log\log B_n/f(B_n)).$$

F) Егоров, [11]: для некоторой функции $f \in F_c$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(\varepsilon w_n) = o(B_n \log\log B_n / f(B_n)),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon B_n \log\log B_n) < \infty.$$

Здесь Ψ_c – множество функций $f(x)$ таких, что $f(x) > 0$ и не убывает при $x \geq x_0 = x_0(f)$ и $\sum\limits_{n \geq x_0} (nf(n))^{-1} < \infty$, а F_c – множество функций $f(x)$ таких, что $f^r(x) \in \Psi_c$ для некоторого $r > 0$.

Мартикайнен [12] предложил следующие односторонние варианты условий A)–F):

A') $\operatorname{ess\,sup} X_n = o(w_n)$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^-(\varepsilon w_n) = o(B_n). \tag{7}$$

B') Для любого $\varepsilon > 0$ выполнены соотношения (7) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n^+(\varepsilon w_n)}{\sqrt{B_n \log\log B_n}} < \infty.$$

C') Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение (7), и существует такая функция $f \in \Psi_c$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\varepsilon w_n}^{\infty} \frac{x^2 f(x)}{\log\log x} dF_i(x) = O(B_n).$$

D') Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение (7), и $g(x) = \limsup n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} P(X_i \geq x) < \infty$ для всех $x \geq x_0$ и некоторого x_0, $\int\limits_{x_0}^{\infty} x g(x) dx < \infty$, $\liminf B_n / n > 0$.

E') Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение (7), и существует функция $f \in \Psi$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^+(\varepsilon w_n) = o(B_n \log\log B_n / f(B_n)).$$

F') Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение (7), и существует функция $f \in F_c$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^{+}(\varepsilon w_n) = o(B_n \log\log B_n / f(B_n)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \varepsilon w_n) < \infty.$$

Выполнение любого из условий A)–F) и A')–F') влечет (5) и (6), а если $b_n = \sqrt{2B_n \log\log B_n}$, то и (3). Комбинируя эти условия с остальными условиями теоремы 2, мы получаем целый ряд простых достаточных условий для ЗПЛ для приращений.

Розовский [13] предложил следующее обобщение упомянутых условий:

G) Для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(\varepsilon w_n) = o(B_n),$$

и для некоторых $\tau < 1$ и $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P(X_n > \tau\sqrt{2B_n \log\log B_n}) + (2\log\log B_n)^{-1/2} P(X_n > \delta w_n)) < \infty.$$

Последнее условие также может быть использовано для формулировки новых результатов о поведении приращений.

Приведем, наконец, результат для приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, содержащий теорему Хартмана–Винтнера. Этот результат вытекает из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть X_k, $k = 1, 2, \ldots$, имеют одинаковое распределение, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ и $a_n = cn$, $c \in (0, 1]$. Тогда*

$$\limsup \frac{W_n}{\sqrt{2cn \log\log n}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Этот результат содержится в книге Чёргё и Ревеса [14], где он получен с помощью метода сильной аппроксимации и результата Штрассена [15].

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. По теореме 2 из работы автора [16] $\limsup R_n/b_n \geq 1$ п.н. Поэтому нам достаточно показать, что

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} \leq 1 \quad \text{п.н.} \tag{8}$$

Для доказательства последнего соотношения мы воспользуемся теоремой 11 из [4]. При этом нам нужно только проверить, что

$$\limsup \max_{1\leq m\leq M} \max_{0\leq h\leq H_n} \frac{1}{B_{i_m+a_n}-B_{i_{m-1}}} \sum_{k=i_{m-1}+1}^{i_m+a_n} \frac{\log\varphi_k(h)}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{9}$$

где $\varphi_k(h) = Ee^{hX_k}$, $H_n = \sqrt{2\beta_n/B_n^*}$.

Не умаляя общности, мы считаем, что $\{v_n\}$ не убывает.

Возьмем $\tau > 0$. По формуле Тейлора для всех k и h таких, что $1 \leq k \leq n$ и $0 \leq h \leq H_n$, мы имеем

$$\log\varphi_k(h) \leq \varphi_k(h) - 1 = \varphi_k''(\theta_{k,n})\frac{h^2}{2},$$

где $0 \leq \theta_{k,n} \leq H_n$. Заметим, что

$$\varphi_k''(\theta_{k,n}) = EX_k^2 e^{\theta_{k,n}X_k} \leq e^{\tau v_n H_n} EX_k^2 = e^\tau \sigma_k^2$$

для всех $k \leq n$ и всех достаточно больших n. Отсюда мы заключаем, что выполнено (9). $\square$

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 2 из [16] нам снова достаточно доказать (8). В условиях теоремы 2 последовательность $\{v_n\}$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности. Поэтому, не умаляя общности, мы можем считать, что $\{v_n\}$ не убывает.

Возьмем $0 < \tau < \delta$. Положим $\bar{X}_k = X_k I\{X_k < \tau v_k\}$, $X_k' = X_k I\{\tau v_k \leq X_k \leq \delta b_k\}$, $X_k'' = X_k I\{X_k > \delta b_k\}$, $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{X}_k$, $S_n' = \sum_{k=1}^n X_k'$, $S_n'' = \sum_{k=1}^n X_k''$, $\bar{S}_0 = S_0' = S_0'' = 0$.

Мы имеем $W_n \leq W_n^1 + W_n^2 + W_n^3 + W_n^4$, где

$$W_n^1 = \max_{0\leq k\leq n-a_n} \max_{1\leq j\leq a_n} (\bar{S}_{k+j} - \bar{S}_k),$$

$$W_n^2 = \max_{0\leq k\leq n-a_n} \max_{1\leq j\leq a_n} (-E(\bar{S}_{k+j} - \bar{S}_k)),$$

$$W_n^3 = \max_{0\leq k\leq n-a_n} \max_{1\leq j\leq a_n} (S_{k+j}' - S_{k+1}' - E(S_{k+j}' - S_k')),$$

$$W_n^4 = \max_{0\leq k\leq n-a_n} \max_{1\leq j\leq a_n} (S_{k+j}'' - S_k'').$$

В силу условий (3) и (6) мы имеем

$$\frac{W_n^2}{b_n} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{W_n^4}{b_n} \to 0 \quad \text{п.н.} \tag{10}$$

Покажем теперь, что

$$\frac{W_n^3}{b_n} \to 0 \quad \text{п.н.} \tag{11}$$

Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\{s_n\}$ и $\{b_n\}$ – две числовые последовательности, $b_1 > 0$, b_n не убывает и $b_n \to \infty$. Если $s_n = o(b_n)$, то $\max\limits_{1 \le i \le j \le n} |s_j - s_i| = o(b_n)$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $|s_n| \le \varepsilon b_n$ для всех $n \ge N$. Так как b_n не убывает и $b_n \to \infty$, то

$$\max_{1 \le i \le j \le n} |s_j - s_i| \le 2 \max_{1 \le j \le n} |s_j| \le 2(\max_{1 \le j \le N} |s_j| + \max_{N \le j \le n} |s_j|) \le 4\varepsilon b_n$$

для всех $n \ge N_1 \ge N$. Лемма доказана. □

Заметим, что лемма 1 представляет и самостоятельный интерес, так как с ее помощью можно получать усиленный закон больших чисел для приращений. Действительно, если b_n удовлетворяет условиям леммы 1 и $S_n/b_n \to 0$ п.н., то и $W_n/b_n \to 0$ п.н. Поэтому, взяв любую теорему, содержащую достаточные условия для усиленного закона больших чисел для сумм, мы тут же получаем теорему для приращений.

Итак, с учетом леммы 1 для доказательства (11) нам достаточно доказать, что

$$\frac{S_n' - ES_n'}{b_n} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Для доказательства последнего соотношения мы докажем, что

$$\frac{S_n'}{b_n} - \operatorname{med}\left(\frac{S_n'}{b_n}\right) \to 0 \quad \text{п.н.}, \tag{12}$$

$$\operatorname{med}\left(\frac{S_n'}{b_n}\right) - E\left(\frac{S_n'}{b_n}\right) \to 0. \tag{13}$$

Здесь и далее $\operatorname{med} Z$ обозначает медиану случайной величины Z.

Соотношение (13) следует из того, что

$$\left|\operatorname{med}\left(\frac{S_n'}{b_n}\right) - E\left(\frac{S_n'}{b_n}\right)\right| \le \sqrt{2D\left(\frac{S_n'}{b_n}\right)}$$
$$\le \sqrt{\frac{2}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n} E(X_i')^2} \le \sqrt{\frac{2B_n}{b_n^2}},$$

$b_n = \sqrt{2B_n^*\beta_n}$ и $B_n/B_n^* = o(\log\log B_n)$.

Докажем (12). Выбрав $c > 1$ и положив $i(n) = \max\{i : b_i < c^n\}$, $I_n = \{i : i(n-1) \le i \le i(n)\}$, точно так же, как в статье Мартикайнена [12] на стр. 705, мы докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i\in I_n}(X_i' - EX_i')| > \varepsilon c^n) < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$. Так же, как при доказательстве 13, имеем

$$c^{-n}\left|\operatorname{med}\left(\sum_{i\in I_n} X_i'\right) - \sum_{i\in I_n} EX_i'\right| \le b_{i(n)}^{-1}\sqrt{2D\left(\sum_{i\in I_n} X_i'\right)}$$
$$\le \sqrt{\frac{2B_{i(n)}}{b_{i(n)}^2}} \to 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i\in I_n} X_i' - \operatorname{med}\left(\sum_{i\in I_n} X_i'\right)| > \varepsilon c^n) < \infty.$$

По теореме 7 из работы Мартикайнена и Петрова [17] мы получаем (12).

Теперь для завершения доказательства мы покажем, что

$$\limsup \frac{W_n^1}{b_n} \le C(\tau) \quad \text{п.н.}, \tag{14}$$

где $C(\tau) \to 0$ при $\tau \downarrow 0$. Для этого мы воспользуемся теоремой 1 из работы автора [4].

Условие A) теоремы 1 из [4] проверяется так же, как при доказательстве теоремы 11 в [4].

Проверим условие B).

Пусть $\tau > 0$. Положим $\varphi(h) = \exp\{e^\tau h^2/2\}$, $\varphi_k(h) = Ee^{h\bar{X}_k}$, $b_n' = e^\tau\sqrt{2B_n^*\beta_n}$, $H_n = \sqrt{2\beta_n/B_n^*}$.

Заметим, что $\operatorname{ess\,sup}\bar{X}_n \le \tau v_n$ и $E\bar{X}_n \le 0$. Поэтому для любых k и h таких, что $1 \le k \le n$ и $0 \le h \le H_n$, выполняются неравенства

$$\log\varphi_k(h) \le \varphi_k(h) - 1 \le hE\bar{X}_k + \varphi_j''(\theta_{k,n})\frac{h^2}{2} \le \varphi_j''(\theta_{k,n})\frac{h^2}{2},$$

где $0 \le \theta_{k,n} \le H_n$. Так же, как в доказательстве теоремы 1, мы имеем

$$\varphi_k''(\theta_{k,n}) \le e^\tau E\bar{X}_k^2 \le e^\tau\sigma_k^2$$

для всех $k \le n$ и всех достаточно больших n. Следовательно,

$$\max_{1\le m\le M}\max_{0\le h\le H_n}\frac{1}{B_{i_m+a_n} - B_{i_{m-1}}}\sum_{k=i_{m-1}+1}^{i_m+a_n}\frac{\log\varphi_k(h)}{\log\varphi(h)} \le 1$$

для всех достаточно больших n. Отсюда по теореме 6 из [4] следует, что для всех достаточно больших n

$$\max_{1\le m\le M} P(\bar{S}_{i_m+a_n} - \bar{S}_{i_{m-1}} \ge (1+\varepsilon)^2 b_n') \le e^{-(1+\varepsilon)^2 e^\tau\beta_n},$$

откуда в свою очередь вытекает условие B) теоремы 1 из [4].

Осталось доказать, что выполнено условие C) последней теоремы.

В силу (4) и неравенства Чебышева мы имеем

$$P(\bar{S}_{i_{m-1}+j} - \bar{S}_{i_{m-1}} \ge -\varepsilon b_n') \ge 1 - \frac{D(\bar{S}_{i_{m-1}+j} - \bar{S}_{i_{m-1}})}{4\varepsilon^2(b_n')^2}$$
$$\ge 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2(b_n')^2}\sum_{k=1}^{n}E\bar{X}_k^2 \ge 1 - \frac{B_n}{4\varepsilon^2(b_n')^2} \to 1.$$

Отсюда следует, что

$$\min_{1\le m\le M}\min_{1\le j\le i_m - i_{m-1}+a_n} P(S_{i_{m-1}+j} - S_{i_{m-1}} \ge -\varepsilon b_n) \to 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\min_{1\le m\le M}\min_{1\le j\le i_m - i_{m-1}+a_n} P(S_{i_m+a_n} - S_{i_{m-1}+j} \ge -\varepsilon b_n) \to 1.$$

Из последних двух соотношений следует условие C) теоремы 1 из [4].

По теореме 1 из [4]

$$\limsup \frac{W_n^1}{b_n'} \le 1 \quad \text{п.н.},$$

откуда следует (14).

Теорема доказана. □

Литература

1. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин.* — Доклады Академии Наук **372**, No. 5 (2000), 596–599.
2. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables.* — Studia Sci. Math. Hungar. **39** (2002), 333–359.
3. А. Н. Фролов, *Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятностей и ее применения **48**, в. 1 (2003), 104–121.
4. А. Н. Фролов, *Сильные предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 260–285.
5. A. N. Kolmogorov, *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus.* — Math. Ann. **101** (1929), 126–135.
6. P. Hartman, A. Wintner, *On the law of the iterated logarithm.* — Amer. J. Math. **63** (1941), 169–176.
7. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М. (1987).
8. V. V. Petrov, *On the law of the iterated logarithm without assumptions about the existence of moments.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1968), 1068–1072.
9. В. А. Егоров, *О законе повторного логарифма.* — Теория вероятностей и ее применения **14**, в. 4 (1969), 722–729.
10. В. А. Егоров, *Обобщение теоремы Хартмана–Винтнера о законе повторного логарифма.* — Вестник ЛГУ, сер. матем., механ., астрон. в. 2 (1971), 22–28.
11. В. А. Егоров, *Несколько теорем об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма.* — Теория вероятностей и ее применения **17**, в. 1 (1972), 84–98.
12. А. И. Мартикайнен, *Об одностороннем законе повторного логарифма.* — Теория вероятностей и ее применения **30**, в. 4 (1985), 694–705.
13. Л. В. Розовский, *О законе повторного логарифма для сумм независимых случайных величин с конечной дисперсией.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **244** (1997), 257–270.
14. M. Csörgő, P. Révész *Strong approximations in probability and statistics.* Akadémiai Kiadó, Budapest (1981).

15. V. Strassen, *An invariance principle for the law of the iterated logarithm.* — Z. Wahrsch. Verw. Geb. **3** (1964), 211–226.
16. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении больших приращений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятностей и ее применения **47**, в. 2 (2002), 366–374.
17. А. И. Мартикайнен, В. В. Петров, *О необходимых и достаточных условиях для закона повторного логарифма.* — Теория вероятностей и ее применения **22**, в. 1 (1977), 18–26.

Frolov A. N. On the law of the iterated logarithm for increments of sums of independent random variables.

We obtain the law of the iterated logarithm for increments of sums of independent random variables. Our results generalize the Kolmogorov theorem and the Hartman–Wintner theorem on the law of the iterated logarithm.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 ноября 2004 г.