Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

О. Е. Щербакова

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ПРИРАЩЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Введение

Пусть далее X_n, $n \in \mathbb{N}_0^d$ – независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины с

$$EX_n = 0, \tag{1}$$

$$DX_n = EX_n^2 = \sigma^2 < \infty \tag{2}$$

и с производящей функцией $\phi(t) = E\exp(tX_n)$, такой что

$$0 < t_0 = \sup\{t : \phi(t) < \infty\}. \tag{3}$$

Приращением частичных сумм будем называть случайную величину

$$S_{(i,j]} = \sum_{i<k\le j} X_k, \quad (i,j] \subset \mathbb{N}_0^d.$$

Относительно последовательности целых чисел $\{a_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ будем предполагать, что $a_N = [a(N)]$, где $[\cdot]$ – целая часть, а функция $a(t), t \ge 1, t \in \mathbb{R}$:

$$1 \le a(t) \le t,$$

$$a(t) \quad \text{и} \quad \frac{t}{a(t)} \quad \text{возрастают}\ . \tag{4}$$

Для $A \subset \mathbb{R}_0^d$ обозначим $|[A]| = \mathrm{Card}(A \cap \mathbb{N}^d)$.

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ рассматриваются максимумы приращений частичных сумм на параллелепипедах, объем которых либо точно равен a_N либо не превосходит a_N, лежащих внутри d-мерных параллелепипедов вида $(0,n]$, объем которых не превосходит N:

$$S_N = \max_{\substack{|j|\le N\\ |j-i|\le a_N}} S_{(i,j]}, \quad S_N^\star = \max_{\substack{|j|\le N\\ |j-i|=a_N}} S_{(i,j]}.$$

Работа выполнена при поддержке грантов Министерства Образования Российской Федерации No. E02-1.0-56 и “Ведущая научная школа”, No. 2258.2003.1.

Построим еще одну статистику. Для $n \in \mathbb{N}_0^d$ обозначим

$$T_n = \max_{\substack{j \leq n \\ |j-i| \leq a_{|n|}}} S_{(i,j]}, \quad T_n^\star = \max_{\substack{j \leq n \\ |j-i| = a_{|n|}}} S_{(i,j]}.$$

Заметим, что

$$S_N = \max_{|n|=N} T_n, \quad S_N^\star = \max_{|n|=N} T_n^\star$$

Пусть I_N – максимум приращений на параллелепипедах объема не более, чем a_N, лежащих внутри d-мерного куба $(0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]]$, где $k^0 = (k, 1, \dots, 1), \forall k \in \mathbb{N}$,

$$I_N = \max_{\substack{(i,j] \subset (0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]] \\ |j-i| \leq a_N}} S_{(i,j]}, \quad I_N^\star = \max_{\substack{(i,j] \subset (0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]] \\ |j-i| = a_N}} S_{(i,j]}.$$

Отметим, что объем куба $(0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]]$ отличается от N не более чем на $dN^{1-1/d}$.

Обозначим $m(u) = (\log \phi(u))'$, $\sigma^2(u) = m'(u)$

$$p(\alpha) = \inf_{t \in [0, t_0)} \frac{\phi(t)}{\exp{(\alpha t)}} = \frac{\phi(t^\star)}{\exp{(\alpha t^\star)}}.$$

Положим $c(\alpha) = -1/\log p(\alpha)$, известно, (можно найти, например, в [5]), что функция $c(\alpha)$ – убывающая дифференцируемая функция от

$$\alpha \in (0, A), \quad A = \lim_{t \uparrow t_0} m(t),$$

причем,

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} c(\alpha) = \infty \quad \lim_{\alpha \uparrow A} c(\alpha) = c_0 = 1/\int_0^{t_0} t m'(t) dt.$$

Всюду далее будем предполагать, что $\log x = \log(x \vee e)$, $\log_2 N = \log\log N$, $x_N \asymp y_N$ означает, что для достаточно больших N существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, что $C_1 < |x_N/y_N| < C_2$, асимптотические соотношения рассматриваются при $N \to \infty$.

Изучением скорости сходимости для приращений длины $[c \log N]$ в одномерном случае для независимых одинаково распределенных случайных величин занимались Девельс, Деврой и

Линч [5]. Для приращений длины $[c\log N+\lambda\log\log N]$ для неодинаково распределенных случайных величин получены результаты Мартикайненым, Фроловым и Штайнебахом [7].

Вопрос о скорости сходимости для полей изучался Штайнебахом и Пфулем [8]. Они рассматривали приращения по кубам объема $[c\log N+\lambda\log\log N]$. Скорость сходимости для приращений такой же длины для статистик $S_N^\star$ и S_N получены автором в [4].

Случай с более длинными приращениями рассматривался Девельсом и Штайнебахом [6], но с более сильными моментными ограничениями (двустороннее условие Крамера).

Пусть $d=1$ и определим

$$\mathbb{L}_1(S)=\frac{1}{\sigma\log_2\frac{N}{a_N}}\sqrt{\frac{2\log\frac{N}{a_N}}{a_N}}(S-a_N\alpha_N)$$

$$\mathbb{L}_2(S)=\frac{1}{\sigma\log_2\frac{N}{a_N}}\sqrt{\frac{2\log\frac{N}{a_N}}{a_N}}(S-\sigma\sqrt{2a_N\log\frac{N}{a_N}}),$$

$$\mathbb{L}_3(S)=\frac{1}{\sigma\log_2\frac{N}{a_N}}\sqrt{\frac{2\log\frac{N}{a_N}}{a_N}}(S-\sigma\sqrt{2a_N\log\frac{N}{a_N}}-\frac{\gamma}{3\sigma^2}\log N),$$

где величина α_N определена в (13), $\gamma=E|X_n|^3$.

Теорема 1.1 (Девельс, Штайнебах). *Пусть $X_n, n\in\mathbb{N}_0^1$ – независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины, удовлетворяющие условиям* (1), (2), (3) *и дополнительно*

$$0>t_1=\inf\{t:\phi(t)<\infty\}. \tag{5}$$

Пусть последовательность a_N, удовлетворяет следующим условиям

$$\lim\frac{a_N}{\log N}=\infty,\quad \lim\frac{a_N}{\log^r N}=0,\qquad \text{для некоторого}\quad r>1. \tag{6}$$

Тогда

$$\lim\mathbb{L}_1(S_N^\star)=1/2\quad \text{по вероятности.}$$

Если дополнительно предположить, что существует вещественнозначная последовательность $\widetilde{a}_N$, такая что

$$a_N-\widetilde{a}_N=O(\frac{a_N}{\log N}),\quad \widetilde{a}_{N+1}-\widetilde{a}_N=O(\frac{\widetilde{a}_N}{N\log N}). \tag{7}$$

Тогда

$$\liminf \mathbb{L}_1(S_N^\star) = 1/2 \quad \text{п.н.},$$
$$\limsup \mathbb{L}_1(S_N^\star) = 3/2 \quad \text{п.н.}$$

Кроме того, они сформулировали теорему о скорости сходимости исходя из принципа инвариантности.

Теорема 1.2 (Девельс, Штайнебах). *Пусть $X_n, n \in \mathbb{N}_0^1$ удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме* 1.1.

Пусть последовательность $a_N : 1 \le a_N \le N$, удовлетворяет следующим условиям

$$\lim \frac{a_N \log_2^2 N}{\log^3 N} = \infty, \quad \lim \frac{\log_2 \frac{N}{a_N}}{\log_2 N} = 1. \tag{8}$$

и существует вещественнозначная последовательность $\widetilde{a}_N \uparrow$, такая что

$$a_N - \widetilde{a}_N = O(\log N), \quad \widetilde{a}_{N+1} - \widetilde{a}_N = O(\frac{\widetilde{a}_N}{N \log N}), \quad N^{-1}\widetilde{a}_N \downarrow . \tag{9}$$

Тогда

$$\liminf \mathbb{L}_2(S_N^\star) = 1/2 \quad \text{п.н.},$$
$$\limsup \mathbb{L}_2(S_N^\star) = 3/2 \quad \text{п.н.}$$

Если же последовательность $a_N : 1 \le a_N \le N$, удовлетворяет только таким условиям

$$\lim \frac{a_N \log_2^2 N}{\log^3 N} = \infty, \quad \lim \frac{a_N}{N} = 0, \tag{10}$$

то

$$\lim \mathbb{L}_2(S_N^\star) = 1/2 \quad \text{по вероятности.}$$

Следствие 1.3 (Девельс, Штайнебах). *В условиях теоремы* 1.1, *при предположении $a_N/\log^2 N \to \infty$ и $a_N/\log^r N \to 0$ для некоторого $r > 2$ получаем*

$$\liminf \mathbb{L}_3(S_N^\star) = 1/2 \quad \text{п.н.},$$
$$\limsup \mathbb{L}_3(S_N^\star) = 3/2 \quad \text{п.н.}$$

В частности, если $a_N \log_2^2 N / \log^3 N \to s \in (0, \infty)$, *то*

$$\liminf \mathbb{L}_2(S_N^\star) = 1/2 + \frac{\gamma\sqrt{2}}{3\sigma^3\sqrt{s}} \quad \textit{п.н.},$$

$$\limsup \mathbb{L}_2(S_N^\star) = 3/2 + \frac{\gamma\sqrt{2}}{3\sigma^3\sqrt{s}} \quad \textit{п.н.}$$

Замечание 1.1. Следствие 1.3 показывает, что утверждение теоремы 1.2 не выполнено в зоне $a_N \log_2^2 N / \log^3 N \to s \in [0, \infty)$.

2. Результаты

В этой статье рассмотрим скорость сходимости статистик $S_N^\star$ и S_N для больших приращений.

Обозначим

$$\lim \frac{\log a_N}{\log N} = \delta, \lim \frac{\log a_N}{\log_2 N} = p.$$

Предполагается, что последний предел существует, конечный или бесконечный. Функции $z(T)$, $y(T)$ и последовательности z_N, y_N определяются следующими соотношениями

$$z(T) = \log \frac{T}{a(T)} + (d-1)\log_2 a(T) + (d-1)\log_2 \frac{T}{a(T)}, \quad z_N = [z(N)]; \tag{11}$$

$$y(T) = \log \frac{T}{a(T)} + \begin{cases} (d-1)\log_2 a(T) & \delta \in [0,1), \\ (d-1)\log_2 \frac{T}{a(T)} & \delta = 1, \end{cases} \quad y_N = [y(N)]. \tag{12}$$

Пусть α_N, $\beta_N \in (0, A)$ – единственные положительные решения при достаточно больших N уравнений

$$c(\alpha_N) = \frac{a_N}{z_N}; \quad c(\beta_N) = \frac{a_N}{y_N}; \tag{13}$$

$t_N^\star \in [0, t_0)$, $t_N^\square \in [0, t_0)$ – единственные положительные решения уравнений

$$\alpha_N = m(t_N^\star); \quad \beta_N = m(t_N^\square). \tag{14}$$

Определим функционалы, характеризующие скорость сходимости,

$$\mathbb{L}(S) = \frac{1}{\sigma \log z_N}\sqrt{\frac{2z_N}{a_N}}(S - a_N\alpha_N).$$

$$\mathbb{L}_\square(S) = \frac{1}{\sigma \log y_N}\sqrt{\frac{2y_N}{a_N}}(S - a_N\beta_N).$$

В формулируемых ниже результатах благодаря условию (15) $z_N \sim y_N \sim \log\frac{N}{a_N}$. В опредлении функционалов $\mathbb{L}, \mathbb{L}_\square, \mathbb{M}, \mathbb{M}_\square$ после замены z_N, y_N на $\log\frac{N}{a_N}$ результаты останутся верными. Однако в определении величин α_N, β_N заменять на эквивалентные выражения нельзя.

Теорема 2.1. *Пусть $X_n, n \in \mathbb{N}_0^d$ – независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины, удовлетворяющие условиям* (1), (2), (3) *и дополнительно предположим, что при некотором $\upsilon \in (0,1]$*

$$E|X_n|^{2+\upsilon} < \infty, \upsilon \in (0,1]. \tag{15}$$

Пусть последовательность a_N, удовлетворяет следующему условиям

$$\lim \frac{a_N}{\log N} = \infty, \quad \lim \frac{\log \frac{N}{a_N}}{\log_2 N} = \infty. \tag{16}$$

$$(\log \frac{N}{a_N})^{1+\upsilon/2} = o(a_N^{\upsilon/2} \log_2 N) \tag{17}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\lim \mathbb{L}(S_N) = \chi \quad \textit{по вероятности,} \\ &\liminf \mathbb{L}(S_N) = \chi \quad \textit{п.н.,} \\ &\textit{где} \quad \chi = \begin{cases} p \wedge d - 1/2, & p < \infty, \\ 2d - 1 - 1/2, & p = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $p < \infty$, то

$$\limsup \mathbb{L}(S_N) = \chi + 1 \quad \textit{п.н.}$$

Если

$$a(T) = CT^\delta, 0 < \delta < 1, C > 0, \tag{18}$$

$$\textit{то} \qquad \limsup \mathbb{L}(S_N) = \chi + 3 \quad \textit{п.н.}$$

Причем, эти утверждения останутся справедливыми, если S_N заменить на $S_N^\star$, T_n, $T_n^\star$ при $|n| = N \to \infty$.

Отметим, что условие(16) в точности означает существование п.н. предела у последовательности $S_N/\sqrt{z_N a_N}$, что и приводит к проблеме вычисления следующего члена асимптотики. Условие (16) исключает $a_N = N(\log N)^{-q}, 0 \le q < \infty$.

Для выполнения условия (17) достаточно, чтобы $p > 1 + 2/v$, и небходимо, чтобы $p \geq 1 + 2/v$.

Если $\delta < 1$, то условие (17) эквивалентно условию

$$a_N (\log_2 N)^{2/v} / \log^{1+2/v} N \to \infty.$$

Условие $p < \infty$ означает $a_N = (\log N)^{p_N}, p_N \to p < \infty$. Значение $\limsup \mathbb{L}(S_N)$ для таких a_N отличается от значения для степенных a_N. Можно показать, что $\limsup \mathbb{L}(S_N)$ может принимать любое значение из интервала $(\chi + 1, \chi + 3)$, если a_N имеет подходящую скорость роста между логарифмической и степенной.

Теорема 2.2. *Предположим, что условия теоремы* 2.1 *выполнены. Тогда утверждения останутся справедливыми после замены* $\mathbb{L}(S_N)$ *на* $\mathbb{L}_\square(I_N)$ *или на* $\mathbb{L}_\square(I_N^\star)$.

Асимптотическое поведение последовательности α_N изучается в лемме 3.6 см. (18). При дополнительных условиях, используя более точную асимптотику α_N, β_N можно получить следующие результаты.

Определим линейные функционалы

$$\mathbb{M}(S) = \frac{1}{\sigma \log z_N} \sqrt{\frac{2z_N}{a_N}} \cdot (S - \sigma\sqrt{2a_N z_N});$$

$$\mathbb{M}_\square(S) = \frac{1}{\sigma \log y_N} \sqrt{\frac{2y_N}{a_N}} \cdot (S - \sigma\sqrt{2a_N y_N}).$$

Теорема 2.3. *В условиях теоремы* 2.1 *предположим дополнительно, что* $E|X_n|^3 < \infty$. *Тогда*

$$\lim(\mathbb{M}(S_N) - \frac{\sqrt{2}\gamma z_N^{3/2}}{3\sigma^3\sqrt{a_N}\log z_N}) = \chi \quad \text{по вероятности},$$

$$\liminf(\mathbb{M}(S_N) - \frac{\sqrt{2}\gamma z_N^{3/2}}{3\sigma^3\sqrt{a_N}\log z_N}) = \chi \quad \text{п.н.}$$

Если $p < \infty$, *то*

$$\limsup(\mathbb{M}(S_N) - \frac{\sqrt{2}\gamma z_N^{3/2}}{3\sigma^3\sqrt{a_N}\log z_N}) = \chi + 1 \quad \text{п.н.}$$

Если выполнено (18), *то*

$$\limsup(\mathbb{M}(S_N) - \frac{\sqrt{2}\gamma z_N^{3/2}}{3\sigma^3\sqrt{a_N}\log z_N}) = \chi + 3 \quad \text{п.н.}$$

В частности, если $E|X_n|^{3+\omega} < \infty$ *при некотором* $\omega > 0$, $a_N \sim s\log^3 N/\log_2^2 N, s \in (0,\infty)$, *то*

$$\liminf \mathbb{M}(S_N) = \chi + \frac{\gamma\sqrt{2}}{3\sigma^3\sqrt{s}} \quad \text{п.н.},$$

$$\limsup \mathbb{M}(S_N) = \chi + 1 + \frac{\gamma\sqrt{2}}{3\sigma^3\sqrt{s}} \quad \text{п.н.}$$

Причем, эти утверждения останутся справедливыми, если S_N *заменить на* $S_N^\star$, T_n, $T_n^\star$ *при* $|n| = N \to \infty$.

Теорема 2.4. *Утверждения теоремы* 2.3 *останутся справедливыми после замены* $\mathbb{M}(S_N)$ *на* $\mathbb{M}_\square(I_N)$ *или на* $\mathbb{M}_\square(I_N^\star)$.

3. Вспомогательные результаты

Далее будем предполагать, что $d \geq 2$.

Пусть $A(N) = \{n \in \mathbb{N}_0^d : \quad |n| \leq N\}$.

Лемма 3.1. *Положим* $B_d(N) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}_0^d : \quad |n| = N\}$.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *и достаточно больших* N

$$B_d(N) \leq N^\epsilon,$$

$$\mathrm{Card}(A(N)) = \sum_{n \leq N} B_d(n) = N \cdot P_{d-1}(\log N) + O(N^{\frac{d-1}{d+2}+\epsilon}),$$

где P_{d-1} *многочлен степени* $d-1$;

$$\mathrm{Card}(A(N)) \leq N \cdot C_d \log^{d-1} N,$$

где C_d – *константа зависящая лишь от* d.

Замечание 3.1. Прежде всего, следует отметить, что $B_d(N)$ можно рассматривать как число способов представления N в виде произведения d множителей. Доказательство леммы можно найти в [2] или в [1].

Введем пространство $\mathbb{R}_0^d$ – пространство d-мерных векторов с неотрицательными вещественными координатами и $\mathbb{R}_1^d$ – с координатами больше 1.

Для любых $N > M > \varrho > 1$ построим множество $U_\varrho(M,N)$ пар d-мерных векторов из $\mathbb{R}_0^d$,

$$U_\varrho(M,N) = \{(\widetilde{u}(s), u(s)) : \widetilde{u}(s) = (\varrho^{s_1}, \dots, \varrho^{s_{d-1}}, \frac{M}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} s_k + d-1}});$$

$$u(s) = (\varrho^{s_1+1}, \dots, \varrho^{s_{d-1}+1}, \frac{N}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} s_k}}) :$$

$$s \in \mathbb{N}_0^{d-1} : s_k \le \frac{\log N}{\log \varrho}, k = 1, \dots, d-1\}.$$

Лемма 3.2. *Для любых $N > M > \varrho > 1$ множество $U_\varrho(M,N)$ обладает следующими свойствами:*

(1) *для любого $(\widetilde{u}, u) \in U_\varrho(M,N)$ выполняется $|\widetilde{u}| = \varrho^{1-d} \cdot M$, $|u| = \varrho^{d-1} \cdot N$;*
(2) *для любого $i \in \mathbb{N}_1^d, M \le |i| \le N$, существует пара $(\widetilde{u}, u) \in U_\varrho(M,N)$, такая что $\widetilde{u} \le i \le u$, $u_k \le \varrho i_k$, $k = 1, \dots, d-1$,*
(3) $\mathrm{Card}(U_\varrho(M,N)) \le (\frac{\log N}{\log \varrho})^{d-1}$.

Доказательство. Утверждения (1) и (3) вытекают непосредственно из построения. Докажем (2).

Выберем $s_k = [\frac{\log i_k}{\log \varrho}]$, тогда $\varrho^{s_k} \le i_k \le \varrho^{s_k+1} \le \varrho i_k$, $k = 1, \dots, d-1$,

$$\frac{M}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} s_k + d-1}} \le \frac{M}{\prod_{k=1}^{d-1} i_k} \le i_d \le \frac{N}{\prod_{k=1}^{d-1} i_k} \le \frac{N}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} s_k}}.$$

Таким образом, лемма 3.2 доказана. □

Построим множество $V_{\varrho,\nu}(N, a_N, \widetilde{u}, u)$ пар d-мерных интервалов, лежащих в $\mathbb{R}^d$ и покрывающих область $A(N)$, следующим образом:

$$V_{\varrho,\nu}(N, a_N, \widetilde{u}, u) = \Big\{(\widetilde{v}, v) : \widetilde{v} = (\widetilde{w} - \widetilde{u}_\varrho, \widetilde{w}], v = (w - u_\varrho, w],$$

$$(\widetilde{u}_\varrho)_k = \frac{u_k}{\varrho^2}, \quad k = 1, \dots, d-1, \quad (\widetilde{u}_\varrho)_d = \frac{u_d}{\varrho^d},$$

$$\widetilde{w}_k = (l_k - 1) u_k \nu, \quad (u_\varrho)_k = \varrho u_k, \quad w_k = l_k u_k \nu,$$

$$k = 1, \dots, d, \quad l \in A([\frac{2^d N}{\nu^d a_N}] + 1)\Big\}.$$

Лемма 3.3. *Для любых $\varrho \in (1, \sqrt{2})$, $0 < \nu \le \frac{(\varrho-1)}{\varrho^d}$ и любых N, таких что $a_N > 2$ выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любого d-мерного интервала $(j, i], (2-\varrho)a_N \le |i-j| \le a_N, |i| \le N$ существуют пары $(\widetilde{u}, u) \in U_\varrho((2-\varrho)a_N, a_N)$, $(\widetilde{v}, v) \in V_{\varrho,\nu}(N, a_N, \widetilde{u}, u)$ такие, что $\widetilde{u} \le i-j \le u$, $\widetilde{v} \subset (j, i] \subset v$;*

(2) *для $(\widetilde{v}, v) \in V_{\varrho,\nu}(N, a_N, \widetilde{u}, u)$*

$$|v| = \varrho^{2d-1}a_N; \quad |\widetilde{v}| = \varrho^{1-2d}a_N;$$

число целых точек попавших в разность интервалов $\widetilde{v}, v$ будет оцениваться так:

$$|[v \setminus \widetilde{v}]| \le \frac{\varrho^{4d-2}-1}{\varrho^{2d-1}}a_N;$$

(3) *для всех достаточно больших $\frac{N}{\nu^d a_N}$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{Card}(V_{\varrho,\nu}(N, a_N, \widetilde{u}, u)) \le 2^d C_d \frac{N}{\nu^d a_N} \cdot \log^{d-1} \frac{N}{\nu^d a_N}.$$

Доказательство. Докажем пункт (1).

Рассмотрим d-мерный интервал $(j, i], (2-\varrho)a_N \le |i-j| \le a_N, |i| \le N$.

Во-первых, по лемме 3.2 существуют $(\widetilde{u}, u) \in U_\varrho((2-\varrho)a_N, a_N)$: $\widetilde{u} \le i-j \le u$.

Выберем l_k так, что $l_k = [\frac{i_k}{u_k\nu}] + 1$.

Заметим,что $i_k - u_k\nu \le \widetilde{w}_k \le i_k \le w_k \le i_k + u_k\nu$.

Проверим, что $l = (l_k)_{k=1}^d$ принадлежит $A([\frac{2^dN}{\nu^d a_N}] + 1)$.

Поскольку $u \ge i-j$, $(1-\nu)a_N \le |i-j| \le a_N$, по лемме 3.2 (2) получаем, что

$$\frac{i_k}{u_k\nu} \ge \frac{i_k}{\varrho(i_k-j_k)\nu} \ge \frac{1}{\varrho\nu} \ge \frac{1}{\varrho^2-\varrho} \ge 1, \quad k = 1, \dots, d-1,$$

$$\frac{i_d}{u_d\nu} = \frac{i_d\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1}s_k}}{a_N\nu} \ge \frac{i_d\prod_{k=1}^{d-1}(i_k-j_k)}{\varrho^{d-1}\nu a_N} \ge \frac{2-\varrho}{\varrho^{d-1}\nu} \ge 1,$$

$$|l| = \prod_k([\frac{i_k}{u_k\nu}] + 1) \le \frac{2^d|i|}{\nu^d|u|} \le \frac{2^dN}{\nu^d a_N}.$$

Проверим теперь, что построенные интервалы $\widetilde{v}, v$ соответствуют соотношению $\widetilde{v} \subset (j, i] \subset v$:

$$w_k - \varrho u_k \leq i_k + (\nu - \varrho) u_k \leq i_k - u_k \leq j_k.$$

Поскольку $(\nu + \varrho^{-d})\varrho^{d-1} \leq 1$, то

$$\begin{gathered}\widetilde{w}_k - \frac{u_k}{\varrho^2} \geq i_k - (\nu + \varrho^{-2}) u_k \\ = i_k - (\nu + \varrho^{-2})\varrho \widetilde{u}_k \geq i_k - \widetilde{u}_k \geq j_k, k \in \{1, \ldots, d-1\}; \\ \widetilde{w}_d - \frac{u_d}{\varrho^d} \geq i_d - (\nu + \varrho^{-d}) u_d \geq \\ i_d - (\nu + \varrho^{-d})\varrho^{d-1}\widetilde{u}_d \geq i_d - \widetilde{u}_d \geq j_d.\end{gathered}$$

Второе утверждение непосредственно следует из построения и леммы 3.2:

$$|v| = |u_\varrho| = \varrho^d |u| = \varrho^{2d-1} a_N.$$

$$|\widetilde{v}| = |\widetilde{u}_\varrho| = \varrho^{-d} u_d \prod_{1 \leq k \leq d-1} \varrho^{-2} u_k = \varrho^{1-2d} a_N.$$

$$|[v \setminus \widetilde{v}]| \leq (\varrho^{2d-1} - \varrho^{1-2d}) a_N = \frac{\varrho^{4d-2} - 1}{\varrho^{2d-1}} a_N$$

Утверждение (3) леммы непосредственно вытекает из леммы 3.1. Таким образом,

$$\begin{gathered}\operatorname{Card}(V_{\varrho,\nu}(N, a_N, \widetilde{u}, u)) \leq \operatorname{Card}(A([\frac{2^d N}{\nu^d a_N}] + 1)) \\ \leq 2^d C_d \frac{N}{\nu^d a_N} \cdot \log^{d-1} \frac{N}{\nu^d a_N}. \qquad \square\end{gathered}$$

Пусть $a \in \mathbb{N}_1^d : |a| = a_N$. Обозначим $\zeta = \sum_{k=1}^d \mathbb{I}_{\{a_k \nu \geq 1\}}$.

Замечание 3.2. Рассмотрим случай $p < \infty$.

Предположим, что $1/\nu = z_N \sim \log N$, тогда значение ζ не может превосходить p при всех достаточно больших N.

Действительно,

$$|a| = a_N = \log^{p+o(1)} N$$
$$= \prod_{k: a_k\nu \ge 1} a_k \prod_{k: a_k\nu < 1} a_k \ge \log^{\zeta} N(1+o(1)),$$
$$p + o(1) \ge \zeta . |a| = a_N = \log^{p+o(1)} N =$$
$$\prod_{k: a_k\nu \ge 1} a_k \prod_{k: a_k\nu < 1} a_k \ge \log^{\zeta} N(1+o(1)),$$
$$p + o(1) \ge \zeta .$$

Построим множество $V_\nu(N, a_N, a)$ пар d-мерных интервалов, лежащих в $\mathbb{R}^d$ и покрывающих область $A(N)$, следующим образом:

$$V_\nu(N, a_N, a) = \Big\{ (\widetilde{v}, v) : \widetilde{v} = (\widetilde{w} - \widetilde{u}_\nu, \widetilde{w}], v = (w - u_\nu, w],$$
$$\text{для} \quad a_k\nu \ge 1 \quad \text{определим } (\widetilde{u}_\nu)_k = a_k(1-\nu),$$
$$\widetilde{w}_k = (l_k - 1)a_k\nu, \quad (u_\nu)_k = a_k(1+\nu), \quad w_k = l_k a_k \nu,$$
$$\text{для } a_k\nu < 1 \quad \text{определим} \quad (\widetilde{u}_\nu)_k = (u_\nu)_k = a_k, \quad \widetilde{w}_k = w_k = l_k,$$
$$k = 1, \dots, d, \quad l \in A([\frac{2^\zeta N}{\nu^d a_N}] + 1) \bigcap A(2^\zeta N) \Big\}.$$

Лемма 3.4. *Для любых $0 < \nu \le 1$ и любых N выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любого d-мерного интервала $(j, i] : i - j = a, |i| \le N$, существует пара $(\widetilde{v}, v) \in V_\nu(N, a_N, a)$ такая, что $\widetilde{v} \subset (j, i] \subset v$;*

(2) *для $(\widetilde{v}, v) \in V_\nu(N, a_N, a)$ справедливы равенства*

$$|v| = (1+\nu)^\zeta a_N, \quad |\widetilde{v}| = (1-\nu)^\zeta a_N;$$

число целых точек попавших в разность интервалов $v, \widetilde{v}$ будет оцениваться так:

$$|[v \setminus \widetilde{v}]| \le 2^d d\nu a_N;$$

(3) *для всех достаточно больших $\frac{N}{\nu^d a_N}$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{Card}(V_\nu(N, a_N, a)) \le (2^d C_d N \log^{d-1} N) \bigwedge (2^d C_d \frac{N}{\nu^d a_N} \cdot \log^{d-1} \frac{N}{\nu^d a_N}).$$

Доказательство.

Докажем пункт (1).

Рассмотрим d-мерный интервал $(j,i]$, $i-j=a$, $|i|\le N$.

Выберем l_k так, что $l_k = \begin{cases} [\frac{i_k}{a_k\nu}]+1, & \text{если} \quad a_k\nu\ge 1,\\ i_k, & \text{если} \quad a_k\nu<1. \end{cases}$

Заметим,что $i_k - a_k\nu \le \widetilde{w}_k \le i_k \le w_k \le i_k + a_k\nu$, если $u_k\nu \ge 1$.

Проверим, что $l=(l_k)_{k=1}^d$ принадлежит $A([\frac{2^\zeta N}{\nu^d a_N}]+1)$.

Поскольку $i-j=a$, получаем, что

$$\frac{i_k}{a_k\nu}\ge\frac{1}{\nu}\ge 1,$$

$$|l| = \prod_{k:a_k\nu\ge 1}([\frac{i_k}{a_k\nu}]+1)\prod_{k:a_k\nu<1} i_k \le \frac{2^\zeta|i|}{\nu^\zeta\prod_{k:a_k\nu\ge 1}a_k}$$
$$\le 2^\zeta|i|\bigwedge\frac{2^\zeta|i|}{\nu^d|u|}\le 2^\zeta N\bigwedge\frac{2^\zeta N}{\nu^d a_N}.$$

В зависимости от поведения последовательности a_N и размера ν та или иная оценка становится более точной.

Проверим теперь, что построенные интервалы $\widetilde{v}, v$ соответствуют соотношению $\widetilde{v}\subset(j,i]\subset v$:

$$w_k-(1+\nu)a_k\le i_k-a_k=j_k,$$
$$\widetilde{w}_k-a_k(1-\nu)\ge i_k-(\nu+1-\nu)a_k=j_k, \quad \text{если} \quad a_k\nu\ge 1;$$
$$w_k-a_k=i_k-a_k=j_k, \quad \text{если} \quad a_k\nu<1.$$

Второе утверждение непосредственно следует из построения и леммы 3.2:

$$|v|=|u_\nu|=\prod_{k:a_k\nu\ge 1}(1+\nu)a_k\prod_{k:a_k\nu<1}a_k=(1+\nu)^\zeta a_N.$$

$$|\widetilde{v}|=|\widetilde{u}_\nu|=\prod_{k:a_k\nu\ge 1}(1-\nu)a_k\prod_{k:a_k\nu<1}a_k=(1-\nu)^\zeta a_N.$$

$$|[v\setminus\widetilde{v}]|\le 2^d d\nu a_N$$

Утверждение (3) леммы непосредственно вытекает из леммы 3.1. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(V_{\varrho,\nu}(N,a_N,a)) &\le \mathrm{Card}(A(2^{\zeta}N)\bigcap A([\frac{2^{\zeta}N}{\nu^d a_N}]+1)) \\ &\le (2^d C_d N\log^{d-1}N)\bigwedge(2^d C_d\frac{N}{\nu^d a_N}\cdot\log^{d-1}\frac{N}{\nu^d a_N}). \quad \square\end{aligned}$$

Лемма 3.5. *Пусть $X_k, k\in\mathbb{N}$ н.о.р.с.в. Предположим, что выполнены условия* (1), (2) *и* (3).

Пусть $0<h_n\le\varepsilon_n$ и $nh_n^2\to\infty$, а $\varepsilon_n\to 0$ сколь угодно медленно.

Тогда равномерно по $x\in[m(h_n),m(\varepsilon_n)]$

$$P(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\ge x)=\frac{p(x)^n}{h\sigma\sqrt{2\pi n}}(1+o(1)), \tag{16}$$

где h удовлетворяет уравнению $m(h)=x$.

Этот результат вытекает, например, из теоремы Розовского [3].

Лемма 3.6. *Пусть $f\in C^n(U_{x_0})$, $|f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)|\le M(x-x_0)^{\upsilon}$ $x_0<x\in U_{x_0}$, $\upsilon\in(0,1]$. Здесь U_{x_0} некоторая окрестность точки x_0.*

Тогда при $x\to x_0+0$

$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+O((x-x_0)^{n+\upsilon}).$$

Для доказательства достаточно разложить функцию f в ряд Тейлора с остатком Лагранжа.

Замечание 3.3. Предположим, что выполнены условия (1), (2), (3), (15).

Тогда если взять в качестве $f(x)=m(x)$, $x_0=0$, то для $x\in[0,t_0/2]$ выполнено $|m'(x)-m'(0)|\le Mx^{\upsilon}$.

Прежде заметим, что

$$\phi(x)=e^{\tilde{t}x},\quad \tilde{t}=\frac{\log\phi(x)}{x}=\sigma^2(y)\frac{x}{2}<\sigma^2(y)\frac{t_0}{2},\quad y\in(0,x).$$

$$|m'(x)-m'(0)|=|\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}-m^2(x)-\sigma^2|\le|\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}-\sigma^2|+m^2(x).$$

Пусть F - функция X_n, тогда можно записать следующую цепочку неравенств

$$|\frac{\phi^{''}(x)}{\phi(x)}-\sigma^2|\leq\int\limits_0^\infty t^2(e^{tx}-1)dF(t)+\int\limits_{-\infty}^0 t^2(1-e^{(t-\widetilde{t})x})dF(t)\leq$$

$$\int\limits_{0<xt\leq 1} t^2(e^{tx}-1)dF(t)+\int\limits_{-1\leq x(t-\widetilde{t})\leq 0,t<0} t^2x|t-\widetilde{t}|dF(t)+$$

$$\int\limits_{xt>1} t^2(e^{tx}-1)dF(t)+x^v\int\limits_{x(t-\widetilde{t})<-1,t<0}|t-\widetilde{t}|^v|t|^2dF(t)\leq$$

$$x^v(e\int\limits_{0<xt\leq 1} t^{2+v}dF(t)+\int\limits_{xt>1} t^{2+v}(e^{tx}-1)dF(t)+\int\limits_{-\infty}^0|t-\widetilde{t}|^v|t|^2dF(t))\leq$$

$$x^v((\sigma^2(y)\frac{t_0}{2}+e)\int\limits_{-\infty}^\infty|t|^{2+v}dF(t)++\int\limits_{1/t_0}^\infty t^{2+v}(e^{tx}-1)dF(t))\leq$$

$$x^v((\sigma^2(y)\frac{t_0}{2}+e)E|X_n|^{2+v}+C).$$

В силу правостороннего условия Крамера последний интеграл как непрерывная функция от x ограничен на отрезке $[0,t_0/2]$.

Далее аналогично оцениваем $m^2(x)$

$$m^2(x)\leq(\int\limits_{-\infty}^\infty te^{tx}dF(t))^2\leq x^v(eE|X_n|^{1+v}+C)^2.$$

Следовательно $|m^{'}(x)-m^{'}(0)|\leq Mx^v$.

Обозначим $[a]=([a_1],\dots,[a_d])$, $\Delta=\frac{a_N}{|[a]|}$ где $a\in\mathbb{R}_0^d$.

Лемма 3.7. *Предположим, что выполнено* (1), (2), (3), (15), (17). *Тогда равномерно по* u *из фиксированного интервала и для любых* $a\in\mathbb{R}_0^d:|[a]|\to\infty$, $\Delta=o(\sqrt{\frac{a_N}{z_N}})$, *справедливо следующее утверждение*

$$P(S_{(0,a]}\geq a_N(\alpha_N+u\sigma\frac{\log z_N}{\sqrt{2a_Nz_N}}))=$$
$$z_N^{-1/2}\exp\{-\Delta(z_N+u\log z_N+o(\log_2 N))\}.$$

Предположим, что $|\Delta - 1| = o(\frac{\log z_N}{z_N})$, *тогда*

$$P(S_{(0,a]} \geq a_N(\alpha_N + u\sigma\frac{\log z_N}{\sqrt{2a_N z_N}})) =$$
$$\exp\{-(z_N + (u+1/2)\log z_N + o(\log_2 N))\}.$$

Доказательство. Так как $c(\alpha_N) \to \infty$, то $\alpha_N \to 0$, но $m(\cdot)$ строго возрастает и $m(t_N^\star) = \alpha_N, m(0) = 0$. Таким образом, $t_N^\star \to 0$.

Используя разложение в ряд Тейлора в точке $t_N^\star \to 0$ как в лемме 3.6, определение $p(\alpha_N)$, получим

$$\alpha_N = m(t_N^\star) = \sigma^2 t_N^\star + O((t_N^\star)^{1+v}),$$
$$\log p(\alpha_N) = -\frac{1}{c(\alpha_N)} = \log\phi(t_N^\star) - t_N^\star\alpha_N = -\frac{(t_N^\star)^2\sigma^2}{2} + O((t_N^\star)^{2+v}).$$

Следовательно,

$$t_N^\star = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{c(\alpha_N)}} + O((\frac{1}{c(\alpha_N)^{1/2+v/2}})) = \frac{\sqrt{2z_N}}{\sigma\sqrt{a_N}} + O((\frac{z_N}{a_N})^{1/2+v/2}), \tag{20}$$
$$\alpha_N = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{c(\alpha_N)}} + O((\frac{1}{c(\alpha_N)^{1/2+v/2}})) = \frac{\sigma\sqrt{2z_N}}{\sqrt{a_N}} + O((\frac{z_N}{a_N})^{1/2+v/2}). \tag{21}$$

Применим лемму 3.5 с $n = |[a]|$ и x равным

$$x = \Delta(\alpha_N + w\sigma\frac{\log_2 N}{\sqrt{2z_N a_N}})) = \frac{\Delta\sigma}{\sqrt{a_N}}(\sqrt{2z_N} + u\frac{\log z_N}{\sqrt{2z_N}}) + O(\frac{z_N}{a_N})^{1/2+v/2}. \tag{22}$$

Используя (20), (21), получим:

$$\frac{\sigma t_N^\star}{\sqrt{2}} + \frac{x-\alpha_N}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + O((\frac{z_N}{a_N})^{1/2+v/2}) =$$
$$\frac{\Delta}{\sqrt{2a_N}}(\sqrt{2z_N} + u\frac{\log z_N}{\sqrt{2z_N}}) + O((\frac{z_N}{a_N})^{1/2+v/2}),$$
$$(\frac{\sigma t_N^\star}{\sqrt{2}} + \frac{x-\alpha_N}{\sqrt{2}\sigma})^2 = \frac{\Delta^2}{a_N}(z_N + u\log z_N +$$
$$+u^2\frac{\log^2 z_N}{4z_N} + O((\frac{z_N}{a_N})^{1+v/2}) = \frac{\Delta^2}{a_N}(z_N + u\log z_N + o(\log_2 N)).$$

Пусть $h = t^\circ_N$ – решение уравнения $m(t^\circ_N) = x$. Решение существует, так как функция $m(\cdot)$ возрастающая и непрерывная. Ясно, что $x \to 0$ и $t^\circ_N \to 0$.

По теореме Лагранжа о среднем имеем

$$x - \alpha_N = m(t^\circ_N) - m(t^\star_N) = \sigma^2(y')(t^\circ_N - t^\star_N), y' \in (t^\star_N, t^\circ_N).$$

(подразумевается, что $y' \in (t^\circ_N, t^\star_N)$, если $t^\circ_N < t^\star_N$. Кроме того, можно записать разложение функции $\sigma^2(y')$ в ряд Тейлора в нуле

$$\sigma^2(y') = \sigma^2 + O((t^\star_N)^v) = \sigma^2 + O((\frac{z_N}{a_N})^{v/2}).$$

С помощью (20), (21) получим

$$t^\circ_N = \frac{x - \alpha_N}{\sigma^2} + t^\star_N + O(\frac{z_N}{a_N})^{1/2+v/2} = \frac{x}{\sigma^2} + O(\frac{z_N}{a_N})^{1/2+v/2}.$$

Кроме того, выполнено

$$\sqrt{|[a]|}t^\circ_N = t^\circ_N\sqrt{a_N/\Delta} \sim \sqrt{2z_N\Delta}/\sigma \to \infty.$$

Вспомним определение функции $p(\cdot)$ и разложим $\log\phi(t^\circ_N)$ в ряд Тейлора с остатком в форме Лагранжа в точке $t^\star_N$

$$\log p(x) = \log\phi(t^\circ_N) - t^\circ_N x =$$
$$\log\phi(t^\star_N) - t^\circ_N x + m(t^\star_N)(t^\circ_N - t^\star_N) + \sigma^2(y)\frac{(t^\circ_N - t^\star_N)^2}{2} =$$
$$\log p(\alpha_N) - t^\circ_N(x - \alpha_N) + \frac{\sigma^2(y)(x-\alpha_N)^2}{2\sigma^4(y')} =$$
$$\log p(\alpha_N) - t^\star_N(x - \alpha_N) - \frac{(x-\alpha_N)^2}{2\sigma^2} + O((\frac{z_N}{a_N})^{1+v/2}) =$$
$$\log p(\alpha_N) + \frac{\sigma^2(t^\star_N)^2}{2} - (\frac{\sigma t^\star_N}{\sqrt{2}} + \frac{x-\alpha_N}{\sqrt{2}\sigma})^2 + O((\frac{z_N}{a_N})^{1+v/2}) =$$
$$-(\frac{\sigma t^\star_N}{\sqrt{2}} + \frac{x-\alpha_N}{\sqrt{2}\sigma})^2 + O((\frac{z_N}{a_N})^{1+v/2}) =$$
$$= -\frac{\Delta^2}{a_N}(z_N + u\log z_N + o(\log_2 N)).$$

где $y \in (t^\star_N, t^\circ_N)$.

По лемме 3.5 окончательно получаем

$$P(S_{(0,a]} \geq a_N(\alpha_N + u\sigma\frac{\log z_N}{\sqrt{2a_N z_N}})) = \frac{p(x)^{|[a]|}}{\sigma\sqrt{2\pi|[a]|}t_N^\circ}(1+o(1)) =$$
$$z_N^{-1/2}\exp\{-\Delta(z_N + u\log z_N + o(\log_2 N))\}.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Замечание 3.4. Допустим, что $\gamma < \infty$.

Используя разложение в ряд Тейлора в точке $t_N^\star \to 0$, определение $p(\alpha_N)$ и (14), получим

$$m(t_N^\star) = \sigma^2 t_N^\star + \frac{\gamma(t_N^\star)^2}{2} + o((t_N^\star)^2) = \alpha_N,$$

$$t_N^\star = \frac{\alpha_N}{\sigma^2} - \frac{\gamma\alpha_N^2}{2\sigma^6} + o(\alpha_N^2),$$

$$-\frac{1}{c(\alpha_N)} = \log\phi(t_N^\star) - t_N^\star\alpha_N = -\frac{(t_N^\star)^2\sigma^2}{2} - \frac{\gamma(t_N^\star)^3}{3} + o((t_N^\star)^3),$$

$$-\frac{1}{c(\alpha_N)} = -\frac{\alpha_N^2}{2\sigma^2} + \frac{\gamma\alpha_N^3}{6\sigma^6} + o(\alpha_N^3).$$

Методом неопределенных коэффициентов можно получить

$$\alpha_N = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{c(\alpha_N)}} + \frac{\gamma}{3\sigma^2 c(\alpha_N)}(1+o(1)) = \frac{\sigma\sqrt{2z_N}}{\sqrt{a_N}} + \frac{\gamma z_N}{3\sigma^2 a_N}(1+o(1)), \quad (23)$$

$$t_N^\star = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{c(\alpha_N)}} - \frac{2\gamma}{3\sigma^4 c(\alpha_N)}(1+o(1)) = \frac{\sqrt{2z_N}}{\sigma\sqrt{a_N}} - \frac{2z_N\gamma}{3\sigma^4 a_N}(1+o(1)). \quad (24)$$

Лемма 3.8 (Джун, Эрдеш, 1952)**.** *Для произвольных событий $A_1, \ldots, A_n$ имеем:*

$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \geq \frac{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}{\sum_{k=1}^n P(A_k) + \sum_{i\neq j} P(A_i \cap A_{N_j})}.$$

Лемма 3.9. *Пусть X_n, $n \in \mathbb{N}_0^d$ – независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины.*

Пусть $K_A, A \subset (0, n]$ полу-аддитивная неотрицательная функция множеств $K_A + K_B \leq K_{A \cup B}$, $A \cap B = \emptyset$. Предположим, что

$$P(S_A \geq -(K_A)^{1/p}) \geq r > 0, \quad A \subset (0, n], p > 1.$$

Тогда

$$P(\max_{(i,k] \subset (0,n]} (S_{(i,k]} > x) \leq r^{-2d} P(S_{(0,n]}$$
$$> x - (2d)^{1/q} (K_{(0,n]})^{1/p}), 1/p + 1/q = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим двойной максимум и максимум по d-мерному индексу как повторный

$$\widetilde{S}_k = \max_{p \in (0,k]} \max_{l \in (0,p]} S_{(l,p]}, k \in (0, n]$$

$$\widetilde{\widetilde{S}}_{k,s} = \max_{p_s \in (0,k_s]} \ldots \max_{p_1 \in (0,k_1]} \max_{l \in (0,p]} S_{(l,p^{(s)}]},$$

где $\quad p^{(s)} = (p_1, \ldots, p_s, k_{s+1}, \ldots, k_d), s = 1, \ldots, d.$

Введем векторы

$$k^0 = n, k^1 = (n_1 - 1, \ldots, n_{d-1} - 1, k_d^1),$$
$$k^2 = (n_1 - 2, \ldots, k_{d-1}^2, k_d^1 - 1),$$
$$\ldots$$
$$k^{d-1} = (n_1 - d + 1, k_2^{d-1}, \ldots, k_{d-2}^3 - d, k_{d-1}^2 - d + 1, k_d^1 - d + 2),$$
$$k^d = (k_1^d, k_2^{d-1} - 1, \ldots, k_{d-2}^3 - d - 1, k_{d-1}^2 - d, k_d^1 - d + 1),$$
$$k^d < k^{d-1} < \ldots < k^1 < k^0 = n.$$

Определим события

$$D_{k^{d-s+1}} = \{\widetilde{\widetilde{S}}_{k^{d-s+1} - 1^0, s} < x, \widetilde{\widetilde{S}}_{k^{d-s+1}, s-1} \geq x\}, k_s^{d-s+1} > 1,$$
$$D_{k^{d-s+1}} = \{\widetilde{\widetilde{S}}_{k^{d-s+1}, s-1} \geq x\}, k_s^{d-s+1} = 1,$$
$$D_{k^d} = \{\widetilde{\widetilde{S}}_{k^d - 1^0} < x, \max_{l \in (0,k^d]} S_{(l,k^d]} \geq x\}, k_1^d > 1,$$
$$D_{k^d} = \{\max_{l \in (0,k^d]} S_{(l,k^d]} \geq x\}, k_1^d = 1.$$

Эти события будут связаны следующим образом:

$$\bigcup_{k_d^1\in(0,n_d]} D_{k^1}\supset\{\widetilde{\widetilde{S}}_n>x\},\quad D_{k^{d-s}}\subset\bigcup_{k_s^{d-s+1}\in(0,k_s^{d-s}]} D_{k^{d-s+1}},$$

$$\bigcup_{k_d^1\in(0,n_d]}\bigcup_{k_{d-1}^2\in(0,k_{d-1}^1]}\cdots\bigcup_{k_1^d\in(0,k_1^{d-1}]} D_{k^d}\supset\{\widetilde{\widetilde{S}}_n>x\}.$$

Пусть теперь

$$\widetilde{S}_{i,k^d}=\max_{l\in(i,k^d]}S_{(l,k^d]},\ i\in(0,k^d],$$

$$\widetilde{S}_{i,k^d,s}=\max_{l_s\in(i_s,k_s^d]}\ldots\max_{l_d\in(i_d,k_d^d]}S_{(l^{(s)},k^d]},$$

$$\text{где}\quad l^{(s)}=(i_1,\ldots,i_{s-1},l_s,\ldots,l_d),\ s=1,\ldots,d.$$

Определим векторы

$$\begin{gathered}
i^1=(i_1^1,1,\ldots,1,),\\
i^2=(i_1^1+1,i_2^2,\ldots,2,),\\
\ldots\\
i^{d-1}=(i_1^1+d-2,i_2^2+d-3\ldots,i_{d-1}^{d-1},d-1),\\
i^d=(i_1^1+d-1,i_2^2+d-2,\ldots,i_{d-1}^{d-1}+1,i_d^d),\\
i^d>i^{d-1}>\ldots>i^1>i^0=0.
\end{gathered}$$

Рассмотрим следующие события

$$\begin{gathered}
F_{i^s,k^d}=\{\widetilde{S}_{i^s+1^0,k^d,s}<x,\widetilde{S}_{i^s,k^d,s+1}\ge x\},\ i_s^s<k_s^d-1,\\
F_{i^s,k^d}=\{\widetilde{S}_{i^s,k^d,s-1}\ge x\},\ i_s^s=k_s^d-1,\\
F_{i^d,k^d}=\{\widetilde{S}_{i^d+1^0,k^d}<x,S_{(i^d,k^d]}\ge x\},\ i_1^d<k_1^d-1\\
F_{k^d-1^0,k^d}=\{S_{(k^d-1^0,k^d]}\ge x\}.
\end{gathered}$$

Отметим, что

$$D_{k^d}\subset\bigcup_{i_1^1\in(0,k_1^d]}F_{i^1,k^d},\quad F_{i^s,k^d}\subset\bigcup_{i_s^s\in(i_s^{s-1},k_s^d]}F_{i^s,k^d},$$

$$\bigcup_{k_d^1\in(0,n_d]}\cdots\bigcup_{k_1^d\in(0,k_1^{d-1}]}\bigcup_{i_1^1\in(0,k_1^d]}\bigcup_{i_2^2\in(i_2^1,k_2^d]}\cdots\bigcup_{i_d^d\in(i_d^{d-1},k_d^d]}F_{i^d,k^d}\supset\{\widetilde{\widetilde{S}}_n>x\}.$$

Пусть

$$E_{i,k} = \{S_{(0,k]\setminus(0,i]} \geq -(2K_{(0,k]\setminus(0,i]})^{1/p}\}, i \leq k,$$
$$P(E_{i,k}) \geq r.$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$\sum_{s=1}^{2d} (a_s)^{1/p} \leq (2d)^{1/q} \left(\sum_{s=1}^{2d} a_s \right)^{1/p}, a_s \geq 0, 1/p + 1/q = 1,$$

и получим

$$\sum_{s=1}^{d} ((K_{(0,i^{d-s+1}]\setminus(0,i^{d-s}]}))^{1/p} + (K_{(0,k^{d-s}]\setminus(0,k^{d-s+1}]}))^{1/p})$$
$$\leq (2d)^{1/q}(K_{(0,n]\cup(0,i^d]\setminus(0,k^d]}))^{1/p} \leq (2d)^{1/q}(K_{(0,n]})^{1/p},$$

$$\bigcup_{k_d^1 \in (0,n_d]} \cdots \bigcup_{k_1^d \in (0,k_1^{d-1}]} \bigcup_{i_1^1 \in (0,k_1^d]} \bigcup_{i_2^2 \in (i_2^1, k_{d-1}^d]} \cdots \bigcup_{i_d^d \in (i_d^{d-1}, k_d^d]} F_{i^d,k^d} \bigcap$$
$$\bigcap_{s=1}^{d} E_{i^{s-1},i^s} \bigcap_{s=1}^{d} E_{k^{d-s+1},k^{d-s}} \subset \{S_{(0,n]} > x - (2d)^{1/q}(K_{(0,n]})^{1/p}\}.$$

Заметим, что события F_{i^d,k^d}, E_{i^{s-1},i^s}, $E_{k^{d-s+1},k^{d-s}}$, при $s = 1, \dots, d$ независимы.

Таким образом,

$$r^{2d} P(\widetilde{\widetilde{S}}_n > x) \leq P(S_{(0,n]} > x - (2d)^{1/q}(K_{(0,n]})^{1/p})). \quad \square$$

Лемма 3.10. *Предположим, что выполнены условия* (1) *и* (2).
Пусть $i, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0^d$. *Тогда*

$$P(\max_{(l,m] \subset (i,k] \subset (0,n]} S_{(i,k]} > x) \leq 2^{2d} P(S_{(0,n]} > x - 2\sqrt{dD_{l,m,n}}),$$

где $D_{l,m,n} = D(S_{(0,n]} - S_{(l,m]})$.

Доказательство. Используя d-мерный аналог неравенства для двойного максимума для случайного поля из предыдущей леммы

$(p = q = 2)$, получим

$$P(\max_{(l,m]\subset(i,k]\subset(0,n]} S_{(i,k]} > x) = P(\max_{0<i\le l,m<k\le n}(S_{(i,k]\setminus(l,m]}) > x - S_{(l,m]})$$
$$= \int_{\mathbb{R}} P(\max_{0<i\le l,m<k\le n}(S_{(i,k]\setminus(l,m]}) > x-y)dP(S_{(l,m]} < y)$$
$$\le 2^{2d}\int_{\mathbb{R}} P(S_{(0,n]\setminus(l,m]} > x - y - 2\sqrt{dD_{l,m,n}})dP(S_{(l,m]} < y) =$$
$$2^{2d}P(S_{(0,n]\setminus(l,m]} > x - S_{(l,m]} - 2\sqrt{dD_{l,m,n}})$$
$$= 2^{2d}P(S_{(0,n]} > x - 2\sqrt{dD_{l,m,n}}). \qquad \square$$

Предположим, что в последующих леммах этого параграфа условия теоремы 2.1 выполнены.

Лемма 3.11. *Пусть $1 \le i \le k$, $\hat{i} = (i, 0, \dots, 0)$.*
Тогда для любых x, q и $t \in (0, t_N^\star)$ будет выполняться:

$$P(S_{(0,k^0]} > x, S_{(\widehat{i},\widehat{i}+k^0]} > x) \le (\phi(t_N^\star))^{k-i}e^{-t_N^\star q}$$
$$+P(S_{(0,k]} > x)(\phi(t))^i e^{-t(x-q)}.$$

Доказательство леммы 3.11 можно найти в работе Девельса, Девроя и Линча [5].

Следующая лемма очень близка к лемме 3.11.

Лемма 3.12. *Пусть $i, k \in \mathbb{N}_0^d$, $1 \le i \le k$.*
Тогда для любых x, q и $\tau \in (0, t_N^\star)$ будет выполняться:

$$P(S_{(0,k]} > x, S_{(i,i+k]} > x) \le (\phi(t_N^\star))^{|k-i|}e^{-t_N^\star q} + P(S_{(0,k]}$$
$$> x)(\phi(\tau))^{|k|-|k-i|}e^{-\tau(x-q)}.$$

Доказательство.

$$P(S_{(0,k]} > x, S_{(i,i+k]} > x) \le P(S_{(i,k]} > q)+$$
$$+P(S_{(i,i+k]\setminus(i,k]} > x - q)P(S_{(0,k]} > x).$$

Далее, применяя неравенство Йенсена, завершаем доказательство. $\square$

Обозначим $A_{(i,j]} = \{S_{(i,j]} \ge x\}$.

Применим лемму 3.11 с

$$x = a_N \alpha_N + (\chi - u)\frac{\log z_N}{t_N^\star},$$
$$q = a_N \alpha_N - \log \phi(t_N^\star)\frac{i}{t_N^\star} + (\chi + 1/2)\frac{\log z_N}{t_N^\star} + \frac{v}{t_N^\star}\log i,$$

где $u, v \in \mathbb{R}$.

Лемма 3.13. *Пусть* $\hat{i} = (i, 0, \dots, 0)$,

Тогда для всех $\tau \in (0, t_N^\star)$ *и* $1 \le i \le a_N$ *будет выполняться*

$$P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\hat{i},\hat{i}+a_N^0]})$$
$$\le e^{-z_N} i^{-v} z_N^{-\chi-1/2} + P(A_{(0,a_N^0]})e^{-\theta i} z_N^{(u+1/2)\frac{\tau}{t_N^\star}} \cdot i^{\frac{v\tau}{t_N^\star}},$$
$$\theta = \tau\left(\frac{\log \phi(t_N^\star)}{t_N^\star} - \frac{\log \phi(\tau)}{\tau}\right) > 0.$$

Заметим, что $\theta > 0$, так как $E^{1/t}e^{tX} < E^{1/s}e^{sX}$, для $0 < t < s$, причем неравенство строгое, поскольку рассматриваемые случайные величины невырождены.

Аналогичным образом, пользуясь леммой 3.12 с

$$x = |a|\alpha_N + (\chi - u)\frac{\log z_N}{t_N^\star}$$
$$q = |a|\alpha_N - \log \phi(t_N^\star)\frac{(|a| - |a - i|)}{t_N^\star} + (\chi + 1/2)\frac{\log z_N}{t_N^\star} + \frac{v}{t_N^\star}\log |i|,$$

где $u, v \in \mathbb{R}$, получаем следующую лемму.

Лемма 3.14. *Пусть* $i, a \in \mathbb{N}_0^d$, $i \le a$, $|a| = a_N$,

Тогда для всех $\tau \in (0, t_N^\star)$ *и* $i \le a$, $|a| - |a - i| \ge |i|$ *будет выполняться*

$$P(A_{(0,a]} \cap A_{(i,i+a]}) \le e^{-z_N}|i|^{-v} z_N^{-\chi-1/2} +$$
$$+ P(A_{(0,a]})e^{-\theta(|a|-|a-i|)} z_N^{(u+1/2)\frac{\tau}{t_N^\star}} \cdot |i|^{\frac{v\tau}{t_N^\star}}$$
$$\le e^{-z_N}|i|^{-v} z_N^{-\chi-1/2} + P(A_{(0,a]})e^{-\theta(|i|)} z_N^{(u+1/2)\frac{\tau}{t_N^\star}} \cdot |i|^{\frac{v\tau}{t_N^\star}},$$

$\theta > 0,$ – *такое же, как и в предыдущей лемме* .

4. Доказательство теоремы 2.1.

В этом параграфе будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2.1.

Лемма 4.1.

$$\limsup \mathbb{L}(S_N) \le \begin{cases} \chi+1 \ \ \textit{п.н.}, & \textit{если } p<\infty, \\ \chi+3 \ \textit{п.н.}, & \textit{если выполнено } (18). \end{cases}$$

Доказательство. Возьмем произвольные $0<\epsilon<1/2$.

1) Предположим, что выполнено (18).

Пусть $j \in \mathbb{N}, j > 2^d$ и рассмотрим последовательность $T_j : j = (z(T_j))^2$.

Пусть

$$x_{T_j} = a(T_j)(\alpha_{T_j} + (2d+3/2+\epsilon)\sigma \frac{\log z(T_j)}{\sqrt{2z(T_j)a(T_j)}}).$$

Обозначим $s_{T_j} = \frac{a(T_j)}{j}$.

Заметим, что $\frac{a(T_j)}{a(T_{j-1})} = 1 + o(\frac{\log j}{z(T_j)})$.

Это следует, из того, что $\log a(T_j) - \log a(T_{j-1}) = \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}}(\sqrt{j} - \sqrt{j-1}) - (d-1)(\log j - \log(j-1)) = \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}}\frac{j^{-\frac{1}{2}}}{2} + o(j^{-\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}}\frac{z(T_j)^{-1}}{2} + o(1/z(T_j))$.

Пусть $T_{j-1} \le N < T_j$. Тогда $S_N \le S_{T_j} = \max\limits_{\substack{|k| \le T_j \\ |k-i| \le a(T_j)}} S_{(i,k]}$.

Пусть $r \in \{1,\ldots,j+1\}$, $\varrho = 1 + 1/3r^{-\frac{1}{2}}$, $1/\nu = 3r^{\frac{1}{2}} + 2^d$.

Рассмотрим произвольный d-мерный интервал $(i,k] : r-1 \le \frac{|k-i|}{s_{T_j}} < r$, $|k| \le T_j$. По лемме 3.2 вектору $k-i$ можно сопоставить пару векторов $(\widetilde{u}, u) \in U_\varrho((r-1)s_{T_j}, rs_{T_j})$, удовлетворяющих соотношению $\widetilde{u} \le k-i \le u$.

По лемме 3.3 интервалу $(i,k]$ ставим в соответствие пару интервалов $(\widetilde{v}, v) \in V_{\varrho,\nu}(T_j, rs_{T_j}, \widetilde{u}, u)$, так что $\widetilde{v} \subset (i,k] \subset v$.

Заметим, что $|v| = (1+1/3r^{-\frac{1}{2}})^{2d-1}(rs_{T_j}) = c(r,d)rs_{T_j}$;

$$|[v \setminus \widetilde{v}]| \le ((1+r^{-\frac{1}{2}})^{4d-2} - 1)rs_{T_j} \le$$
$$r^{-\frac{1}{2}}s_{T_j}\sum_{k=1}^{4d-2} C_{4d-2}^k r^{-k/2} \le r^{\frac{1}{2}}s_{T_j}\sum_{k=0}^{4d-2} C_{4d-2}^k = 2^{4d-2}r^{\frac{1}{2}}s_{T_j}.$$

Далее будем использовать обозначения

$$D_{\widetilde{v},v} = P\{\max_{\widetilde{v}\subset(i,k]\subset v} S_{(i,k]} > x_{T_j}\}.$$

Оценим вероятности

$$P_j = P(S_{T_j} \geq x_{T_j}) \leq \sum_{r=1}^{j+1} \sum_{(\widetilde{u},u)} \sum_{(\widetilde{v},v)} D_{\widetilde{v},v}.$$

Вторую сумму берем по $(\widetilde{u},u) \in U_\varrho((r-1)s_{T_j}, rs_{T_j})$, третью по $(\widetilde{v},v) \in V_{\varrho,\nu}(T_j, rs_{T_j}, \widetilde{u}, u)$.

Применим лемму 3.10:

$$D_{\widetilde{v},v} \leq 2^{2d} P(S_{(0,v]} > x_{T_j} - 2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac{1}{2}} s_{T_j}}).$$

Вследствие того, что случайные величины одинаково распределены, достаточно рассмотреть вместо $(0,v]$ параллелепипеды вида $(rs_{T_j}c(r,d))^0$.

$$\begin{gathered} P_j \leq 2^{2d} \sum_{r=1}^{j+1} \mathrm{Card}(U_\varrho((r-1)s_{T_j}, rs_{T_j})) \\ \mathrm{Card}(V_{\varrho,\nu}(T_j, rs_{T_j}, ((r-1)s_{T_j}\varrho^{1-d})^0, (rs_{T_j}\varrho^{d-1})^0) \\ P(S_{(0,(rs_{T_j}c(r,d))^0]} > x_{T_j} - 2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac{1}{2}} s_{T_j}}). \end{gathered}$$

Применяя оценку мощности из лемм 3.2, 3.3 и определение z_N, продолжим оценку вероятностей:

$$\begin{gathered} P_j \leq C \sum_{r=1}^{j+1} \frac{T_j r^{d-3/2}}{s_{T_j}} \log^{d-1}(\frac{T_j r^{d/2-1}}{s_{T_j}}) \log^{d-1} rs_{T_j} \\ P(S_{(0,(rs_{T_j}c(r,d))^0]} > x_{T_j} - 2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac{1}{2}} s_{T_j}}) \leq \\ Cje^{z(T_j)} \sum_{r=1}^{j+1} r^{d-3/2} P(S_{(0,(rs_{T_j}c(r,d))^0]} > x_{T_j} - 2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac{1}{2}} s_{T_j}}). \end{gathered}$$

Разобьем сумму на две $\sum_{r=1}^{j} = \sum_{r=1}^{l} + \sum_{r=l+1}^{j}$, $l = [\frac{k}{c(k,d)}]$, $k = j - j^{1/2+\epsilon/4}$, вероятности из первой оценим с помощью неравенства Маркова.

Используя асимптотику $t^\star_{T_j}$ из (20), можно получить

$$2^{2d}\sigma t^\star_{T_j}\sqrt{dr^{\frac12}s_{T_j}}\sim 2^{2d}\sigma\sqrt{2d}.$$

Для $r=1,\dots,l$ будем иметь равномерно по r такую оценку

$$P(S_{(0,(rs_{T_j}c(k,d))^0]}>x_{T_j}-2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac12}s_{T_j}})\le$$
$$\exp(2^{2d}\sqrt{2d})\phi(t^\star_{T_j})^{rc(k,d)s_{T_j}}e^{-a(T_j)t^\star_{T_j}\alpha_{T_j}}z(T_j)^{-2-\epsilon}\le$$
$$\exp(2^{2d}\sqrt{2d})\phi(t^\star_{T_j})^{rc(k,d)s_{T_j}-a(T_j)}p(\alpha_{T_j})^{a(T_j)}z(T_j)^{-2-\epsilon/2}\le$$
$$Ce^{j^{-1/2}rc(k,d)-j^{1/2}+o(\log j)}e^{-z(T_j)}j^{-1-\epsilon/4},$$

– здесь мы воспользовались разложением $\log\phi(t^\star_{T_j})$ и асимптотикой $t^\star_{T_j}$ из (20),

$$\log\phi(t^\star_{T_j})(rc(k,d)s_{T_j}-a(T_j))=$$
$$=\frac{(t^\star_N)^2\sigma^2}{2}(rc(k,d)s_{T_j}-a(T_j))+O(\frac{z(T_j)^{v+1}}{a(T_j)^v})=$$
$$\frac{z(T_j)}{a(T_j)}(rc(k,d)s_{T_j}-a(T_j))+O(\frac{z(T_j)^{v/2+1}}{a(T_j)^{v/2}})=$$
$$=\frac{z(T_j)}{j}rc(k,d)-z(T_j)+O(\frac{z(T_j)^{v/2+1}}{a(T_j)^{v/2}})=$$
$$=j^{-1/2}rc(k,d)-j^{1/2}+o(\log j).$$

Последнее равенство получено с учетом (17).

Таким образом,

$$je^{z(T_j)}\sum_{r=1}^{l}r^{d-3/2}P(S_{(0,(rs_{T_j}c(k,d))^0]}>x_{T_j}-2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac12}s_{T_j}})=O(e^{-j^{\epsilon/5}}).$$

Применим лемму 3.7 для $k\le rc(k,d)\le j(1+1/z(T_j))^{2d-1}$

$$P(S_{(0,(rs_{T_j}c(k,d))^0]}>x_{T_j}-2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac12}s_{T_j}})=$$
$$z(T_j)^{-1/2}\exp\{-\Delta(z(T_j)+(2d+3/2+\epsilon)\log z(T_j)+o(\log z(T_j)))\}=$$
$$O(e^{-z(T_j)}j^{-1-d-\epsilon/2});$$
$$\text{так как }\Delta=\frac{a(T_j)}{rs_{T_j}c(k,d)}\ge 1-(2d-1)/z(T_j).$$

Таким образом,

$$je^{z(T_j)}\sum_{r=l}^{j+1} r^{d-3/2}P(S_{(0,(rs_{T_j}c(k,d)))^0]} > x_{T_j} - 2^{2d}\sigma\sqrt{dr^{\frac{1}{2}}s_{T_j}}) =$$
$$j^{d+\epsilon/4}e^{z(T_j)}O(j^{-1-d-\epsilon/2}e^{-z(T_j)}) = O(j^{-1-\epsilon/4}).$$

2) Если же $p<\infty$, пусть $1/\nu = j$ и

$$x_N = a_N(\alpha_N + (\chi+1+\epsilon)\sigma\frac{\log z_N}{\sqrt{2z_N a_N}}).$$

В отличие от предыдущего случая число разнообразных форм параллелепипедов оценим по лемме 3.1 с $\frac{\epsilon}{4p}$, далее, применяем оценку мощности из леммы 3.4.

Заметим, что, для $r = 1,\dots,a_N$ имеем

$$C_d N_j \log^{d-1} N_j \bigwedge C_d\frac{N_j j^d}{r}\log^{d-1}\frac{N_j j^d}{a_{N_j}} \le \frac{N_j j^d\wedge r}{r}\log^{d-1}\frac{N_j j^d\wedge r}{r}.$$

Напомним, что $|v| = (1+1/j)^{p\wedge d}r = c(j,d)r$, $|[v\setminus\widetilde{v}]| \le 2^{p\wedge d}r$.

Используя лемму 3.10 получим

$$P_j = P(S_{N_j}\ge x_{N_j}) \le \sum_{r=1}^{a_{N_j}}\sum_{a:|a|=r}\sum_{(\widetilde{v},v)\in V_\nu(N_j,r,a)} D_{\widetilde{v},v} \le$$
$$C\sum_{r=1}^{a_{N_j}} N_j r^{\epsilon/4p}\frac{(j^d\wedge r)}{r}\log^{d-1}(\frac{N_j j^d\wedge r}{r})\times$$
$$\times P(S_{(0,(rc(j,d)))^0]} > x_{N_j} - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/j}) \le$$
$$C\sum_{r=1}^{a_{N_j}} r^{\epsilon/4p-1}a_{N_j}(j^d\wedge r)e^j P(S_{(0,(rc(j,d)))^0]} > x_{N_j} - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/j}).$$

Воспользуемся разложением $\log\phi(t^\star_{N_j})$ и асимптотикой $t^\star_{N_j}$ из (20)

$$\log\phi(t^\star_{N_j})(rc(j,d)-a_{N_j}) = \frac{(t^\star_N)^2\sigma^2}{2}(rc(j,d)-a_{N_j}) + O(\frac{j^{1+v}}{a^v_{N_j}}) =$$
$$\frac{j}{a_{N_j}}(rc(j,d)-a_{N_j}) + O(\frac{j^{1+v/2}}{a^{v/2}_{N_j}}) = \frac{c(j,d)rj}{a_{N_j}} - j + o(\log j).$$

Применим неравенство Маркова для $r = 1, \ldots, l$, $l = [\frac{a_{N_j}(1-j^{\epsilon/2-1})}{c(j,d)}]$

$$\begin{aligned}P(S_{(0,(c(j,d)r)^0]} > x_{N_j} - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/j}) \le \\ C\phi(t^\star_{N_j})^{rc(j,d)}e^{-a_{N_j}t^\star_{N_j}\alpha_{N_j}}j^{-(\chi+1+\epsilon)} \le \\ C\phi(t^\star_{N_j})^{r-a_{N_j}}p(\alpha_{N_j})^{a_{N_j}}j^{-(\chi+1+\epsilon/2)} \le \\ Ce^{\frac{c(j,d)rj}{a_{N_j}}-2j+o(\log j)}j^{-(\chi+\epsilon/2+1)}.\end{aligned}$$

Применим лемму 3.7 для $j - j^{\epsilon/2} \le \frac{c(j,d)rj}{a_{N_j}} \le c(j,d)j \le 2^{p\wedge d}j$

$$P(S_{(0,(c(j,d)r)^0]} > x - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/j}) = O(e^{-j}j^{-(\chi+3/2+\epsilon)}),$$
$$\text{так как } \Delta = \frac{a_{N_j}}{rc(r,d)} \ge 1 - d/j.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sum_{r=l}^{a_{N_j}} r^{\frac{\epsilon}{4p}-1}a_{N_j}(j^d \wedge r)e^jP(S_{(0,(c(j,d)r)^0]} > x_{N_j} - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/j}) = \\ e^jj^{d\wedge p+\frac{\epsilon}{4p}}P(S_{(0,(c(j,d)r)^0]} > x_{N_j} - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/j}) = O(j^{-1-\epsilon/2}).\end{aligned}$$

Следовательно, получаем, что $P_j = O(j^{-1-\epsilon/4})$.

Отсюда $\sum_{j=1}^\infty P_j < \infty$.

Применение Леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство. $\square$

Лемма 4.2.
$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{L}(S_N) \le \chi \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Пусть $0 < \epsilon < 1/2$,

$$x_N = a_N(\alpha_N + (\chi+\epsilon)\sigma\frac{\log z_N}{\sqrt{2z_Na_N}}).$$

1) Предположим, что $p = \infty$. Обозначим $s_N = a_N/z_N$.

Пусть $r \in \{1, \ldots, z_N + 1\}$, $\varrho = 1 + 1/3r$, $1/\nu = 3r + 2^d$.

Далее будем действовать по аналогии с предыдущей леммой. Разобьем сумму на две $\sum_{r=1}^{z_N} = \sum_{r=1}^{l} + \sum_{r=l+1}^{z_N}$, $l = [\frac{k}{c(k,d)}]$, $k = z_N - z_N^{\epsilon/2}$.

Первую оценим по неравенству Маркова:

$$je^{z_N}\sum_{r=1}^{l} r^{2d-2}P(S_{(0,(rs_Nc(k,d))^0]} > x_N - 2^{2d}\sigma\sqrt{ds_N}) = O(e^{-z_N^{\epsilon/3}}).$$

Вторую оценим по лемме 3.7 для $k \le rc(k,d) \le z_N(1+1/z_N)^{2d-1}$

$$je^{z_N}\sum_{r=l}^{z_N+1} r^{2d-2}P(S_{(0,(rs_Nc(k,d))^0]} > x_N - 2^{2d}\sigma\sqrt{ds_N}) = O(z_N^{-\epsilon/2}) \to 0.$$

2) Если же $p<\infty$, положим $1/\nu = z_N$.

Применим неравенство Маркова для $r=1,\dots,l$, $l=[\frac{a_N(1-z_N^{\epsilon/2-1})}{c(z_N,d)}]$

$$\begin{aligned}
&P(S_{(0,(c(z_N,d)r)^0]} > x_N - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/z_N}) \le \\
&\quad C\phi(t_N^\star)^{rc(z_N,d)}e^{-a_Nt_N^\star\alpha_N}z_N^{-(\chi+1+\epsilon)} \le \\
&\quad C\phi(t_N^\star)^{r-a_N}p(\alpha_N)^{a_N}z_N^{-(\chi+1+\epsilon/2)} \le \\
&\quad Ce^{\frac{c(z_N,d)rj}{a_N}-2z_N+o(\log z_N)}z_N^{-(\chi+\epsilon/2+1)}.
\end{aligned}$$

Применим лемму 3.7 для $(1-z_N^{\epsilon/2-1})a_N \le c(z_N,d)r \le a_N(1+d/z_N)$

$$P(S_{(0,(c(z_N,d)r)^0]} > x - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/z_N}) = O(e^{-z_N}z_N^{-(\chi+1/2+\epsilon)}),$$
$$\text{так как } \Delta = \frac{a_N}{rc(r,d)} \ge 1 - d/z_N.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=l}^{a_N} r^{\frac{\epsilon}{4p}-1}a_N(z_N^d\wedge r)e^{z_N}P(S_{(0,(c(z_N,d)r)^0]} > x_N - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/z_N}) = \\
&\quad e^{z_N}z_N^{d\wedge p+\frac{\epsilon}{4p}}P(S_{(0,(c(z_N,d)r)^0]} > x_N - 2^{d/2+1}d\sigma\sqrt{r/z_N}) = O(z_N^{-\epsilon/2}).
\end{aligned}$$

Следовательно, $P_{z_N} = O(z_N^{-\epsilon/4}) \to 0$.

Лемма 4.3.

$$\limsup \mathbb{L}(T_n^\star) \ge \chi + 1 \quad \textit{п.н., если } p<\infty;$$
$$\limsup \mathbb{L}(T_n^\star) \ge \chi + 3 \quad \textit{п.н., если выполнено } (18).$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon \in (0, 1/2)$.

Пусть $j \in \mathbb{N}, j > 1$ и $T_j : j = \begin{cases} z(T_j), & p < \infty, \\ (z(T_j))^2, & \text{выполнено (18)}. \end{cases}$ Предположим, что выполнено (18), тогда обозначим $1/\nu_{T_j} = \log T_j - \log T_{j-1}$, в этом случае $1/\nu_{T_j} = \frac{(z(T_j))^{-1}}{2\sqrt{\delta(1-\delta)}} + o(1/z(T_j))$.

Предположим, что $p < \infty$, тогда $1/\nu_{T_j} \geq 1$.

Возьмем $\varrho^{d-1} = 1 + 1/(2\nu_{T_j})$.

Пусть $K_{T_j} = \log^{d-1} a(T_j)\varrho^{d-1}\nu_{T_j}^d j^{1-\epsilon/3} z(T_j)^{\chi-1/2}$.

Заметим, что $K_{T_j} \to \infty$ и $\frac{a(T_j)}{K_{T_j}} \to \infty$.

Построим множество непересекающихся параллелепипедов

$$T_\varrho(T_{j-1}, T_j) = \{(t, a, K) : t = (t^{(1)}, t^{(2)}] :$$

$$t^{(1)} = (\varrho^{s_1-1}, \dots, \varrho^{s_{d-1}-1}, \frac{T_{j-1}}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} s_k}});\ t^{(2)} = (\varrho^{s_1}, \dots, \varrho^{s_{d-1}}, \frac{T_j}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} s_k + d-1}});$$

$$a = (\varrho^{r_1}, \dots, \varrho^{r_{d-1}}, \frac{a(T_j)}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} r_k}}),\ r_k = s_k - 2 + \frac{\log(\varrho-1)}{\log\varrho} \wedge \frac{\log a(T_j)}{(d\wedge p)\log\varrho};$$

$$K = (\varrho^{q_1}, \dots, \varrho^{q_{d-1}}, \frac{K_{T_j}}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} q_k}}),\ q_k = s_k - 2 + \frac{\log(\varrho-1)}{\log\varrho} \wedge \frac{\log K_{T_j}}{d\log\varrho} :$$

$$s \in \mathbb{N}_0^{d-1} : \frac{\log\frac{j}{\log j}}{\log\varrho} \leq s_k \leq \frac{\log T_j}{d\log\varrho}, k = 1, \dots, d-1\}.$$

Для каждого $n : |n| = [T_j] + 1$ существует $t : t \subset (0, n]$.

Объем параллелепипедов из этого множества равен

$$|t| = \frac{T_j}{\varrho^{d-1}}(1 - \frac{1}{\varrho})^{d-1}(1 - \varrho^{d-1}\frac{T_{j-1}}{T_j}) \asymp T_j\nu_{T_j}^{-d};$$

$$a(T_j) \geq |[a]| \geq a(T_j)\prod_{k=1}^{d-1}(1 - \varrho^{-r_k})(1 - \frac{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} r_k}}{a(T_j)}) \geq$$

$$a(T_j)(1 - \frac{\log j}{j})(1 - a(T_j)^{-1/(d\wedge p)}); \quad \Delta = 1 + o(\frac{\log j}{j}).$$

Отметим, что

$$\mathrm{Card}(T_\varrho(T_{j-1}, T_j)) \asymp (\frac{\log\{N(\varrho-1)\}}{\log\varrho})^{d-1} \asymp \nu_{T_j}^{d-1}\log^{d-1}\frac{T_j}{a(T_j)}.$$

Определим множества

$$\mathbb{K}_{a,b} = \{r[\frac{a}{b}] : r = 0, 1, \ldots\}.$$

Для $(t, a, K) \in T_\varrho(T_{j-1}, T_j)$ построим

$$J_K(t, a, K) = \big\{v = (w - a, w],$$
$$w_k \in (t_k^{(1)} + a_k, t_k^{(2)}] \cap \mathbb{K}_{a_k, K_k}, \quad k = 1, \ldots, d\big\}.$$

Заметим, что

$$\prod_{k=1}^{d}(t_k^{(2)} - t_k^{(1)} - a_k) \asymp |t| \prod_{k=1}^{d}(1 - \frac{a_k}{t_k^{(2)} - t_k^{(1)}}) \asymp$$
$$|t|(1 - \frac{1}{\varrho})^{d-1}(1 - \frac{a(T_j)^{1/d}}{T_j^{1/d}(1 - \varrho^{d-1}\frac{T_{j-1}}{T_j})}) \asymp T_j \nu_{T_j}^{1-2d}$$
$$\mathrm{Card}(J_K(t, a, K)) \asymp \frac{K|t|(1 - \frac{1}{\varrho})^{d-1}}{|a|} \asymp$$
$$\frac{K_{T_j} T_j}{\nu_{T_j}^{2d-1} a(T_j)} = e^{z(T_j)} j^{1-\epsilon/3} z(T_j)^{\chi - 1/2} \nu_{T_j}^{1-d} \log^{1-d} \frac{T_j}{a(T_j)}.$$

Рассмотрим независимые при разных $j \in \mathbb{N}, (t, a, K) \in T_\varrho(T_{j-1}, T_j)$ случайные величины

$$\mathbb{H}_{j,t,a} = \max_{(i-a,i] \in J_{K_{T_j}}(t,a,K)} S_{(i-a,i]} \leq T_n^\star, \quad t \subset (0, n], |n| = [T_j] + 1.$$

Обозначим $A_{(i,m]} = \left\{\mathbb{L}(S_{(i,m]}) \geq \begin{cases} \chi + 1 - \epsilon, & p < \infty \\ \chi + 3 - \epsilon, & \text{выполнено (18)} \end{cases}\right\}.$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{(t,a,K) \\ \in T_\varrho(T_{j-1}, T_j)}} P(\mathbb{L}(\mathbb{H}_{j,t,a}) \geq \begin{cases} \chi + 1 - \epsilon, & p < \infty \\ \chi + 3 - \epsilon, & \delta \in (0, 1) \end{cases}) =$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{(t,a,K) \\ \in T_\varrho(T_{j-1}, T_j)}} P(\bigcup_{(i,m] \in J_{K_{T_j}}(t,a,K)} A_{(i,m]}).$$

Применяя лемму 3.7, получим

$$P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) \asymp e^{-z(T_j)} j^{-2+\epsilon} z(T_j)^{-\chi+1/2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Card}(J_{K_{T_j}}(t,a,K)) P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) \asymp j^{\frac{2}{3}\epsilon-1} \nu_{T_j}^{1-d} \log^{1-d} \frac{T_j}{a(T_j)}.$$

Рассмотрим интервалы, принадлежащие множеству $J_K(t,a,K)$ и пересекающиеся с $(t^{(1)}, t^{(1)}+a]$.

Интервалы такого типа будут иметь вид: $k^* = (g^* + t^{(1)}, g^* + t^{(1)} + a]$, где

$$g^*_m = g_m [\frac{a_m}{K_m}], \quad g_m = 1, \dots, [K_m], m = 1, \dots, d; k = |g|.$$

Применим лемму 3.14, где положим $u = \epsilon - 1$ и $v = 1 + 2/\epsilon$.

Пусть $l = [j^{\epsilon/2}]$, тогда

$$\sum_{l}^{[K_{T_j}]} P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]} \cap A_{k^*}) \leq$$

$$\sum_{l}^{[K_{T_j}]} (e^{-z(T_j)} z(T_j)^{-\chi+1/2} j^{-1} \cdot (\frac{K_{T_j}}{k a_{T_j}})^{1+2/\epsilon} +$$

$$P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) e^{-\theta k [\frac{a(T_j)}{K_{T_j}}]} j^{(\epsilon-1/2)\frac{\tau}{t^*_j}} (k \frac{a(T_j)}{K_{T_j}})^{\frac{\tau}{t^*_j}(1+2/\epsilon)}) \leq$$

$$e^{-z(T_j)} z(T_j)^{-\chi+1/2} j^{-2} \cdot (\frac{K_{T_j}}{a(T_j)})^{1+2/\epsilon} +$$

$$P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) \frac{a(T_j)^{\frac{\tau}{t^*_j}(1+2/\epsilon)} j^{(\epsilon-1/2)\frac{\tau}{t^*_j}} e^{-\theta l [\frac{a(T_j)}{K_{T_j}}]}}{1 - e^{-\theta [\frac{a(T_j)}{K_{T_j}}]}}, \theta > 0,$$

$$\mathrm{Card}(J_{K_{T_j}}(t,a,K)) \sum_{k=1}^{[K_{T_j}]} P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]} \cap A_{k^*}) =$$

$$= O(j^{\frac{7}{6}\epsilon-1} \nu_{T_j}^{1-d} \log^{1-d} \frac{T_j}{a(T_j)}).$$

Следовательно,

$$P(\bigcup_{(i,m]\in J_{K_{T_j}}(t,a,K)} A_{(i,l]}) \geq$$

$$\frac{(\mathrm{Card}(J_{K_{T_j}}(t,a,K))P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}))^2}{\mathrm{Card}(J_{K_{T_j}}(t,a,K))P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) + \sum_{(i_1,m_1]\neq(i_2,m_2]} P(A_{(i_1,m_1]}\cap A_{(i_2,m_2]})}$$

$$\geq Cj^{\epsilon/6-1}\nu_{T_j}^{1-d}\log^{1-d}\frac{T_j}{a(T_j)}.$$

Итак, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{(t,a,K)\\ \in T_\varrho(T_{j-1},T_j)}} P\Big(\mathbb{L}(\mathbb{H}_{j,t,a})\geq\begin{cases}\chi+1-\epsilon, & p<\infty\\ \chi+3-\epsilon, & \text{выполнено (18)}\end{cases}\Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{(t,a,K)\\ \in T_\varrho(T_{j-1},T_j)}} P\Big(\bigcup_{(i,m]\in J_{K_{T_j}}(t,a,K)} A_{(i,m]}\Big)\geq\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1+\epsilon/6}=\infty.$$

Из независимости $\mathbb{H}_{j,t,a}$ при разных $j\in\mathbb{N},(t,a,K)\in T_\varrho(T_{j-1},T_j)$ по лемме Бореля–Кантелли получаем, что

$$'P(\mathbb{L}(\mathbb{H}_{j,t,a})\geq\begin{cases}\chi+1-\epsilon, & p<\infty\\ \chi+3-\epsilon, & \text{выполнено (18).}\end{cases}\text{для б.ч. } j\in\mathbb{N},t)=1,$$

и, следовательно,

$$\limsup\mathbb{L}(T_n^\star)\geq\limsup\mathbb{L}(\mathbb{H}_{j,t,a})\geq\begin{cases}\chi+1-\epsilon, & p<\infty\\ \chi+3-\epsilon, & \text{выполнено (18)}\end{cases}\quad\text{п.н.}$$

Лемма 4.4.

$$\liminf_{N\to\infty}\mathbb{L}(T_n^\star)\geq\chi\quad\textit{п.н.}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon\in(0,1/2)$.

Пусть $j\in\mathbb{N}$, $j>1$ и $N_j=[z^{-1}(j)]$.

Пусть

$$K_{N_j,\epsilon}=\begin{cases}[\varrho^{d-1}j^{\chi+1/2-\epsilon/3}\log^{d-1}a_{N_j}], & \delta\in[0,1),\\ [\varrho^{d-1}j^{\chi+1/2-\epsilon/3}\log^{d-1}\frac{N_j}{a_{N_j}}], & \delta=1.\end{cases}$$

Для $j \in \mathbb{N}$, $(t,a) \in T_\varrho(N_{j-1},N_j)$ определим множества $J_{K_{N_j},\epsilon}(t,a)$.

Заметим,что

$$\mathrm{Card}(T_\varrho(N_{j-1},N_j)) \asymp \begin{cases} \log^{d-1}\frac{N_j}{a_{N_j}}, & \delta\in[0,1), \\ \log^{d-1} a_{N_j}, & \delta = 1. \end{cases}$$

$$\mathrm{Card}(J_{K_{N_j},\epsilon}(t,a)) \asymp \begin{cases} e^j j^{\chi+1/2-\epsilon/3}\log^{1-d}\frac{N_j}{a_{N_j}}, & \delta\in[0,1), \\ e^j j^{\chi+1/2-\epsilon/3}\log^{1-d} a_{N_j}, & \delta = 1. \end{cases}$$

Кроме того, определим независимые при разных $(t,a) \in T_\varrho(N_{j-1},N_j)$ случайные величины

$$\Upsilon_{j,t} = \max_{(i-a^0_{N_j},i]\in J_{K_{N_j},\epsilon}(t,a)} S_{(i-a^0_{N_j},i]} \le T_n^\star, t\subset(0,n].$$

Обозначим $A_{(i,m]} = \{\mathbb{L}(S_{(i,m]})\ge\chi-\epsilon\}$.

$$P_j = P(\bigcap_{t\in T_\varrho(N_{j-1},N_j)} \mathbb{L}(\Upsilon_{j,t})\le\chi-\epsilon) =$$

$$P(\mathbb{L}(\Upsilon_{j,t})\ge\chi-\epsilon)^{\mathrm{Card}(T_\varrho(N_{j-1},N_j))} \le$$

$$(1-P(\bigcup_{(i,a+i]\in J_{K_{N_j}}(t,a,K)} A_{(i,a+i]}))^{\mathrm{Card}(T_\varrho(N_{j-1},N_j))} \le$$

$$(1-\frac{(\mathrm{Card}(J_{K_{N_j}}(t,a,K))P(A_{(i,a+i]}))^2}{\mathrm{Card}(J_{K_{N_j}}(t,a,K))P(A_{(i,a+i]})+\sum P(A_{(i_1,a+i_1]}\cap A_{(i_2,a+i_2]})})^{\mathrm{Card}(T_\varrho(N_{j-1},N_j))}.$$

Применяя лемму 3.7, получим

$$P(A_{(i,a+i]}) \asymp e^{-j} j^{\epsilon-\chi-1/2}.$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Card}(J_{K_{N_j}}(t,a,K))P(A_{(i,a+i]}) \asymp \begin{cases} j^{\frac{2}{3}\epsilon}\log^{1-d}\frac{N_j}{a_{N_j}}, & \delta\in[0,1), \\ j^{\frac{2}{3}\epsilon}\log^{1-d} a_{N_j}, & \delta = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим интервалы, принадлежащие множеству $J_K(t,a)$ и пересекающиеся с $(t^{(1)}, t^{(1)}+a]$.

Интервалы такого типа будут иметь вид: $k^* = (g^*+t^{(1)}, g^*+t^{(1)}+a]$, где

$$g^*_m = g_m[\frac{a_m}{K_m}], \quad g_m = 1,\dots,[K_m], m=1,\dots,d.$$

Применим лемму 3.14, где положим $u = \epsilon$ и $v = 1$. Пусть $k = |g|$. Пусть $l = j^{\epsilon/2}$, тогда

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Card}(J_{K_{N_j}}(t,a,K)) \sum_{k=1}^{K_{N_j}} P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]} \bigcap A_{k^\star}) \le \\
\mathrm{Card}(J_{K_{N_j}}(t,a,K)) \sum_{k=1}^{K_{N_j}} (e^{-j} j^{-\chi-1/2} \cdot \frac{K_{N_j}}{k a_{N_j}} + \\
+ P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) e^{-\theta k [\frac{a_{N_j}}{K_{N_j}}]} j^{(1/2+\epsilon)\frac{\tau}{t_j^\star}} \cdot (k \frac{a_{N_j}}{K_{N_j}})^{\frac{\tau}{t_j^\star}}) \le \\
\mathrm{Card}(J_{K_{N_j}}(t,a,K)) P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) \times \\
\times (l + \frac{K_{N_j}}{a_{N_j} j^\epsilon} \sum_{k=l+1}^{K_{N_j}} k^{-1} + \frac{a_{N_j} j^{1/2+\epsilon} \cdot e^{-\theta l [\frac{a_{N_j}}{K_{N_j}}]}}{1 - e^{-\theta [\frac{a_{N_j}}{K_{N_j}}]}}) = \\
\begin{cases} O(j^{\frac{7}{6}\epsilon} \log^{1-d} \frac{N_j}{a_{N_j}}), & \delta \in [0,1), \\ O(j^{\frac{7}{6}\epsilon} \log^{1-d} a_{N_j}), & \delta = 1. \end{cases}
\end{gathered}
$$

Воспользуемся неравенством $1 - x \le e^{-x}$, тогда

$$P_j \le \exp\{-C j^{\epsilon/6}(1 + o(1))\}.$$

Таким образом, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} P_j$ сходится, с помощью леммы Бореля–Кантелли завершаем доказательство леммы:

$$P(\bigcap_{t \in T_\varrho(N_{j-1},N_j)} \mathbb{L}(\Upsilon_{j,t}) \le \chi - \epsilon \text{ для б.ч. } j) = 1.$$

Следовательно, $\liminf_{N\to\infty} \mathbb{L}(T_n^\star) \ge \chi \quad$ п.н.

Суммируя результаты, изложенные в этом параграфе, можно считать Теорему 2.1 доказанной.

5. Максимум приращений по кубам

Аналогичными методами доказывается теорема для максимального приращения по кубам. Всюду далее $d \ge 1$ (в отличие от предыдущего параграфа, где $d \ge 2$).

Для оценки сверху используются следующие множества.

Для случая $p = \infty$ построим множество $I_{\varrho,\nu}(N, a_N)$ d-мерных интервалов, лежащих в $\mathbb{R}^d$ и покрывающих куб $(0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]]$,

$$I_{\varrho,\nu}(N, a_N) = \Big\{ (\widetilde{v}, v) : \widetilde{v}(u) =$$

$$= (\widetilde{w} - \widetilde{u}_\varrho, \widetilde{w}], v(u) = (w - u_\varrho, w] : w_k \leq N^{1/d};$$

$$u(s) = (\varrho^{s_1+1}, \dots, \varrho^{s_{d-1}+1}, \frac{a_N}{\varrho^{\sum_{k=1}^{d-1} s_k}}), \quad s_k \leq \frac{\log a_N}{\log \varrho},$$

$$(\widetilde{u}_\varrho)_k = \frac{u_k}{\varrho^2}, \quad k = 1, \dots, d-1, \quad (\widetilde{u}_\varrho)_d = \frac{u_d}{\varrho^d},$$

$$\widetilde{w}_k = (l_k - 1) u_k \nu, \quad (u_\varrho)_k = \varrho u_k, \quad w_k = l_k u_k \nu,$$

$$l_k \leq [\frac{2}{\nu} (\frac{N}{a_N})^{1/d}] + 1, \quad k = 1, \dots, d \Big\}.$$

Поскольку неравенство $w_k \leq N^{1/d}$, $k = 1, \dots, d$ должно выполняться при всех значениях l_k, s_k, то

$$\operatorname{Card}(I_{\varrho,\nu}(N, a_N)) \leq \begin{cases} \frac{2^d C_d N}{\nu^d a_N} \left(\frac{\log a_N}{\log \varrho} \right)^{d-1} & \delta \in [0, 1), \\ \frac{2^d C_d N}{\nu^d a_N} \left(\frac{\log \frac{N}{a_N}}{\log \varrho} \right)^{d-1} & \delta = 1. \end{cases}$$

Для $p < \infty$ построим множество $V_\nu(N, a_N, a)$ d-мерных интервалов, лежащих в $\mathbb{R}^d$ и покрывающих куб $(0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]]$, следующим образом:

$$I_\nu(N, a_N, a) = \Big\{ (\widetilde{v}, v) : \widetilde{v} = (\widetilde{w} - \widetilde{u}_\nu, \widetilde{w}], v = (w - u_\nu, w],$$

$$\text{для} \quad a_k \nu \geq 1 \quad \text{определим} \quad (\widetilde{u}_\nu)_k = a_k (1 - \nu),$$

$$\widetilde{w}_k = (l_k - 1) a_k \nu, \quad (u_\nu)_k = a_k (1 + \nu), \quad w_k = l_k u_k \nu,$$

$$\text{для} \quad a_k \nu < 1 \text{ определим} \quad (\widetilde{u}_\nu)_k = (u_\nu)_k = a_k, \quad \widetilde{w}_k = w_k = l_k,$$

$$l_k \leq ([\frac{2}{\nu} (\frac{N}{a_N})^{1/d}] + 1) \bigwedge (2[N^{1/d}] + 1), \quad k = 1, \dots, d \Big\}.$$

$$\operatorname{Card}(I_\nu(N, a_N, a)) = (2^d N) \bigwedge (\frac{2^d N}{\nu^d a_N}).$$

Докажем одну из лемм для кубов. Остальные леммы доказываются аналогично с соответствующими изменениями.

Лемма 5.1. *Для любого* $\epsilon > 0$

$$P(\mathbb{L}_{\square}(I_N^{\star}) \geq \chi - \epsilon) \to 1.$$

Доказательство. Пусть $N = |n|$, $\widetilde{N} = [y^{-1}(y_N - 1)]$.

Возьмем $\epsilon > 0$.

Пусть

$$K_N = \begin{cases} [\log^{d-1} a_N y_N^{\chi+1/2-\epsilon/3}], & \delta \in [0,1), \\ [\log^{d-1} \frac{N}{a_N} y_N^{\chi+1/2-\epsilon/3}], & \delta = 1. \end{cases}$$

Заметим, что $K_N \to \infty$ и $\frac{a_N}{K_N} \to \infty$. Построим параллелепипеды $t = (t^{(1)}, t^{(2)}] = (1^0 \cdot [\widetilde{N}^{\frac{1}{d}}], 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]]$, $a = (0, 1^0 \cdot [a_N^{\frac{1}{d}}]]$.

Определим множества

$$\mathbb{K}_{a_k} = \{r[\frac{a_N^{1/d}}{K_N^{1/d}}] : r = 0, 1, \ldots\}.$$

Определим для t, a

$$J_K(t,a) = \{v = (w-a, w], \quad w_k \in (t_k^{(1)} + a_N^{1/d}, t_k^{(2)}] \cap \mathbb{K}_{a_k}, \quad k = 1, \ldots, d\}.$$

Заметим, что

$$\mathrm{Card}(J_K(t,a)) = \frac{K|t|}{|a|} \asymp \frac{K_N(N^{1/d} - \widetilde{N}^{1/d} - a_N^{1/d})^d}{a_N} = e^{y_N} y_N^{\chi+1/2}.$$

Определим статистику

$$\mathbb{T}_{N,t} = \max_{(i-a,i] \in J_K(t,a)} S_{(i-a,i]}, \quad \mathbb{T}_{N,t} \leq I_N^{\star}.$$

Применяя лемму 3.7, получим

$$P(A_{(t^{(1)}, t^{(1)}+a]}) \asymp e^{-y_N} y_N^{\epsilon-\chi-1/2}.$$

$$\mathrm{Card}(J_K(t,a)) P(A_{(t^{(1)}, t^{(1)}+a]}) \asymp y_N^{\epsilon}.$$

Рассмотрим интервалы, принадлежащие множеству $J_K(t,a)$ и пересекающиеся с $(t^{(1)}, t^{(1)} + a]$.

Интервалы такого типа будут иметь вид: $k^* = (g^* + t^{(1)}, g^* + t^{(1)} + a]$, где

$$g_m^* = g_m[\frac{a_m}{K_m}], \quad g_m = 1, \ldots, [K_m], m = 1, \ldots, d, k = |g|.$$

Применим лемму 3.14, где положим $u = \epsilon$ и $v = 1$ и заменим z_N на y_N, α_N на β_N, а $t_N^\star$ на $t_N^\square$. Получим

$$P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]} \cap A_{k^*}) \le e^{-y_N} y_N^{-\chi-1/2} \cdot \frac{K_N}{ka_N} +$$
$$P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) e^{-\theta k[\frac{a_N}{K_N}]} y_N^{(\epsilon+1/2)\frac{\tau}{t_N^\square}} \cdot (k\frac{a_N}{K_N})^{\frac{\tau}{t_N^\square}}, \theta > 0.$$

Пусть $l = [y_N^{\epsilon/2}]$, тогда

$$\mathrm{Card}(J_K(t,a)) \sum_{k=1}^{K_N} P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]} \cap A_{k^*}) \le$$
$$\le C \cdot \mathrm{Card}(J_K(t,a)) P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) \times$$
$$\times (y_N^{\epsilon/2} + \frac{K_N}{a_{N_j} y_N^\epsilon} \sum_{k=l+1}^{K_N} k^{-1} + \frac{a_N y_N^{1/2+\epsilon} \cdot e^{-\theta l[\frac{a_N}{K_N}]}}{1 - e^{-\theta}[\frac{a_N}{K_N}]}) =$$
$$= O(y_N^{\frac{3}{2}\epsilon}), \quad \text{так как} \quad \frac{K_N \log K_N}{a_N y_N^\epsilon} \to 0.$$

Заметим, что

$$\sum_{(i_1,j_1]\ne(i_2,l_2]} P(A_{(i_1,l_1]} \cap A_{(i_2,j_2]}) \le \mathrm{Card}(J_K(t,a)) P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) +$$
$$+ (\mathrm{Card}(J_K(t,a)) P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}))^2 +$$
$$+ \mathrm{Card}(J_K(t,a)) \sum_{k=1}^{K} P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]} \cap A_{k^*})$$

Таким образом, вероятности оцениваются так:

$$P(\mathbb{L}_\square(\mathbb{T}_{N,t}) \ge \chi - \epsilon) = P(\bigcup_{(i,l]\in J_K(t,a)} A_{(i,l]}) \ge$$
$$\frac{(\mathrm{Card}(J_K(t,a)) P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}))^2}{\mathrm{Card}(J_K(t,a)) P(A_{(t^{(1)},t^{(1)}+a]}) + \sum_{(i_1,l_1]\ne(i_2,l_2]} P(A_{(i_1,l_1]} \cap A_{(i_2,l_2]})} \ge$$
$$\ge C y_N^{\epsilon/2} \ge 1.$$

Итак, получаем, что

$$P(\mathbb{L}_\square(\mathbb{T}_{N,t}) \ge \chi - \epsilon) \to 1.$$

Литература

1. К. Прахар, *Распределение простых чисел.* Мир, М. (1967).
2. Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана.* Меркурий–Пресс, Череповец (2000).
3. Л. В. Розовский, *О нижней границе вероятностей больших уклонений для выборочного среднего при выполнении условия Крамера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 208–224.
4. О. Е. Щербакова, *Скорость сходимости для приращений случайных полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298** (2003), 304–315.
5. Paul Deheuvels, Luc Devroye, and James Lynch, *Exact Convergence Rate in the Limit Theorems of Erdös Rényi and Shepp.* — Ann. of Probab. **14**, No. 1 (1986), 209–223.
6. P. Deheuvels and J. Steinebach, *Exact Convergence Rate in Strong Approximation Laws for Large Increments of Partial Sums.* — Probability Theory Related Fields No. 76 (1987), 369–393.
7. A. Frolov, A. Martikainen, and J. Steinebach, *Erdös-Rényi-Shepp Type Laws in the Non-i.i.d.* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, vol. 33, (1997), 127-151.
8. J. Steinebach and Wilfried Pfuhl, *On Precise Asymptotics for Erdös-Rényi Increments of Random Fields*, Pub. Inst. Stat. Univ. **XXXIII**, No. 2 (1988), 49–66.

Scherbakova O. E. Exact rate of convergence for increments of random fields.

The rate of convergence in strong limit theorems for maximal increments of random fields on parallelepipeds of big volume a_N ($\lim \frac{a_N}{\log N} = \infty, \lim \frac{\log \frac{N}{a_N}}{\log_2 N} = \infty$) is investigated. We consider random fields with finite moment generating function in right neighborhood of zero.

С.-Петербургский государственный политехнический университет

E-mail: helga_gold@pochta.ru

Поступило 15 июня 2004 г.