Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

М. А. Антипов

ГРУППА ГРОТЕНДИКА СТАБИЛЬНОЙ КАТЕГОРИИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ БИРЯДНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Напомним, что группа Гротендика $\mathrm{K}_0(\mathcal{C})$ (скелетно-малой) триангулированной категории $\mathcal{C}$ определяется как факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной символами вида $[X]$, $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $[X]+[Z]-[Y]$, где

$$X \to Y \to Z \to X[1]$$

– выделенный треугольник.

Напомним также следующее

Предложение А. *Пусть* Λ *– конечномерная фробениусова алгебра,* mod-Λ *– категория конечно порожденных (правых)* Λ*-модулей,* stmod-Λ *– стабильная категория конечно порожденных* Λ*-модулей,* $\mathrm{K}_0(\text{mod-}\Lambda), \mathrm{K}_0(\text{stmod-}\Lambda)$ *– их группы Гротендика. Тогда* $\mathrm{K}_0(\text{stmod-}\Lambda) = \mathrm{K}_0(\text{mod-}\Lambda)/P(\Lambda)$*, где* $P(\Lambda)$ *– подгруппа, порожденная образами элементов вида* $[P]$*, таких, что* P *проективен.*

Доказательство. См., например, [1]. □

Поскольку группа $\mathrm{K}_0(\text{mod-}\Lambda)$ – это свободная абелева группа, базисом которой являются образы простых модулей над Λ, часто используется следующая переформулировка предыдущего предложения:

Предложение Б. *Пусть* Λ *– конечномерная фробениусова алгебра с* n *простыми модулями,* stmod-Λ *– стабильная категория конечно порожденных* Λ*-модулей,* $\mathrm{K}_0(\text{stmod-}\Lambda)$ *– соответствующая группа Гротендика. Тогда существует точная последовательность*

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^n \to \mathrm{K}_0(\text{stmod-}\Lambda) \to 0,$$

где f *– отображение, заданное матрицей Картана алгебры* Λ*.*

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00674.

Так, например, в работе [2] при помощи этого утверждения вычислена группа Гротендика для одной серии (несимметрических) специальных бирядных алгебр (алгебр Накаямы). В настоящей работе исследуется случай произвольных симметрических специальных бирядных алгебр.

Итак, пусть Λ – симметрическая неразложимая специальная бирядная алгебра. Тогда Λ допускает следующее описание в терминах колчана с соотношениями (подробности см. в [3]; отметим здесь, что композиции путей в колчане мы записываем слева направо).

I) Задан колчан Q и фиксированное разбиение множества его стрелок на (ориентированные) циклы, (мы называем их *A-циклами*) так, что при этом через каждую вершину проходят один или два цикла. При этом каждому циклу C сопоставлено натуральное число l_C называемое *кратностью* этого цикла (формально A-циклом мы называем l_C-кратный обход множества стрелок цикла с произвольного места), а каждой вершине i – ненулевой элемент λ_i основного поля (см. соотношения типа 3 ниже).

II) $\Lambda = KQ/I$, где KQ – алгебра путей данного колчана, а идеал I порожден множеством $A \cup B \cup D$, где:

1)A – множество путей вида $\alpha\beta$, α, β – стрелки, не являющиеся последовательными стрелками никакого A-цикла;

2) B – множество путей вида $(a_1 a_2 \dots a_m)^{l_C} a_1$, где a_1 – произвольная стрелка, $(a_1 a_2 \dots a_m)^{l_C}$ — A-цикл C, содержащий эту стрелку;

3) D — множество элементов вида $r_i = (x_1 x_2 \dots x_r)^{l_{C_1}} - \lambda_i (y_1 y_2 \dots y_m)^{l_{C_2}}$ (по одному для каждой пары стрелок $\{x_1, y_1\}$ с общим началом i), где $(x_1 x_2 \dots x_r)^{l_{C_1}}$ и $(y_1 y_2 \dots y_m)^{l_{C_2}}$ – A-циклы C_1 и C_2, содержащие стрелки x_i и y_i соответственно (отметим, что, возможно, $C_1 = C_2$, т.е. $(x_1 x_2 \dots x_r)^{l_{C_1}}$ и $(y_1 y_2 \dots y_m)^{l_{C_2}}$ – записи одного и того же A-цикла, отличающиеся циклическим сдвигом).

Мы вычислим в этой ситуации определитель матрицы Картана алгебры Λ.

2. Пусть Λ обладает n простыми модулями $S_1, \dots, S_n$ и пусть $P_1, \dots, P_n$ – соответствующие им проективные модули, т.е. $\operatorname{top} P_i \cong S_i \cong \operatorname{soc} P_i, i = 1, \dots, n$ (напомним, что Λ – симметрична). Соответствующие вершины колчана алгебры мы будем обозначать натуральными числами $1, 2 \ldots, n$. Пусть стрелки этого колчана разбиваются (в указанном выше смысле) на циклы $C_1, C_2, \ldots, C_k$, и $l_1, l_2, \ldots, l_k$ – кратности этих циклов.

Как и в [3], определим *расширенный колчан* с соотношениями (Q_r, I_r), где:

1. Вершины колчана Q_r совпадают с вершинами колчана Q.

2. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_s$ – все вершины степени 2 в колчане Q. Множество стрелок Q_r получается из множества стрелок Q добавлением петель $w_1, w_2, \ldots, w_s$ с началом (и концом) в вершинах $i_1, i_2, \ldots, i_s$ соответственно. Эти петли мы будем называть формальными петлями.

3. Для каждой формальной петли w_i введем соотношение $w_i = (v_1 v_2 \ldots v_m)^k$, где $(v_1 v_2 \ldots v_m)^k$ – A-цикл, проходящий через вершину i, k – его кратность, т.е. будем ассоциировать стрелку w_i с соответствующим элементом алгебры Λ. Добавив получившиеся n соотношений к множеству I, получим множество I_r.

Каждая формальная петля является A-циклом длины 1 и кратности 1. Теперь через каждую вершину проходит ровно два A-цикла (или один цикл дважды, но с различными началами обхода).

Сопоставим произвольному A-циклу $C_b = (a_1 a_2 \ldots a_m)^{l_b}$ матрицу $A_b = (a_{ij}^{(b)})_{i,j=1}^n$ (того же размера, что и матрица Картана) следующим образом. Для любой вершины i колчана Q через $v_b(i)$ обозначим число прохождений через эту вершину основного подцикла в C_b (соответствующего однократному прохождению по стрелкам цикла); при этом $0 \leq v_b \leq 2$. Положим $a_{ij}^{(b)} = l_b v_b(i) v_b(j)$.

Предложение 1. *Пусть A – матрица Картана алгебры Λ. Тогда, во введенных обозначениях, $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$.*

Доказательство. Для каждого неразложимого проективного модуля опишем вектор композиционной длины. Предположим для простоты, что каждый A-цикл проходит через каждую вершину не более одного раза (общий случай разбирается аналогично). Пусть C_a, C_b – A-циклы, проходящие через вершину v. Тогда фактормодуль соответствующего проективного модуля P_v по его радикалу изоморфен S_v, и $\operatorname{rad} P_v$ является суммой двух цепных модулей с пересечением по цоколю (изоморфному S_v), композиционные ряды которых соответствуют l_a- и l_b-кратному проходам по множеству стрелок A-циклов C_a и C_b соответственно. Таким образом, кратность S_v в соответствующем ему проективном модуле равна $1 + (l_a + l_b - 1) = l_a + l_b = a^{(a)}_{vv} + a^{(b)}_{vv}$ (напомним, что $a^{(r)}_{vv} = 0$, если $r \neq a, b$), кратность других простых модулей, лежащих на обоих A-циклах, также равна $l_a + l_b$, кратность простого модуля S_{v_1}, лежащего только на одном из двух A-циклов, скажем на цикле C_a равна $l_a = a^{(a)}_{vv_1}$, наконец кратность всех остальных простых модулей равна нулю. Аналогичное описание получается для цепных проективных модулей: кратности простых модулей лежащих на соответствующем A-цикле, равны кратности этого A-цикла, кроме случая простого модуля, соответствующего данному проективному – его кратность на единицу больше. Это соответствует нашему соглашению о “формальном A-цикле – петле кратности 1”. Таким образом, мы проверили, что каждый элемент матрицы Картана равен соответствующему элементу матрицы $A_1 + \cdots + A_k$. □

Таким образом, определитель матрицы Картана Λ (абсолютная величина которого равна, в случае неравенства нулю, порядку группы Гротендика стабильной категории Λ) при фиксированном колчане Λ и разбиении на циклы, равен однородному многочлену степени n от кратностей этих циклов. Мы хотим показать, что значение этого многочлена не зависит от перестановки аргументов, то есть сам многочлен является симметрической функцией степени n от переменных $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Точнее, мы покажем что определитель равен $cs_n(l_1, l_2, \ldots, l_k)$, где c – постоянная (равная 0,1 или 4), а s_n – n-я основная симметрическая функция от k аргументов (считаем, что $s_n(l_1, l_2, \ldots, l_k) = 0$ при $k < n$).

Предложение 2. *Определитель матрицы Картана A представляется в виде суммы одночленов вида $c_{i_1 i_2 \ldots i_n} l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_n}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – попарно различные индексы.*

Доказательство. Запишем знакопеременную сумму для вычисления определителя и раскроем скобки. Каждому слагаемому в получившейся сумме соответствует перестановка строк матрицы A, показывающая, из какого произведения получен моном. Пусть $\mathcal{A}$ – множество мономов в сумме, в которых имеются повторяющиеся сомножители вида l_j, и для всякого монома X из $\mathcal{A}$ выберем пару столбцов таких, что при формировании данного монома из этих двух столбцов была взята одна и та же переменная (скажем, l_j), с минимальной суммой номеров $s(X)$ (среди всех таких пар столбцов) и минимальным номером $a(X)$ первого столбца. Пусть $\mathcal{A}_{s,i}$ – множество таких мономов X из $\mathcal{A}$, что $s(X) = s, a(X) = i$. Докажем, что множество $\mathcal{A}_{s,i}$ разбивается на пары одинаковых мономов с равными по модулю, но противоположными по знаку коэффициентами. Пусть моному X соответствует перестановка $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{s-i}, \ldots, a_n)$. Тогда найдется моном, соответствующий тому же произведению переменных и соответствующий перестановке $(a_1, \ldots, a_{s-i}, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ (это следует из строения матриц A_i). Более того, произведение коэффициентов при двух экземплярах l_j (а значит, и модуль коэффициента в сумме у мономов) будет в обоих случаях одинаковым (и равным $1, 2, 4, 8$ или 16), а в знакопеременную сумму эти два монома войдут с разными знаками, поскольку соответствующие перестановки отличаются друг от друга умножением на транспозицию. Следовательно, сумма всех элементов в каждом $\mathcal{A}_{s,i}$, а значит, и во всем $\mathcal{A}$ равна нулю. □

Следствие 1. *При $k < n$ определитель матрицы Картана равен нулю, при $k = n$ он равен $cl_1l_2\ldots l_n$, где s – некоторая константа. В обоих случаях, порядок группы не меняется при перестановке аргументов (из определения алгебры Λ).*

Доказательство. Действительно, в первом случае порядок группы Гротендика бесконечен, во втором – равен модулю определителя матрицы или бесконечен (при $c = 0$). □

Таким образом, осталось разобрать случай $k \geq n$. На самом деле, как мы увидим, в этом случае величина k может принимать только два значения: n и $n + 1$.

Напомним, что с каждой симметрической специальной бирядной алгеброй связан так называемый граф Брауэра. Это широко известное понятие в основном применялось в литературе к специальным бирядным алгебрам конечного типа представления, поэтому мы вместо точной ссылки просто дадим определение (эквивалентное известному для алгебр конечного типа), согласованное с терминологией данной работы и годящееся для всех симметрических специальных бирядных алгебр.

Определение. *Пусть Λ – симметрическая специальная бирядная алгебра. Рассмотрим граф, вершины которого суть A-циклы Λ (включая формальные петли), а ребра взаимнооднозначно соответствуют вершинам колчана алгебры Λ, причем каждое ребро со-*

единяет те два (возможно совпадающих) A-цикла, которые содержат соответствующую этому ребру вершину колчана. Полученный граф называется графом Брауэра алгебры Λ.

Отметим, что граф Брауэра может содержать петли и кратные ребра. Также вершинам графа Брауэра обычно сопоставляют метки – кратности соответствующих A-циклов; для нас здесь это не будет иметь значения.

В наших обозначениях k – число вершин графа Брауэра, n – число ребер. Таким образом, в случае $k = n+1$ граф Брауэра – дерево, а в случае $k = n$ в этом графе имеется единственный (простой) цикл.

Теорема. *Пусть Λ – неразложимая симметрическая специальная бирядная алгебра с n простыми модулями, и пусть k – число A-циклов в расширенном колчане алгебры Λ, $l_1, l_2, \ldots, l_k$ – кратности этих циклов. Тогда:*

1) $1 \leq k \leq n+1$;

2) *при $n > k$ матрица Картана вырождена;*

3) *при $n = k$ определитель матрицы Картана равен $cl_1 l_2 \ldots l_k$, где c – постоянная, равная 0 или 4 в зависимости от четности или нечетности длины единственного цикла в соответствующем графе Брауэра;*

4) *при $k = n+1$ определитель матрицы Картана равен*

$$l_1 l_2 \ldots l_k \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \cdots + \frac{1}{l_k} \right).$$

В частности, порядок группы Гротендика не меняется при перестановках набора кратностей циклов.

Доказательство. 1. Заметим, что если циклов в колчане не меньше $n+2$ то, стерев по ребру из каждого цикла, мы получим связный (как неориентированный) граф с n вершинами и не более, чем $2n - (n+2) = n-2$ ребрами, чего быть не может.

2. Утверждение 2 содержится в следствии 1.

3,4. Поскольку при $n = 1$ утверждение очевидно, предположим, что $n > 1$. Подвергнем колчан следующей (возможно, пустой) цепочке преобразований. Пусть v – вершина колчана такая, что один из A-циклов, проходящих через v, есть петля, а второй имеет вид $(a_1 a_2 \ldots a_s)^l$ (отличный от петли), где начало стрелки a_1 и конец стрелки a_s суть v. Выкинем из колчана вершину v, петлю и стрелки a_1, a_s, введя вместо них стрелку a, у которой начало совпадает с началом a_s, конец – с концом a_1; вместо A-цикла $(a_1a_2\dots a_s)^l$ введем A-цикл $(aa_2\dots a_{s-1})^l$ той же кратности. Ясно, что мы вновь придем к колчану симметрической неразложимой специальной бирядной алгебры с зафиксированным набором A-циклов, количества простых модулей и A-циклов уменьшатся при этом ровно на 1, а матрица Картана получится из исходной матрицы Картана выбрасыванием строки и столбца, соответствующих вершине v. Изменение же в соответствующем графе Брауэра просто сведётся к выкидыванию из него висячей вершины (и инцидентного ей ребра).

Будем совершать последовательно такие преобразования, пока это возможно. В результате мы придем или к колчану с одной вершиной, или к колчану с n_1 вершинами, все циклы которого имеют длину не меньше 2. В случае $n = k+1$ последний вариант невозможен (так как общее количество ребер вдвое больше количества вершин), а в случае $n = k$ мы получаем, что все циклы имеют длину 2, и граф, получающийся из колчана заменой пар противоположных ребер в каждом цикле на неориентированное ребро, представляет собой цикл.

В случае $n = k$ определитель получившейся матрицы легко вычислить: в случае четного n_1 он равен нулю, а в случае n_1 нечетного – учетверенному произведению всех l_i. Заметим, что граф Брауэра соответствующей алгебры есть цикл длины n_1, так что для соответствующих алгебр утверждение доказано.

Теперь докажем, что если утверждение верно для алгебры, полученной после одного вышеописанного преобразования некоторого колчана, то оно верно и для алгебры исходного колчана; тогда по индукции мы немедленно заключим истинность предложения для всех алгебр.

Действительно, пусть A – исходная матрица Картана, A_1 – редуцированная, и предположим, не умаляя общности, что переменная l_1 соответствовала выкинутой петле, l_2 – урезанному циклу, и выкинуты были первая строка и первый столбец матрицы. По предположению определитель A_1 в случае $k = n+1$ (соответственно, $k = n$) равен $l_2\dots l_k(\frac{1}{l_2}+\dots+\frac{1}{l_k})$ (соответственно, $l_2l_3\dots l_k$); значит, часть знакопеременной суммы матрицы A, содержащая произведения с сомножителем l_1, равна $l_1l_2\dots l_k(\frac{1}{l_2}+\dots+\frac{1}{l_k})$ (соответственно, $l_1l_2l_3\dots l_k$). Далее, всякое слагаемое, содержащее два сомножителя l_2, взятых из первой строки и первого столбца матрицы (но не из верхней левой клетки) однозначно соответствует равному ему по модулю, но противоположному по знаку слагаемому того же вида, в котором один из сомножителей вида $s_1 l_2$ взят из левой верхней клетки – см. доказательство утверждения 1. Таким образом, остались неучтенными лишь те слагаемые-произведения, в которых l_2 присутствует лишь один раз и он взят из левой верхней клетки. Применяя вновь индукционное предположение, мы видим, что сумма таких слагаемых равна $l_2 l_2 l_3 \dots l_k \frac{1}{l_2} = l_2 l_3 \dots l_k$ в случае $k = n+1$; и эта сумма равна нулю в случае $k = n$ (поскольку алгебраическое дополнение к "угловому" элементу равно по индукционному предположению $l_2 l_3 \dots l_k$, т.е. в нем нет слагаемых, не содержащих l_2). Поэтому значение всей знакопеременной суммы равно требуемому выражению. □

Следствие 2. *В обозначениях предыдущего предложения имеем: группа Гротендика стабильной категории симметричной специальной бирядной алгебры конечна (не содержит свободного слагаемого) лишь в следующих двух случаях:*

1. $k = n+1$.
2. $k = n$ *и единственный цикл в графе Брауэра этой алгебры имеет нечетную длину.*

Литература

1. H. Tachikawa, T. Wakamatsu, *Cartan matrices and Grothendieck groups of stable categories.* — J. of Algebra **144(2)** (1991), 390–398.
2. R. Martinez-Villa, *The stable group of a selfinjective Nakayama algebra.* — Comm. in Algebra **19(2)** (1991), 509–517.
3. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Конечная порожденность алгебры Йонеды симметрических специальных бирядных алгебр.* (в печати), — Алгебра и анализ (2005).

Antipov M. A. Grothendieck group for the stable category of symmetric special biserial algebras.

In this paper we describe Cartan matrices of symmetric special biserial algebras and compute the order of Grothendieck group for the stable category of these algebras. In particular, we obtain a criterion for existence of a free summand in these groups.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 ноября 2004 г.