Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

О. Ю. Ванюшина

О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ИНВАРИАНТОВ ВЕТВЛЕНИЯ В РАЗМЕРНОСТИ 2

Введение

В статье изучаются свойства скачков ветвления кривых на поверхностях в характеристике 2 для случая накрытия, соответствующего расширению полей с абелевой группой Галуа порядка 2^n. При этом предполагается, что дивизор ветвления имеет простые нормальные пересечения.

Рассматриваются всевозможные простые дивизоры (кривые), не являющиеся компонентами дивизора ветвления, для которых соответствующее нормирование поля функций поверхности имеет единственное продолжение. Скачки ветвления соответствующего накрытия такой кривой зависят только от струи этой кривой достаточно высокого порядка в точке, где вычисляются эти скачки. Доказано, что значения скачков ограничены, и подмножество струй, для которых значение некоторого скачка ветвления равно заданному числу, является пересечением открытого и замкнутого множеств по отношению к топологии, индуцированной топологией Зарисского на пространстве струй. Кроме того, если дополнительно известно, что исходное расширение циклическое, то подмножество, на котором все скачки принимают максимальные значения, является открытым.

Для алгебраически замкнутого поля k, такого, что $\operatorname{char} k = p > 0$, рассматривается двумерная аффинная поверхность $\operatorname{Spec} A$ над k с полем функций K. Пусть L – расширение Галуа поля K. Тогда многообразие $\operatorname{Spec} B$, где B – целое замыкание A в L, можно рассматривать как накрытие многообразия $\operatorname{Spec} A$. Каждой замкнутой (неприводимой) кривой C на $\operatorname{Spec} A$ соответствует одна или несколько кривых, лежащих над ней в $\operatorname{Spec} B$. Дивизор ветвления морфизма $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, соответствующего вложению $A \to B$, является линейной комбинацией таких кривых C, что для некоторой кривой D, лежащей над C, индекс ветвления

Работа поддержана грантом РФФИ No. 01-01-00997.

больше 1, либо соответствующее расширение полей вычетов несепарабельно. Рассмотрим кривую C, не входящую в дивизор ветвления, и неособую точку O на ней. Пусть v – нормирование на $k(C)$, соответствующее O, D – некоторая кривая, лежащая над C, w – продолжение v в расширении $k(D)/k(C)$. Тогда скачки полученного расширения нормированных полей называются скачками ветвления кривой C в точке O.

Так как расширение L/K является расширением Галуа, то для кривой, не входящей в дивизор ветвления, скачок определен корректно, т. е. не зависит от выбора кривой D и нормирования w. Скачки считаются только в точках пересечения данной кривой C с кривой из дивизора ветвления. В предположении, что дивизор ветвления имеет простые нормальные пересечения, перейдя к достаточно маленькой окрестности точки, можно считать, что дивизор ветвления состоит из не более чем двух кривых, эти кривые пересекаются трансверсально и регулярны в точке пересечения. Известно, что у достаточно близких кривых все скачки совпадают. Классы близких кривых называются струями, и на множестве струй можно ввести топологию.

Для случая $|L:K| = p$ в [1] и [2] доказана полунепрерывность и ограниченность скачка и найдена асимптотика максимального значения скачка. В этой работе рассматривается случай $p = 2$. Изучается ситуация в окрестности точки, поэтому можно перейти к полному регулярному двумерному локальному кольцу, то есть $k[[T, U]]$.

§1. Вспомогательные утверждения

Определение. *Пусть K – дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов характеристики p, и L/K – конечное расширение Галуа. Пусть v – нормирование на L и $O_L = \{a \in L | v(a) \geqslant 0\}$. Тогда i-ой подгруппой ветвления при $i \geqslant -1$ называется*

$$G_i = G_i(L/K) = \{g \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid \forall a \in O_L \ v(g(a) - a) \geqslant i + 1\},$$

и i-м скачком ветвления при $i \geqslant 1$ называется

$$h^{(i)} = h^{(i)}(L/K) = \min\{j \geqslant 1 \mid |G_j| \not| \, p^i\} - 1.$$

Определение корректно, так как известно, что $|G_N| = 1$ при достаточно больших N.

Если порядок $\mathrm{Gal}(L/K)$ равен простому числу, то единственный скачок $h^{(1)}(L/K)$ будем также обозначать просто $h(L/K)$, а в случае $L=K$ положим $h(L/K)=0$.

Лемма 1. *Пусть p – простое число, K_0 – полное дискретно нормированное поле, $\mathrm{char}\, K_0 = p$, заданы расширения полей $K_i = K_{i-1}(x_i)$, все K_i различны, расширения заданы уравнениями $x_i^p - x_i = a_i$, где $a_i \in K_{i-1}$ при $i = 1, \ldots, n$. На K_i заданы нормирования v_i, такие, что v_{i+1} является продолжением v_i, при этом K_0 полно относительно v_0 и имеет совершенное поле вычетов, и $v_{i-1}(a_i) \geqslant 0$. Тогда $\overline{K}_n = \overline{K}_0(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, где $\overline{x}_i$ – класс x_i в поле вычетов, и $|\overline{K}_n : \overline{K}_0| = n$.*

Доказательство. Так как $|K_n : K_0| \geqslant |\overline{K}_n : \overline{K}_0|$, достаточно проверить, что $|K_i : K_{i-1}| \leqslant |\overline{K}_i : \overline{K}_{i-1}|$ для любого i, то есть что $\overline{K}_i \neq \overline{K}_{i-1}$. Пусть $\overline{K}_i = \overline{K}_{i-1}$ для некоторого i. Тогда $\overline{x}_i \in \overline{K}_{i-1}$, и, следовательно, $x_i + y \in K_{i-1}$ для некоторого $y \in K_i$, такого, что $v_i(y) > 0$. Из того, что $(x_i+y)^p - (x_i+y)$ и $x_i^p - x_i$ принадлежат полю K_i, следует, что $y^p - y \in K_{i-1}$. Таким образом, из того, что $v_{i-1}(y^p - y) > 0$ и K_{i-1} полно, следует, что $y \in K_{i-1}$ и $x_i \in K_{i-1}$, что противоречит тому, что все K_i различны.

Лемма 2. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов, $\mathrm{char}\, K = p$, и L/K – циклическое расширение Галуа степени p^n, $L = K(x_1, \ldots x_n)$, $K_0 = K$, при $i \geqslant 1$ расширения $K_i = K_{i-1}(x_i)$ заданы уравнениями $x_i^p - x_i = a_i$, где $a_i \in K_{i-1}$. На K_i заданы нормирования v_i, такие, что v_{i+1} является продолжением v_i, и известно, что $v_{i-1}(a_i) = -pm_i + 1$. Тогда скачки L/K равны $h^{(i)} = pm_{n-i+1} - 1$.*

Доказательство. Следует из того, что

$$\varphi_{K_n/K_0} = \varphi_{K_1/K_0} \circ \varphi_{K_2/K_1} \circ \cdots \circ \varphi_{K_n/K_{n-1}},$$

где φ – функция Эрбрана (см. [3]).

Следствие. *В обозначениях леммы все K_i различны, и i-й скачок L/K равен скачку K_{n-i+1}/K_{n-i}.*

Далее считаем, что k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2, и $K = k((\pi))$ – полное дискретно нормированное поле с униформизующим элементом π. В этих предположениях любое расширение K степени 2 является разветвленным, так как расширение $\overline{K}$ тривиально.

Лемма 3. *Для любых целых чисел A, B, C, r, N, M, таких, что*

(1) $A < 0$,
(2) $M > A, B, C$,
(3) $N \geqslant 0$,
(4) $0 < r \leqslant \frac{-A+1}{2}$,
(5) $M > N - \min\{A, B\} - \min\{A + B, C, 0\} + 1$,

при j таких, что $\min\{2B + A, 2C\} \leqslant j < N$, существуют

$$S_j(X_A, \ldots, X_{M-1}, Y_B, \ldots, Y_{M-1}, Z_C, \ldots, Z_{M-1}),$$

которые являются рациональными функциями от $X_i^{2^{-A}}, Y_i, Z_i$ над k, такие, что выполнено следующее условие.

Пусть L/K – расширение полей, $L = K(x)$, где $x^2 - x = a$ для некоторого $a \in K$, для $t \in L$ выполнено $t = bx + c$, где $b, c \in K$, при этом $v(a) \geqslant A, v(b) \geqslant B, v(c) \geqslant C$, разложения a, b, c в ряд Лорана имеют вид

$$a = \sum_{i=A}^{+\infty} \alpha_i \pi^i, \quad b = \sum_{i=B}^{+\infty} \beta_i \pi^i, \quad c = \sum_{i=C}^{+\infty} \gamma_i \pi^i,$$

и $h(L/K) = r$. Тогда можно так выбрать униформизующий элемент y поля L, что

$$v_L\left(t - \sum_{i=\min\{2B+A,2C\}}^{N-1} \theta_i y^i\right) \geqslant N,$$

где $\theta_i = S_i(\alpha_A, \ldots, \alpha_{M-1}, \beta_B, \ldots, \beta_{M-1}, \gamma_C, \ldots, \gamma_{M-1})$.

Доказательство. В случае $L = K$ имеем $x \in K$ и, следовательно, представляется в виде

$$x = \sum_{i=A/2}^{+\infty} \psi_i \pi^i \quad \text{для некоторых} \quad \psi_i \in k.$$

Из того, что $x^2 - x = a$, получаем, что

$$\alpha_i = \begin{cases} -\psi_i, & i \not\vdots\, 2, \\ \psi_{i/2}^2 - \psi_i, & i \,\vdots\, 2. \end{cases}$$

Таким образом, для всех $i \geqslant A$ существуют рациональные функции D_i от переменных $X_A, \ldots, X_i$, такие, что $\psi_i = D_i(\{\alpha_s\})$. По условию

$$t \equiv \Big(\sum_i \beta_i \pi^i\Big)\Big(\sum_l \psi_l \pi^l\Big) + \sum_m \gamma_m \pi^m \mod \pi^N,$$

где $B \leqslant i \leqslant \max\Big\{N - \dfrac{A}{2} - 1, B\Big\}$, $\dfrac{A}{2} \leqslant l \leqslant \max\Big\{N - B - 1, \dfrac{A}{2}\Big\}$, $C \leqslant m \leqslant N-1$. Так как все значения i, l, m не превосходят M, в качестве S_j подойдут рациональные функции, определяемые равенством

$$\sum_j S_j(\{X_s\},\{Y_s\},\{Z_s\})\tau^j \equiv$$
$$\equiv \big(\sum_i Y_i\tau^i\big)\big(\sum_l D_l(\{X_s\})\tau^l\big) + \sum_{m=C} Z_m\tau^m \mod \tau^N.$$

Теперь рассмотрим случай $L \neq K$. При i таких, что $A \leqslant i < M$, положим

$$\varepsilon_i(X_A,\dots,X_{M-1}) = \begin{cases} X_i + X_{2i}^{\frac{1}{2}} + \dots, & i<0,\ i \not\vdots\, 2,\\ 0, & i<0,\ i \,\vdots\, 2,\\ X_i, & i \geqslant 0.\end{cases}$$

Получившиеся $\varepsilon_i(X_A,\dots,X_{M-1})$ являются многочленами от $X_j^{2^A}$. Найдем $d \in K$, такой, что

$$a + d^2 - d \equiv \sum_{i=A}^{M-1} \varepsilon_i(\alpha_A,\dots,\alpha_{M-1})\pi^i \mod \pi^M,$$

то есть $d^2 - d$ должен быть равен

$$\sum_i \sum_{j\geqslant 0}(\alpha_{2^j i}\pi^{2^j i} - \alpha_{2^j i}^{2^{-j}}\pi^i) = \sum_i \sum_{j\geqslant 0}\sum_{l=1}^{j}\big((\alpha_{2^j i}\pi^{2^j i})^2 - \alpha_{2^j i}\pi^{2^j i}\big)^{2^{-l}} =$$
$$=\Big(\sum_i \sum_{j\geqslant 0}\sum_{l=1}^{j}(\alpha_{2^j i}\pi^{2^j i})^{2^{-l}}\Big)^2 - \sum_i \sum_{j\geqslant 0}\sum_{l=1}^{j}(\alpha_{2^j i}\pi^{2^j i})^{2^{-l}},$$

где индекс i принимает нечетные значения, $A \leqslant i < 0$. Таким образом, можно взять $d = \sum_{A\leqslant i<M}\delta_i(\{\alpha_s\})\pi^i$, где $\delta_i \in k[X_A^{2^A},\dots,X_{M-1}^{2^A}]$ такие, что

$$\tau^{-A}\sum_{\substack{A\leqslant i<0\\ i \not\vdots\, 2}}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{l=1}^{j}(X_{2^j i}\tau^{2^j i})^{2^{-l}} \equiv \tau^{-A}\sum_{A\leqslant i<M}\delta_i(\{X_s\})\tau^i \mod \tau^{M-A}.$$

Тогда

$$(x+d)^2-(x+d)\equiv\sum_{i=A}^{M-1}\varepsilon_i(\{\alpha_s\})\pi^i\mod\pi^M.$$

Так как $h(L/K)=r$, то $\min\{i\mid\varepsilon_i(\{\alpha_s\})\neq 0\}=-2r+1$. Положим $y=(x+d)\pi^r$, он является униформизующим элементом L. Для y выполнено

$$y^2-y\pi^r\equiv\sum_{i=-2r+1}^{M-1}\varepsilon_i(\{\alpha_s\})\pi^{i+2r}\mod\pi^{M+2r}.$$

Из того, что расширение L/K – разветвленное, следует, что это сравнение выполнено также по модулю идеала $y^{2(M+2r)}$, то есть

$$y^2-y\pi^r\equiv\sum_{i=-2r+1}^{M-1}\varepsilon_i(\{\alpha_s\})\pi^{i+2r}\mod y^{2(M+2r)}. \tag{1}$$

Пусть $P_{i,j}(\{X_s\})\in k(X_A,\dots,X_{M-1})$ таковы, что

$$\sum_{i=0}^{M+2r-1}\sum_{j=1}^{2(M+2r)-1}P_{i,j}(\{X_s\})\tau^i\rho^j\equiv$$
$$\equiv(\rho^2-\rho\tau^r)\Bigg(\sum_{i=-2r+1}^{M-1}\varepsilon_i(\{X_s\})\tau^{i+2r-1}\Bigg)^{-1},$$

в $k[\rho,\tau,X_A,\dots,X_{M-1},\varepsilon_{-2r+1}^{-1}(\{X_s\})]$, где сравнение берется по модулю суммы идеалов τ^{M+2r} и $\rho^{2(M+2r)}$, тогда $P_{i,j}(\{X_s\})\in k[X_A^{2^A},\dots,X_{M-1}^{2^A},\varepsilon_{-2r+1}^{-1}(\{X_s\})]$. Так как

$$2(M+2r)\geqslant 2M+4>N-2\min\{A+B,C,0\}+2,$$

получаем

$$\pi\equiv\sum_{i=0}^{M+2r-1}\sum_{j=1}^{2(M+2r)-1}P_{i,j}(\{\alpha_s\})\pi^iy^j\mod y^n,$$

где $n=N-2\min\{A+B,C,0\}+2$. Положим

$$Q\in k(\rho,\tau,X_A^{2^A},\dots,X_{M-1}^{2^A}),$$

равным

$$Q(\rho, \tau, \{X_s\}) = \Big(\sum_j (\tau^r \rho^{-1})^j\Big) \sum_i \varepsilon_i(\{X_s\}) \tau^{i+2r-1},$$

где $0 \leqslant j \leqslant 2(M+2r)-1$ и $-2r+1 \leqslant i \leqslant M-1$, тогда

$$Q \in k[\rho, \tau, \rho^{-1}, X_A^{2^A}, \ldots, X_{M-1}^{2^A}].$$

Из (1) следует, что для любого натурального $d < M+2r$ выполнено

$$\pi^{-d} \equiv y^{-2d} Q^d(y, \pi, \{\alpha_s\}) \mod y^{2(M+2r)-2d}.$$

По условию

$$t \equiv y\pi^{-r} \sum_l \beta_l \pi^l - \left(\sum_i \delta_i(\{\alpha_s\})\pi^i\right)\left(\sum_l \beta_l \pi^l\right) + \sum_m \gamma_m \pi^n \mod y^n,$$

где $A \leqslant i < M$, $B \leqslant l < M$, $C \leqslant i < m$, $n = 2M + 2\min\{A, B\}$. Заменим π в отрицательных степенях на $y^{-2d}Q^d(y, \pi, \{\alpha_s\})d$. Получим

$$t \equiv \sum_{i \geqslant 0} \sum_{j \geqslant 2\min\{A+B, C, 0\}} T_{i,j}^{(0)}(\{\alpha_s\}, \{\beta_s\}, \{\gamma_s\})\pi^i y^j \mod y^n,$$

где $n = 2(M + \min\{A, B\} + \min\{A+B, C, 0\})$, функции $T_{i,j}^{(0)}$ принадлежат кольцу

$$k\Big[X_A^{2^A}, \ldots, X_{M-1}^{2^A}, \varepsilon_{-2r+1}^{-1}(\{X_s\}), Y_B, \ldots, Y_{M-1}, Z_C, \ldots, Z_{M-1}\Big].$$

Обозначим это кольцо через K'.

Нормирование каждого ненулевого слагаемого $T_{i,j}^{(0)}(\{\alpha_s\}, \{\beta_s\}, \{\gamma_s\})\pi^i y^j$ не меньше $2\min\{A+B, C, 0\}$, а из определения M следует, что

$$2(M + \min\{A, B\} + \min\{A+B, C, 0\}) \geqslant N.$$

Таким образом, выполнено сравнение

$$t \equiv \sum_{(i,j) \in D} T_{i,j}^{(0)}(\{\alpha_s\}, \{\beta_s\}, \{\gamma_s\})\pi^i y^j \mod y^N,$$

где D – множество пар (i, j) таких, что $i \geqslant 0$, $2i + j \geqslant 2\min\{A + B, C, 0\}$.

Теперь будем заменять π на $\sum_i \sum_j P_{i,j}(\{\alpha_s\})\pi^i y^j$, $0 \leqslant i \leqslant M + 2r - 1$, $1 \leqslant j \leqslant 2(M+2r)-1$ в формуле для t, пока не получим

$$t \equiv \sum_{j=2\min\{A+B,C,0\}}^{N-1} S_j(\{\alpha_s\},\{\beta_s\},\{\gamma_s\})y^j \mod y^N$$

для некоторых функций $S_j \in K'$. Построим последовательность функций $T_{i,j}^{(\nu)} \in K'$, $\nu = 0,1,2,\ldots$ при $(i,j) \in D$. Если для данного ν выполнено $T_{i,j}^{(\nu)}(\{X_s\},\{Y_s\},\{Z_s\}) = 0$ для любой пары (i,j), такой, что $i > 0$, то полагаем $S_j = T_{0,j}^{(\nu)}$ для любого j. Пусть для некоторого $i > 0$ и некоторого j выполнено $T_{i,j}^{(\nu)} \neq 0$. Тогда положим

$$f_\nu = \min\{2i + j | i > 0, T_{i,j}^{(\nu)}(\{X_s\},\{Y_s\},\{Z_s\}) \neq 0\},$$

$$D_\nu = \{(i,j) | 2i + j = f_\nu, i > 0, T_{i,j}^{(\nu)}(\{X_s\},\{Y_s\},\{Z_s\}) \neq 0\}.$$

Рассмотрим сумму $\sum_{(i,j)\in D} T_{i,j}^{(\nu)}(\{X_s\},\{Y_s\},\{Z_s\})\tau^i\rho^j$. В слагаемых, для которых $(i,j) \in D_\nu$, заменим один сомножитель τ на $\sum_I \sum_J P_{I,J}(\{X_s\})\tau^I\rho^J$, $0 \leqslant I \leqslant M + 2r - 1$, $1 \leqslant J \leqslant 2(M+2r)-1$. В новой сумме для пар $(i,j) \in D$ обозначим коэффициенты при $\tau^i\rho^j$ через $T_{i,j}^{(\nu+1)}(\{X_s\},\{Y_s\},\{Z_s\})$. Тогда $T_{i,j}^{(\nu+1)} \in K'$ и

$$\sum_{(i,j)\in D} T_{i,j}^{(\nu)}(\{\alpha_s\},\{\beta_s\},\{\gamma_s\})\pi^i y^j \equiv$$
$$\equiv \sum_{(i,j)\in D} T_{i,j}^{(\nu+1)}(\{\alpha_s\},\{\beta_s\},\{\gamma_s\})\pi^i y^j \mod y^N.$$

Так как $P_{i,j} = 0$ при $i > 0$, $2i + j = 0$, то $f_{\nu+1} > f_\nu$. Следовательно, нормирования слагаемых, содержащих π, а не только y, увеличиваются, и процесс заканчивается не более, чем за N шагов.

В [4] доказана теорема:

Пусть L – расширение Галуа поля K характеристики p, и порядок $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ является степенью p. Тогда существует унипотентная матрица $M \in M_n(K)$ для некоторого n, такая, что $L = K(x_1,\ldots,x_n)$, где

$$\begin{pmatrix} x_1^p \\ \ldots \\ x_n^p \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Применим теорему к расширению Галуа L/K, где $K = k((\pi))$ для поля k характеристики 2. Получаем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char} k = 2$, $K = k((\pi))$ и L/K – расширение Галуа степени 2^ν. Тогда существуют натуральное число n, элементы $a_{i,j} \in K$, $x_i \in L$ такие, что $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ и*

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 = a_{2,1}x_1 \\ \ldots \\ x_n^2 - x_n = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}. \end{cases}$$

Рассмотрим систему уравнений с коэффициентами из K вида

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 = a_{1,0} \\ x_2^2 - x_2 = a_{2,0} + a_{2,1}x_1 \\ \ldots \\ x_n^2 - x_n = a_{n,0} + a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}. \end{cases} \qquad (*)$$

Лемма 6 утверждает, что для того, чтобы выразить элемент $L = K(x_1, \ldots x_n)$, являющийся линейной комбинацией $1, x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из K с некоторой точностью N, достаточно знать коэффициенты системы $a_{i,j}$ с точностью M, причем M зависит только от n, N и нормирований $a_{i,j}$. Для доказательства леммы 6 понадобится вспомогательная лемма 5. В этих леммах $K_0 = K$, $K_i = K_{i-1}(x_i)$, и v_i – дискретные нормирования на K_i, такие, что v_{i+1} является продолжением v_i.

Лемма 5. *Пусть расширение полей задано системой уравнений вида $(*)$, и для любых i, j, таких, что $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant i-1$ выполнено $v(a_{i,j}) \geqslant -R$. Тогда $v_l(x_m) \geqslant -(2^n - 1)R$ при всех l, m таких, что $1 \leqslant m \leqslant l \leqslant n$.*

Доказательство. Из того, что $K_0 \neq K_1$, следует, что $R > 0$.

Докажем по индукции, что $v_l(x_l) \geqslant -(2^l - 1)R$. База: для $l = 1$ утверждение верно, так как $v_1(x_1) = v_0(a_{1,0}) \geqslant -R$.

Переход к $l + 1$:

$$\begin{aligned} &v_{l+1}(x_{l+1}) \geqslant \min\{v_l(a_{l+1,0}), \ldots, v_l(a_{l+1,s}x_s), \ldots\} \geqslant \\ &\geqslant \min\{-2^l R, \ldots, -2^l R - 2^{l-s}(2^s - 1)R, \ldots\} = \\ &= \min\{-2^l R, \ldots, -(2^l + 2^l - 2^{l-s})R, \ldots\} = -(2^{l+1} - 1)R. \end{aligned}$$

Следствие. *Если в условиях леммы 5 дополнительно известно, что расширение K_n/K является циклическим, то значения скачков не превосходят $(2^{n+1}-1)R$.*

Доказательство. Выберем последовательно числа $i(1),\dots,i(\nu)$ так, что

$$i(s)=\min\{i \mid x_i\notin K(x_1,\dots,x_{i(s-1)})\}.$$

Тогда $L=K(x_{i(1)},\dots,x_{i(\nu)})$, и, по следствию к лемме 2, для любого $j=1,\dots,\nu$ имеем

$$\begin{aligned}h^{(j)}(L/K)=&h(K(x_{i(1)},\dots,x_{i(\nu-j+1)})/K(x_{i(1)},\dots,x_{i(\nu-j)}))=\\=&h(K(x_{i(1)},\dots,x_{i(\nu-j+1)})/K(x_{i(1)},\dots,x_{i(\nu-j+1)-1})),\end{aligned}$$

что не превосходит $v_{i(\nu-j+1)}(x_{i(\nu-j+1)})$.

Лемма 6. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char}k=2$, $K=k((\pi))$, заданы натуральное число R и целые неотрицательные числа A_1, A_2, ..., A_n и N. Рассмотрим множество наборов $\{\alpha_{i,j,q}\}$, где $\alpha_{i,j,q}\in k$, $1\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant j\leqslant i-1$, $q\geqslant -R$, и соответствующих расширений полей K_n/K, заданных системами уравнений вида $(*)$ с коэффициентами $a_{i,j}=\sum_{q=-R}^{+\infty}\alpha_{i,j,q}\pi^q$.*

а) *Существуют числа $M=M(N,R,n)$ и $R'<N$ и набор функций $T_{s,N,R,n}$ при $R'\leqslant s<N$ от $(\frac{n(n+1)}{2}+(n+1))(R+M)$ переменных, являющихся рациональными функциями над k от своих переменных в степени 2^{-D} для достаточно большого D, такие, что выполнено следующее условие. Пусть $t_l\in K$, $0\leqslant l\leqslant n$; $\theta_{l,q}\in k$, $0\leqslant l\leqslant n$, $-R\leqslant q<M$, таковы, что $v(t_l)\geqslant -R$, $t_l\equiv\sum_{-R\leqslant q<M}\theta_{l,q}\pi^q \mod \pi^M$, и значения скачков $h(K_i/K_{i-1})=A_i$ при $i=1,\dots,n$. Тогда существует π_n – униформизующий K_n, такой, что для $t=t_0+t_1x_1+\dots+t_nx_n$ и $t'=\sum_{R'\leqslant s<N}\theta_s\pi_n^s$, где $\theta_s=T_{s,N,R,n}(\{\alpha_{i,j,q}\}_{q=-R}^{M-1},\{\theta_{l,q}\})$, выполнено $v_n(t-t')\geqslant N$.*

б) *Существует набор многочленов P_μ от $\frac{n(n+1)}{2}(R+M(0,R,n-1))$ переменных такой, что если $h(K_i/K_{i-1})=A_i$ при $i=1,\dots,n-1$, то условие $h(K_n/K_{n-1})\leqslant A_n$ равносильно тому, что все P_μ обращаются в 0 в точке $\{\alpha_{i,j,q}\}_{q=-R}^{M(0,R,n-1)-1}$, где при $n\geqslant 1$ числа $M(0,R,n)$ такие, как в* а), *и $M(0,R,0)=0$.*

в) *При натуральных n в качестве $M(N,R,n)$ можно взять $2^{2n}R+N+2^n$.*

Доказательство. а) Индукция по n. База $n=1$, по лемме 3.

Переход от $n-1$ к n. Положим

$$b = t_0 + t_1 x_1 + \dots + t_{n-1} x_{n-1},$$

$$a = a_{n,0} + a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}.$$

Тогда по лемме 5 получаем $v_{n-1}(a), v_{n-1}(b), v_{n-1}(t_n) \geqslant -2^n R$, по условию $x_n^2 - x_n = a$ и $t = t_n x_n + b$. Следовательно, если a, b, t_n известны с точностью $M(N, 2^n R, 1)$, и скачок $h(K_n/K_{n-1})$ равен данному числу A_n, то можно построить t с точностью N, то есть существуют функции $T_{s,N,2^nR,1}$, являющиеся рациональными функциями от своих переменных в степени 2^{-D_1}, такие, что если для $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in k$ при $-2^n R \leqslant i < M(N, 2^n R, 1)$ и некоторого π_{n-1} – униформизующего K_{n-1}, выполнено

$$a \equiv \sum_i \alpha_i \pi_{n-1}^i \mod \pi_{n-1}^{M(N,2^nR,1)},$$

$$b \equiv \sum_i \beta_i \pi_{n-1}^i \mod \pi_{n-1}^{M(N,2^nR,1)},$$

$$t_n \equiv \sum_i \gamma_i \pi_{n-1}^i \mod \pi_{n-1}^{M(N,2^nR,1)},$$

где $-2^n R \leqslant i < M(N, 2^n R, 1)$, то существует униформизующий π_n поля K_n, такой, что

$$v_n\big(t - \sum_{R' \leqslant s < N} T_{s,N,2^nR,1}(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, \{\gamma_i\}) \pi_n^s\big) \geqslant N.$$

Выразим $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ через рациональные функции от исходных переменных в степени 2^{-D_2}. Пусть $a_{i,j}$ и t_l известны с точностью $M' = M(N', R, n-1)$, где $N' = M(N, 2^n R, 1)$, коэффициенты их разложения в ряд равны $\alpha_{i,j,q}$ и $\theta_{l,q}$ при $-R \leqslant q \leqslant M'$, то есть

$$v(a_{i,j} - \sum_q \alpha_{i,j,q} \pi^q) \geqslant M(M(N, 2^n R, 1), R, n-1),$$

$$v(t_l - \sum_q \theta_{l,q} \pi^q) \geqslant M(M(N, 2^n R, 1), R, n-1),$$

и фиксированы скачки $h(K_{i+1}/K_i)$ при $i = 0, \dots, n-1$. Применим предположение индукции к расширению, заданному первыми $n-1$

уравнениями, и элементам a, b и $t_n = t_n + 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{n-1}$. Получим

$$\alpha_s = T_s\Big(\big\{\alpha_{i,j,q}\big\}_{i=1}^{n-1}{}_{j=1}^{i-1}, \big\{\alpha_{n,j,q}\big\}_{j=0}^{n-1}\Big),$$

$$\beta_s = T_s\Big(\big\{\alpha_{i,j,q}\big\}_{i=1}^{n-1}{}_{j=1}^{i-1}, \big\{\theta_{l,q}\big\}_{l=0}^{n-1}\Big),$$

$$\gamma_s = T_s\Big(\big\{\alpha_{i,j,q}\big\}_{i=1}^{n-1}{}_{j=1}^{i-1}, \big\{\theta_{n,q}\big\}, 0, \dots, 0\Big),$$

где $T_s = T_{s,M(N,2^nR,1),R,n-1}$. Композиции $T_{s,M(N,2^nR,1),R,n-1}$ и $T_{s,N,2^nR,1}$ являются рациональными функциями от своих переменных в степени 2^{-D} для достаточно большого D. В качестве $M(N,R,n)$ можно взять любое число, не меньшее M'.

б) В случае $n>1$ применим предыдущий пункт к расширению, заданному первыми $n-1$ уравнениями и элементу t, равному правой части последнего уравнения. Существуют набор функций $T_s = T_{s,0,R,n-1}$, униформизующий элемент π_{n-1} поля K_{n-1}, такие, что для $M = M(0,R,n-1)-1$ выполнено

$$t \equiv \sum_{R' \leqslant s < 0} T_s\big(\{\alpha_{i,j,q}\}_{i=1}^{n-1}{}_{j=1}^{i-1}, \{\alpha_{n,j,q}\}_{j=1}^{n-1}\big)\pi_{n-1}^s \mod k[[\pi_{n-1}]].$$

В случае $n=1$ это сравнение выполнено для $T_s = \alpha_{1,0,s}$. При $-R \leqslant \mu < 0$, $\mu \not\vdots\, 2$ положим

$$\varepsilon_\mu(X_{-R}, \dots, X_{-1}) = X_\mu + X_{2\mu}^{1/2} + \dots + X_{2^m\mu}^{1/2^m}, \quad 2^{m+1}\mu < -R \leqslant 2^m\mu.$$

Тогда при $K_n \neq K_{n-1}$ число $-2h(K_n/K_{n-1})+1$ равно минимальному номеру μ, для которого значения функции ε_μ в точке

$$X_s = T_s\big(\{\alpha_{i,j,q}\}_{i=1}^{n-1}{}_{j=1}^{i-1}, \{\alpha_{n,j,q}\}_{j=1}^{n-1}\big)$$

равно 0, и этот минимальный номер определен, а при $K_n = K_{n-1}$ значение ε_μ в этой точке равно 0 для любого μ. Следовательно, условие $h(K_{n-1}/K_n) \leqslant A_n$ равносильно тому, что $\varepsilon_\mu(\{T_s\}_{s=-R}^{-1})$ обращаются в 0 в точке $\{\alpha_{i,j,q}\}$ при всех нечетных μ, таких, что $-R \leqslant \mu < -2A_n+1$. Композиции функций ε_μ и T_s являются рациональными функциями от своих переменных в степени 2^{-D} для достаточно большого D, следовательно, существуют многочлены P_μ и Q_μ, такие, что

$$\varepsilon_\mu^{2^D}(\{T_s\}_{s=-R}^{-1}) = \frac{P_\mu}{Q_\mu}.$$

Так как многочлены P_μ и функции $\varepsilon_\mu(\{T_s\}_{s=-R}^{-1})$ обращаются в 0 одновременно, то эти многочлены – искомые.

в) Докажем утверждение индукцией по n. Проверим базу для $n = 1$ и $n = 2$. По лемме 3 для $n = 1$ достаточно, чтобы выполнялось

$$M(N, R, 1) > N - \min\{-R, -R\} - \min\{-R - R, -R, 0\} + 1,$$

то есть $M(N, R, 1) \geqslant M_1(N, R)$, где $M_1(N, R) = N + 3R + 2$. Так как $R > 0$, то $4R + N + 2$ подходит в качестве $M(N, R, 1)$. Чтобы доказать утверждение при $n = 2$, достаточно проверить, что

$$16R + N + 4 \geqslant M_1(M_1(N, 4R), R).$$

Из того, что $R > 0$, получаем

$$\begin{aligned} &M_1(M_1(N, 4R), R) = M_1(N + 12R + 2, R) = \\ =&N + 12R + 2 + 3R + 2 < 16R + N + 4. \end{aligned}$$

Докажем переход от $n - 1$ к n при $n > 2$. Достаточно проверить, что

$$2^{2n}R + N + 2^n \geqslant M(M(N, 2^n R, 1), R, n - 1),$$

где $M(N, R, m) = 2^{2m}R + N + 2^m$ при всех $m < n$. Это верно, так как

$$\begin{aligned} &M(M(N, 2^n R, 1), R, n - 1) = M(2^{n+2}R + N + 2, R, n - 1) = \\ =&2^{2n-2}R + 2^{n+2}R + N + 2 + 2^{n-1} < 2^{2n}R + N + 2^n = M(N, R, n). \end{aligned}$$

Следствие. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле,* $\operatorname{char} k = 2$, *$K = k((\pi))$, для набора $\{\alpha_{i,j,q}\} \in k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant i - 1$, $q \geqslant -R$, расширение полей K_n/K задано системой уравнений вида $(*)$, где $a_{i,j} = \sum_{q=-R}^{+\infty} \alpha_{i,j,q}\pi^q$. Тогда скачки $h(K(x_1, \ldots, x_{s+1})/K(x_1, \ldots, x_s))$ при $s = 0, \ldots, n - 1$ однозначно определяются набором $\{\alpha_{i,j,q}\}$ при $q < 2^{2n-2}R + 2^{n-1}$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n, что скачки однозначно определяются набором $\{\alpha_{i,j,q}\}$ при $q \leqslant M(0, R, n - 1)$ из леммы.

База $n = 0$. Для данного числа d условие $h(K_1/K_0) = A_1$ равносильно тому, что выполнено $h(K_1/K_0) \leqslant A_1$ и не выполнено $h(K_1/K) \leqslant A_1 - 1$. Каждое из этих условий равносильно тому, что некоторый набор многочленов от переменных $X_{i,j,q}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant i-1$, $-R \leqslant q < 0$ обращается в 0 в точке $\{\alpha_{i,j,q}\}$. Следовательно, значение скачка однозначно определяется множеством $\{\alpha_{i,j,q}\}$ при $q \leqslant M(0, R, 0)$.

Переход от n к $n+1$. Пусть скачки $h(K_1/K_0)$, ... , $h(K_n/K_{n-1})$ однозначно определяются $\{\alpha_{i,j,q}\}$ при $q \leqslant M(0, R, n-1)$ и при данных значениях $\alpha_{i,j,q}$ равны $A_1, \dots, A_n$ соответственно. Тогда условие $h(K_{n+1}/K_n) = A_{n+1}$ равносильно тому, что выполнено $h(K_{n+1}/K_n) \leqslant A_{n+1}$ и не выполнено $h(K_{n+1}/K_n) \leqslant A_{n+1} - 1$, поэтому это условие задается $\{\alpha_{i,j,q}\}$ при $q \leqslant M(0, R, n)$. Следовательно, все скачки задаются $\{\alpha_{i,j,q}\}$ при

$$q \leqslant \max\{M(0, R, 1), \dots, M(0, R, n)\} = M(0, R, n).$$

§2. Основной результат

В данном параграфе будут использоваться следующие обозначения:

k – алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char} k = 2$;

K – поле частных $k[[T, U]]$;

L/K – абелево расширение с группой Галуа G степени 2^ν;

B – целое замыкание $k[[T, U]]$ в L;

$\operatorname{Spec}_1 k[[T, U]] = \{p \in \operatorname{Spec} k[[T, U]] \mid \dim(k[[T, U]]/p) = 1\}$;

O – замкнутая точка $\operatorname{Spec} k[[T, U]]$, в ней считается скачок.

Если $p \in \operatorname{Spec}_1 k[[T, U]]$, то F_p – простой дивизор $\operatorname{Spec}(k[[T, U]]/p)$.

Для двух различных простых дивизоров F_p, $F_{p'}$ кратность пересечения по определению равна

$$(F_p.F_{p'}) = \dim_k k[[T, U]]/(p + p').$$

Множество таких $p \in \operatorname{Spec}_1 k[[T, U]]$, что F_p регулярны и не входят в дивизор ветвления L/K обозначим через E_1.

Струей идеала p порядка m называется $J_m(p) = \{p' \in E_1 \mid (F_p.F_{p'}) \geqslant m\}$.

Будем предполагать, что дивизор ветвления морфизма схем $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} k[[T, U]]$, соответствующего вложению $k[[T, U]] \to B$, имеет простые нормальные пересечения, то есть у него не более двух компонент, в точке O они регулярны и пересекаются трансверсально.

Обозначим через d количество компонент дивизора ветвления; через p_1, p_2 – идеалы, соответствующие этим кривым при $d=2$, и через p_1 – идеал, соответствующий единственной такой кривой при $d=1$.

Положим

$$T_r = \begin{cases} \{p \in E_1 \mid (F_p.F_{p_1}) = r\}, & d=1, \\ \{p \in E_1 \mid (F_p.F_{p_1}) = r, (F_p.F_{p_2}) = 1\}, & d=2, \end{cases}$$

и $T_{r,m} = \{J_m(p) \mid p \in T_r\}$.

Для любого $g \in G$ существует разложение G в прямое произведение своих циклических подгрупп $G = H_1 \times \cdots \times H_S$, такое, что $g \in H_S$. Если G не циклическая группа, обозначим через L_S неподвижное поле H_S и через L' – неподвижное поле $H_1 \times \cdots \times H_{S-1}$. По лемме 4, примененной к расширениям L_S/K и L'/K, получаем, что эти расширения можно задать как $L_S = K(z_1, \ldots, z_w)$, $L' = K(z_{w+1}, \ldots, z_{w+m})$, где z_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} z_1^2 - z_1 = 0 \\ z_2^2 - z_2 = b_{2,1} z_1 \\ \ldots \\ z_w^2 - z_w = b_{w,1} z_1 + \cdots + b_{w,w-1} z_{w-1} \\ z_{w+1}^2 - z_{w+1} = 0 \\ z_{w+2}^2 - z_{w+2} = b_{w+2,w+1} z_{w+1} \\ \ldots \\ z_{w+m}^2 - z_{w+m} = b_{w+m,w+1} z_{w+1} + \cdots + b_{w+m,w+m-1} z_{w+m-1}, \end{cases} \qquad (**_g)$$

где $b_{i,j} \in K$. При этом $L = L_S L' = K(x_1, \ldots, x_{w+m})$. Зафиксируем для каждого $g \in G$ некоторую систему $(**_g)$, и положим $n = \max_g \{w+m\}$. В случае циклического расширения достаточно рассмотреть одну систему уравнений

$$\begin{cases} z_1^2 - z_1 = 0 \\ z_2^2 - z_2 = b_{2,1} z_1 \\ \ldots \\ z_n^2 - z_n = b_{n,1} z_1 + \cdots + b_{n,n-1} z_{n-1}. \end{cases} \qquad (**)$$

Обозначим через E – множество идеалов $p \in \operatorname{Spec}_1 k[[T,U]]$, таких, что кольцо $k[[T,U]]/p$ регулярно, нормирование v, соответствующее p, имеет единственное продолжение на L, и $v(b_{i,j}) \geqslant 0$ для коэффициентов системы $(**)$ в случае циклического расширения, и для коэффициентов всех систем $(**_g)$ в случае нециклического расширения.

Для $p \in E$ обозначим через $h_p^{(i)}(\overline{K(z_1,\dots,z_{\alpha+\beta})}/\overline{K(z_1\dots,z_\alpha)})$ скачки расширения полей вычетов $K(z_1,\dots,z_{\alpha+\beta})/K(z_1\dots,z_\alpha)$ относительно продолжения на $K(z_1,\dots,z_{\alpha+\beta})$ нормирования, являющегося продолжением нормирования K, соответствующего идеалу p.

Минимальное число s, такое, что $h_p^{(i)}(\overline{L}/\overline{K}) = h_{p'}^{(i)}(\overline{L}/\overline{K})$ при всех i, если $(F_p.F_{p'}) \geqslant s+1$, обозначим через N_r. Такое N_r существует (см. [2]).

Изменив, если требуется, локальные параметры, можно считать, что при $d=2$ компоненты дивизора ветвления F_{p_1} и F_{p_2} заданы уравнениями $T=0$ и $U=0$ соответственно, при $d=1$ компонента F_{p_1} задана уравнением $T=0$ при $r>1$, и уравнением $U=0$ при $r=1$.

Зададим топологию на $T_{r,N}$ при $N \geqslant N_r$.

Рассмотрим случай $r=1$, $d=1$. Пусть $p \in T_1$. Тогда $p=(f)$, где $f \not\equiv 0 \mod (T,U^2)$. По подготовительной теореме Вейерштрасса можно считать

$$f \equiv -T + \varphi_1 U + \dots + \varphi_N U^N \mod (U^{N+1}),$$

где $\varphi_1,\dots,\varphi_N \in k$ однозначно определяются идеалом p. Таким образом, можно отождествить $T_{1,N}$ с множеством замкнутых точек $\mathbb{A}_k^N$ посредством

$$(\varphi_1,\dots,\varphi_N) \to J_N((-T+\varphi_1 U+\dots+\varphi_N U^N)).$$

Заметим, что $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ не зависят от N.

Теперь рассмотрим случай $r \geqslant 2$ или $d=2, r=1$. Если $p \in T_r$, то $p=(f)$,

$$f \equiv -T + \varphi_r U^r + \dots + \varphi_N U^N \mod (U^{N+1}),$$

где $\varphi_r,\dots,\varphi_N \in k$ однозначно определяются идеалом p и $\varphi_r \neq 0$. Имеется биекция

$$(\mathbb{A}_k^{N+1-r})_{x_0 \neq 0} \to T_{r,N},$$

$$(\varphi_r, \dots, \varphi_N) \to J_N((-T + \varphi_r U^r + \dots + \varphi_N U^N)).$$

И в этом случае $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ не зависят от N.

Положим $V_{r,m} = \{J_m(p) | p \in T_r \cap E\}$.

Обозначим нормирования на $K = k((U,T))$, соответствующие кривым $T = 0$ и $U = 0$, через v_T и v_U.

Положим

$$R = \max\{1, -\min_{g,i,j}\{v_U(b_{i,j}) + rv_T(b_{i,j})\}\},$$

где минимум берется по всем коэффициентам систем $(**_g)$ для всех $g \in G$; в случае циклического расширения имеем

$$R = \max\{1, -\min_{i,j}\{v_U(b_{i,j}) + rv_T(b_{i,j})\}\}.$$

Рассмотрим некоторую систему $(**_g)$ или $(**)$ с коэффициентами $b_{i,j}$. Выберем произвольный идеал $p \in E$, и обозначим через p_L идеал B, лежащий над p. Пусть v_K – нормирование K, связанное с p, и v_L – нормирование L, связанное с p_L. Так как $p \in E$, то $v_K(b_{i,j}) \geqslant 0$, и, следовательно, $v_L(z_i) \geqslant 0$ для всех i. Обозначим через $a_{i,j}$ классы $b_{i,j}$ в $\overline{K}$, и через x_i – классы z_i в $\overline{L}$, где $\overline{K}$ и $\overline{L}$ – поля вычетов K и L относительно v_K и v_L соответственно. Из того, что $L = K(z_1, \dots z_n)$, следует, что $\widehat{L}_{p_L} = \widehat{K}_p(\widehat{z}_1, \dots, \widehat{z}_n)$, где $\widehat{z}_i$ – образ z_i при некотором вложении $L \to \widehat{L}_{p_L}$, которое продолжает вложение $K \to \widehat{K}_p$. По лемме 1 имеем $\overline{\widehat{L}_{p_L}} = \overline{\widehat{K}_p}(x_1, \dots x_n)$, и, таким образом, $\overline{L} = \overline{K}(x_1, \dots x_n)$. Кроме того, выполнено

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 = a_{2,1}x_1 \\ \dots \\ x_w^2 - x_w = a_{w,1}x_1 + \dots + a_{w,w-1}x_{w-1} \\ x_{w+1}^2 - x_{w+1} = 0 \\ x_{w+2}^2 - x_{w+2} = a_{w+2,w+1}x_{w+1} \\ \dots \\ x_{w+m}^2 - x_{w+m} = a_{w+m,w+1}x_{w+1} + \dots + a_{w+m,w+m-1}x_{w+m-1}. \end{cases}$$

Обозначим через t и u образы T и U в $k[[T,U]]/p$, и через v – нормирование, соответствующее u. Тогда, если $p = (f)$, где

$$f = -T + \varphi_r U^r + \varphi_{r+1} U^{r+1} + \dots, \quad \varphi_r \neq 0,$$

то $t = \sum_{s\geqslant r}\varphi_s u^s$. Выразим через φ_i коэффициенты $\alpha_{i,j,q}$ разложения $a_{i,j}$ в ряд $a_{i,j} = \sum_q \alpha_{i,j,q}u^q$. Для фиксированных i и j представим $b_{i,j}$ в виде отношения двух рядов,

$$b_{i,j} = \frac{\sum_{l\geqslant l_0}\sum_{m\geqslant m_0}\beta_{l,m}U^lT^m}{\sum_{l\geqslant l_1}\sum_{m\geqslant m_1}\gamma_{l,m}U^lT^m},$$

где $\beta_{l_0,m_0}\neq 0$, $\gamma_{l_1,m_1}\neq 0$. Имеем

$$a_{i,j} = \Big(\sum_{l\geqslant l_0}\sum_{m\geqslant m_0}\beta_{l,m}u^lt^m\Big)\Big/\Big(\sum_{l\geqslant l_1}\sum_{m\geqslant m_1}\gamma_{l,m}u^lt^m\Big) =$$
$$\Big(\sum_{l\geqslant l_0}\sum_{m\geqslant m_0}\beta_{l,m}u^l\Big(\sum_{s\geqslant r}\varphi_s u^s\Big)^m\Big)\Big/\Big(\sum_{l\geqslant l_1}\sum_{m\geqslant m_1}\gamma_{l,m}u^l\Big(\sum_{s\geqslant r}\varphi_s u^s\Big)^m\Big)$$
$$= \sum_{\substack{q\geqslant l_0-l_1+\\+r(l_0-m_1)}} A_{i,j,q}(\varphi_r,\ldots,\varphi_{N(i,j,q)})u^q$$

для некоторых $A_{i,j,q}(X_r,\ldots,X_{N(i,j,q)}) \in k[X_r^{-1},X_r,\ldots,X_{N(i,j,q)}]$ и некоторых $N(i,j,q)$, причем из того, что

$$v_U(b_{i,j}) + rv_T(b_{i,j}) = l_0 - l_1 + rm_0 - rm_1,$$

следует, что $N(i,j,q)\leqslant q+R+r$, и, кроме того, $v(a_{i,j})\geqslant -R$ для всех коэффициентов $a_{i,j}$. Определим $A_{i,j,q}$ при всех $q\geqslant -R-r$, положив $A_{i,j,q}=0$ при $q < v_U(b_{i,j}) + rv_T(b_{i,j})$.

Каждой системе $(**_g)$ или $(**)$ сопоставим числа $i(1),\ldots,i(\nu)$ такие, что

$$i(s) = \min\{i \mid z_i \notin K(z_{i(1)},\ldots,z_{i(s-1)})\}.$$

Обозначим через $h_p(s)$ скачок $h_p(\overline{K}(x_1,\ldots,x_{i(s)})/\overline{K}(x_1,\ldots,x_{i(s)-1}))$.

Теорема 1. *Пусть L/K – циклическое расширение. Для любого идеала $p\in E$ положим*

$$f(p) = \sum_{i=1}^{\nu}((2^n-1)R)^i h_p^{(i)}(\overline{L}/\overline{K}).$$

Тогда существует натуральное число M, такое, что при $N\geqslant \max(M,N_r)$ функция f ограничена на E, и множество струй $J_N(p)$

из $V_{r,N}$, таких, что $f(p)$ принимает максимальное возможное значение, является открытым в $V_{r,N}$.

Доказательство. Пусть $M_0 = 2^{2n}R + 2^n$. Тогда числа $M(1, R, 0)$, $M(2, R, 0)$, ..., $M(n, R, 0)$ из леммы 6 не превосходят M_0. Положим $M = M_0 + R + r$ и докажем, что это M подходит. Из того, что $N(i, j, q) \leqslant q + R + r$, следует, что при $q \leqslant M_0$ все $A_{i,j,q}$ являются функциями от $X_r, \ldots, X_M$.

По следствию к лемме 5 имеем

$$h_p^{(j)}(\overline{L}/\overline{K}) = h_p(\nu - j + 1) \leqslant (2^{n+1} - 1)R,$$

и при i, не равном $i(s)$ ни при каком s, скачок расширения $\overline{K}(x_1, \ldots, x_i)$ над $\overline{K}(x_1, \ldots, x_{i-1})$ равен 0. Из этого следует, что множество, на котором $f(p)$ принимает масимальное возможное значение, можно описать следующим образом. Обозначим через D_1 подмножество $T_{r,N}$, на котором $h_p(\overline{K}(x_{i(1)})/\overline{K})$ принимает максимальное значение, и, если задано D_s, то D_{s+1} – подмножество D_s, на котором $h_p(s+1)$ принимает максимальное возможное значение для струй из D_s. Тогда искомое множество равно D_ν. Положим $C_s = h_p(s)$ для $p \in D_\nu$. Докажем индукцией по s, что при $N \geqslant \max\{M, N_r\}$ множество D_s открыто в $T_{r,N}$.

База $i = 1$. Условие $h_p(\overline{K}(x_{i(1)})/\overline{K}) = C_1$ выполнено на $T_{r,N} \setminus W$, где

$$W = \{J_N(p) \mid p \in E, h_p(\overline{K}(x_{i(1)})/\overline{K}) \leqslant C_1 - 1\},$$

так как C_1 – максимальное возможное значение скачка. Расширение задано уравнением

$$x_{i(1)}^2 - x_{i(1)} = a_{i(1),1}x_1 + \cdots + a_{i(1),i(1)-1}x_{i(1)-1},$$

и к нему можно применить лемму 6. Получаем, что W – это множество, на котором

$$P_\mu(\{A_{i,j,q}(\varphi_r, \ldots, \varphi_M)\}_{q=-R}^{M-1}) = 0$$

для некоторого набора многочленов P_μ. Композиции P_μ и $A_{i,j,q}$ являются многочленами от X_r^{-1}, X_r, ..., X_M, а так как $\varphi_r \neq 0$ на $T_{r,N}$, то множество W замкнуто, и его дополнение открыто.

Переход от s к $s+1$. По предположению индукции D_s открыто в $T_{r,N}$. Так же, как в предыдущем случае, из леммы 6 следует, что множество

$$W = \{J_N(p) \mid p \in E, h_p(s+1) \leqslant C_{s+1} - 1\}$$

замкнуто в D_s, а так как C_{s+1} – максимальное возможное значение скачка $h_p(s+1)$, то $D_{s+1} = D_s \setminus W$, оно открыто в D_s, и, следовательно, открыто в $T_{r,N}$.

Теорема 2. *Пусть L/K – произвольное расширение Галуа степени 2^ν. Тогда существует натуральное число M, такое, что при $N \geqslant \max(M, N_r)$ для любого натурального η, $1 \leqslant \eta \leqslant n$, и любого целого неотрицательного d множество $\{J_N(p) \mid p \in E,\ h_p^{(\eta)}(\overline{L}/\overline{K}) = d\}$ является пересечением открытого и замкнутого множеств в $V_{r,N}$. Кроме того, значения всех скачков $h_p^{(\eta)}(\overline{L}/\overline{K})$ ограничены на E.*

Доказательство. В качестве M можно взять $M = 2^{2n}R + 2^n + R + r$.

Докажем, что при достаточно большом $N_0 < N$ идеалам p и p' из E, таким, что $(F_p.F_{p'}) \geqslant N_0$, соответствует один и тот же набор подгрупп ветвления $\{G_i\}_{i=0}^{\nu}$, и значения скачков ограничены. Пусть p_L и p'_L – идеалы $\operatorname{Spec} B$, лежащие над p и p'. Обозначим через v и v' нормирования $\overline{K}_p$ и $\overline{K}_{p'}$, связанные с p и p', их продолжения на $\overline{L}_{p_L}$ и $\overline{L}_{p'_L}$ – соответственно v_L и v'_L, униформизующие этих полей – π_L и π'_L. Проверим, что при достаточно большом N_0 выполнено

$$v_L(g(\pi_L) - \pi_L) = v'_L(g(\pi'_L) - \pi'_L) \quad \text{для любого} \quad g \in G.$$

Пусть для системы уравнений $(**_g)$ $a_{i,j}$, x_i, φ_i, u такие, как описано выше, и $a'_{i,j}$, x'_i, φ'_i, u' – соответствующие объекты для идеала p'.

Тогда

$$a_{i,j} = \sum_{q \geqslant -R} A_{i,j,q}(\varphi_r, \dots, \varphi_{N(i,j,q)}) u^q;$$
$$a'_{i,j} = \sum_{q \geqslant -R} A_{i,j,q}(\varphi'_r, \dots, \varphi'_{N(i,j,q)}) u'^q,$$

где u и u' – образы U в $k[[T,U]]/p$ и $k[[T,U]]/p'$, функции $A_{i,j,q}(X_r, \dots, X_{N(i,j,q)})$ – многочлены от $X_r^{-1}, X_r, \dots, X_{N(i,j,q)}$. Если $\operatorname{ord}(g) = 2^{\log_2(|L:L_s|) - J + 1}$ то из того, что $g \in \operatorname{Gal}(\overline{L}/\overline{K}(x_1, \dots, x_w))$, имеем

$$v_L(g(\pi_L) - \pi_L) - 1 = h_p^{(J)}(\overline{L}/\overline{K}(x_1, \dots, x_w)) = h_p(J)$$

и, аналогично,
$$v'_L(g(\pi'_L) - \pi'_L) - 1 = h_{p'}(J).$$

По следствию к лемме 6, для того, чтобы значения этих скачков совпали, достаточно, чтобы выполнялось

$$A_{i,j,q}(\varphi_r, \dots, \varphi_{N(i,j,q)}) = A_{i,j,q}(\varphi'_r, \dots, \varphi'_{N(i,j,q)})$$

при всех $q \leqslant 2^{2n-2}R + 2^{n-1}$. Условие $(F_p.F_{p'}) \geqslant N_0$ означает, что $\varphi_i = \varphi'_i$ при $r \leqslant i \leqslant N_0 - 1$. Следовательно, достаточно взять N_0 такое, что $N_0 \geqslant N(i,j,q)$ при $q \leqslant 2^{2n-2}R + 2^{n-1}$, а так как $N(i,j,q) \leqslant q + R + r$, то подойдет

$$N_0 = 2^{2n-2}R + 2^{n-1} + R + r.$$

Значения скачков ограничены, так как каждый скачок $\overline{L}/\overline{K}$ является скачком $\overline{K}(x_1, \dots, x_{w+m})/\overline{K}(x_1, \dots, x_w)$ для некоторой системы $(**_g)$. По следствию к лемме 5 значения таких скачков не превосходят $(2^{n+1} - 1)R$.

Рассмотрим множество Σ наборов подгрупп $\{G_i\}_{i=0}^{\nu}$, таких, что все G_i различны, $G_0 = G$, $G_\nu = e$, $G_i \supset G_{i+1}$ при $i = 0, \dots, \nu-1$, и множество Δ наборов натуральных чисел $\{d_1, \dots d_\nu\}$, таких, что $d_i \leqslant (2^{n+1} - 1)R$. Для любых $\sigma \in \Sigma$, $\sigma = \{G_i\}_{i=0}^{\nu}$ и $\delta \in \Delta$, $\delta = \{d_1, \dots d_\nu\}$ обозначим через $B_{\sigma,\delta}$ множество струй $J_N(p_\lambda)$, таких, что для любого i и любого $g \in G_{i-1} \setminus G_i$ выполнено $v_\lambda(g(\pi_{L,\lambda}) - \pi_{L,\lambda}) - 1 = d_i$, где v_λ – нормирование, соответствующее идеалу p_λ и $\pi_{L,\lambda}$ – униформизующий элемент L_{p_λ}. Так как $N \geqslant N_0$, это условие не зависит от выбора идеала в струе в $T_{r,N}$. Для любого $\delta = \{d_1, \dots d_\nu\}$ множество $B_{\sigma,\delta}$ – это множество струй, для которых i-й скачок равен $d_{\nu-i+1}$ при всех i. Для $g \in G \setminus \{e\}$ обозначим через $B_{\sigma,\delta,g}$ множество струй $J(p_\lambda)$, таких, что $v_\lambda(g(\pi_{L,\lambda}) - \pi_{L,\lambda}) - 1 = d_i$, где $i = \max\{I |\ g \in G_{I+1}\}$. Тогда искомое множество равно

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcup_{\substack{\delta\in\Delta \\ d_{\nu-\eta+1}=d}} B_{\sigma,\delta} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcup_{\substack{\delta\in\Delta \\ d_{\nu-\eta+1}=d}} \bigcap_{g\in G\setminus\{e\}} B_{\sigma,\delta,g},$$

следовательно, достаточно доказать, что $B = B_{\sigma,\delta,g}$ при фиксированных σ, δ и g является пересечением открытого и замкнутого множеств.

Рассмотрим такое разложение G в виде произведения циклических подгрупп $G = H_1 \times \dots \times H_S$, что $g \in H_S$. Тогда $v(g(\pi_{L,\lambda}) - \pi_{L,\lambda}) - 1 = h^{(J)}(\overline{L}/\overline{L}_S)$, где L_S – неподвижное поле $H_1 \times \dots \times H_{S-1}$ и $\operatorname{ord}(g) = 2^{\log_2(|L:L_s|)-J+1}$. Пусть $|H_S| = l$, для данного идеала p_λ элементы $x_i \in \overline{L}_{p_\lambda}$, функции $A_{i,j,q}$ и числа $i(s)$ такие, как описано выше, тогда

$$B = \{J_N(p_\lambda)|p_\lambda \in E, h_{p_\lambda}(s) = d_{s-\nu+l} \quad \text{при} \quad s = \nu - l + 1, \dots, J\}.$$

Для I при $1 \leqslant I \leqslant J$ и наборов целых неотрицательных чисел $\delta' = \{d_{1-\nu+l}, \dots, d_0\}$, таких, что $d_i \leqslant (2^{n+1})R$, рассмотрим множества

$$D_{I,\delta'} = \{J_N(p_\lambda)|p_\lambda \in E, h_{p_\lambda}(s) = d_{s-\nu+l}, \quad \text{при} \quad s = 1, \dots, I\}.$$

Для фиксированного δ' докажем индукцией по I, что $D_{I,\delta'}$ является пересечением открытого и замкнутого множества. Это утверждение верно для $D_{0,\delta'} = E$. Для

$$D_{I+1,\delta'} = \{J_N(p_\lambda)|p_\lambda \in E, h_{p_\lambda}(I+1) = d_{I+1-\nu+l}\} \cap D_{I,\delta'}$$

выполнено $D_{I+1,\delta'} = W_1 \setminus W_2$, где

$$W_1 = \{J_N(p_\lambda)|p_\lambda \in E, h_{p_\lambda}(I+1) \leqslant d_{I+1-\nu+l}\},$$

$$W_2 = \{J_N(p_\lambda)|p_\lambda \in E, h_{p_\lambda}(I+1) \leqslant d_{I+1-\nu+l} - 1\}.$$

По лемме 6 каждое W_s задается условием вида

$$P_\mu(\{A_{i,j,q}(\varphi_r, \dots, \varphi_M)\}_{q=-R}^{M_0-1}) = 0$$

для $M_0 = 2^{2n}R + 2^n$ и некоторого набора многочленов P_μ, так как $M = M_0 + R + r$. Следовательно, W_1 и W_2 замкнуты в $D_{I,\delta'}$, и $D_{I+1,\delta'}$ является пересечением открытого и замкнутого множеств. Таким образом, это выполнено для $D_{J,\delta'}$ при всех δ', и $B = \cup_{\delta'} D_{J,\delta'}$ также является пересечением открытого и замкнутого множеств.

Литература

1. I. Zhukov, *Ramification of surfaces: Artin-Schreier extensions.* — Contemp. Math. **300** (2002), 211–220.
2. И. Б. Жуков, *Ветвление поверхностей: достаточный порядок струи для диких скачков.* Готовится к печати.
3. J.-P. Serre, *Local Fields.* Springer-Verlag, New-York, 1979.
4. E. Inaba, *On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p.* — Natural Science Report, Ochanomizu University **12** no. 2 (1961), 26–35.

Vanushina O. Yu. On semicontinuity of ramification invariants in dimension 2.

We consider a cyclic extension L/K of field $K = k[[T, U]]$ of characteristic 2. It is shown, for all sufficiently large N, jets of order N of all curves, which are not components of ramification locus, for which the corresponding valuation of the function field has the unique extension, valuations of coefficients of equation of Inaba are positive, and ramification jumps are maximal is open set. In the case of a general (not cyclic) extension, it is shown that the set of jets with the fixed value of kth jump is an intersection of open and close sets.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: olgavv@ rol.ru

Поступило 1 октября 2004 г.