Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

Е. В. Дыбкова

ТЕОРЕМА БОРЕВИЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ НАД НЕКОММУТАТИВНЫМ ТЕЛОМ

Рассматривая задачу об описании подгрупп полной линейной группы с помощью матриц из идеалов соответствующего кольца, З. И. Боревич доказал в 1976 году следующую красивую теорему (см. [1]).

Если поле содержит не менее 7 элементов, то всякая подгруппа H полной линейной группы над этим полем, содержащая все обратимые диагональные матрицы, заключена между однозначно определенной D-сетевой подгруппой $G(\sigma)$ и ее нормализатором $N(\sigma)$.

Несколько лет спустя этот красивый результат З. И. Боревич и Н. А. Вавилов в [2] и [3] перенесли на случай полулокального кольца, удовлетворяющего нескольким естественным ограничениям; в частности, в [3] Н. А. Вавилов доказал справедливость теоремы Боревича для произвольного некоммутативного тела.

В представляемой работе мы не будем описывать историю распространения теоремы Боревича на другие классические линейные группы – краткий обзор этой тематики с соответствующими библиографическими ссылками приведен в [8]. Остановимся только на двух моментах, имеющих самое непосредственное отношение к обсуждаемым в настоящей работе проблемам.

Во-первых, при *одновременном* исследовании симплектических, ортогональных и унитарных групп четных степеней было естественно обратиться к введенному Э. Баком понятию форменного кольца и определяемым в его терминах гиперболическим унитарным группам. Подробные описания и свойства этих групп читатель может найти в [12, 10], здесь мы лишь повторим их матричное переопределение, сформулированное в [4] и использованное в [7, 8]: если R – ассоциативное кольцо с 1 и инволюцией $^-$, λ – обратимый элемент центра R, ограниченный

Работа выполнена при поддержке INTAS 00–566.

условием

$$\lambda\overline{\lambda} = 1,$$

и Λ – какой-нибудь форменный параметр R, определяемый такими инволюцией и λ, то гиперболическая унитарная группа $U(2n, R, \Lambda)$ над форменным кольцом (R, Λ) – это группа всех обратимых матриц $a = (a_{ij})$ степени $2n$ над R, для которых элементы обратной матрицы $a^{-1} = (a'_{ij})$ удовлетворяют соотношению

$$a'_{ij} = \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}}\overline{a}_{-j,-i},$$

а частичные суммы длинного типа

$$S_{i,-i}(a) = \sum_{l>0} a_{il}a'_{l,-i}$$

принадлежат аддитивной группе

$$\Lambda_i = \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}}\Lambda$$

при всех индексах (как и в предыдущих наших работах, строки и столбцы матриц мы индексируем множеством

$$\Omega = \{1, \dots, n, -n, \dots, -1\},$$

а через $\varepsilon(i)$ обозначаем знак индекса i).

Во-вторых, если 2 не является обратимым элементом кольца R, то обычных D-сетей σ и соответствующих им сетевых подгрупп $U(\sigma)$ в гиперболической унитарной группе оказывается недостаточно для описания наддиагональных (то есть содержащих все диагональные унитарные матрицы) подгрупп группы $U(2n, R, \Lambda)$ даже в случае поля. Идея выбора новой базы для описания решетки наддиагональных подгрупп группы $U(2n, R, \Lambda)$ связана была с тем, что в гиперболической унитарной группе естественное понятие главной конгруэнцподгруппы вводится не просто для идеала $\mathfrak{a}$ соответствующего кольца, а для так называемого форменного идеала (см. [12, § 5.2.D]) форменного кольца (R, Λ). Форменный идеал – это пара $(\mathfrak{a}, \Gamma)$, состоящая из инвариантного относительно инволюции идеала $\mathfrak{a}$ кольца R и некоторой аддитивной подгруппы Γ (ее можно назвать идеальным форменным параметром) со специальными свойствами: Γ содержит все разности $\alpha - \overline{\alpha}\lambda$ при $\alpha \in \mathfrak{a}$, содержит все произведения $\overline{\alpha}\beta\alpha$ при

$\alpha \in \mathfrak{a}$ и $\beta \in \Lambda$, содержится в пересечении $\mathfrak{a} \cap \Lambda$ и удовлетворяет включению $\gamma\Gamma\overline{\gamma} \leqslant \Gamma$ при любых γ из R. Поэтому в [4] мы предложили для описания наддиагональных подгрупп гиперболической унитарной группы использовать пары (σ, Γ), состоящие из сети σ и некоторого семейства аддитивных групп Γ, – такие пары мы назвали форменными сетями.

Для определения форменной сети можно ограничиться рассмотрением сетей σ с условием

$$\sigma_{ij} = \overline{\sigma}_{-j,-i}$$

при всех i и j – такие сети мы назвали унитарными. Унитарная сеть каждому индексу i сопоставляет две подгруппы

$$\Gamma_i^m = \{\alpha - \lambda^{-\varepsilon(i)}\overline{\alpha} \mid \alpha \in \sigma_{i,-i}\} \quad \text{и} \quad \Gamma_i^M = \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i,$$

первая из которых содержится во второй. Если для столбца $\Gamma = (\Gamma_i)$ из $2n$ аддитивных подгрупп кольца R справедливы включения

$$\Gamma_i^m \leqslant \Gamma_i \leqslant \Gamma_i^M \quad \text{и} \quad \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}} \alpha \Gamma_j \overline{\alpha} \leqslant \Gamma_i$$

при всех индексах и всех $\alpha \in \delta_{ij} + \sigma_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера), то Γ мы называем набором форменных сетевых параметров для σ, а пару (σ, Γ) – форменной сетью над форменным кольцом (R, Λ). Как мы показали в [4], для любой форменной сети множество

$$U(\sigma, \Gamma) = \Big\{ a = (a_{ij}) \in U(2n, R, \Lambda) \mid a_{ij} \in \sigma_{ij} \\ \text{и} \quad S_{i,-i}(a) \in \Gamma_i \quad \text{при всех индексах} \Big\}$$

является подгруппой гиперболической унитарной группы – ее мы назвали форменной сетевой подгруппой, а нормализатор такой подгруппы в гиперболической унитарной группе обозначили $N_U(\sigma, \Gamma)$.

Конечно, буквальный перенос теоремы Боревича на гиперболические унитарные группы над телами должен был бы означать существование для каждой наддиагональной подгруппы H такой единственной форменной D-сети (σ, Γ), что

$$U(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma). \tag{1}$$

Однако, как показывает анализ несложных примеров, это утверждение неверно по двум причинам. С одной стороны, форменных

D-сетей, удовлетворяющих условию (1), для данной подгруппы H может быть несколько: для того, чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на ортогональную группу второй степени над каким-нибудь полем. С целью избавления от этой неприятности мы договорились рассматривать только те форменные D-сети, в которых стоящие на побочной диагонали идеалы *не слишком велики*: мы требуем, чтобы для произвольного индекса i имело место равенство

$$\sigma_{i,-i} = \sum_{l \neq \pm i} \sigma_{il}\sigma_{l,-i} + \langle \Gamma_i \rangle,$$

где через $\langle \Gamma_i \rangle$ обозначен идеал, порожденный группой Γ_i (форменные D-сети с таким условием мы назвали точными). С другой стороны, для точной форменной D-сети, которая по разумным причинам ассоциируется с наддиагональной подгруппой, *вся* форменная сетевая подгруппа может оказаться слишком большой и не удовлетворять включению $U(\sigma, \Gamma) \leqslant H$ (о неприятности такого рода мы фактически говорили в доказательстве теоремы 2 работы [4]). Поэтому наряду с форменной D-сетевой подгруппой $U(\sigma, \Gamma)$ мы ввели в рассмотрение чуть меньшую подгруппу $U_0(\sigma, \Gamma)$, которую назвали надэлементарной: эта подгруппа порождается всеми диагональными унитарными матрицами, всеми унитарными трансвекциями короткого корневого типа

$$T_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij} - \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}} \overline{\alpha} e_{-j,-i} \quad \text{с} \quad \alpha \in \sigma_{ij} \quad \text{при} \quad i \neq \pm j$$

и всеми унитарными трансвекциями длинного корневого типа

$$T_{i,-i}(\beta) = e + \beta e_{i,-i} \quad \text{с} \quad \beta \in \Gamma_i$$

(здесь и далее e – единичная матрица, а e_{ij} – матричная единица, соответствующая позиции (i, j)).

Используя приведенные выше терминологию и обозначения, назовем наддиагональную подгруппу H группы $U(2n, R, \Lambda)$ *стандартной*, если для нее существует такая единственная точная форменная D-сеть (σ, Γ) порядка $2n$ над (R, Λ), что

$$U_0(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma).$$

В [6, 7] мы доказали, что если R – поле с инволюцией, содержащее ровно 8 или не менее 13 элементов, причем не менее 7 из них инвариантны относительно инволюции, а (R, Λ) – любое форменное кольцо над таким полем, то при каждом n все наддиагональные подгруппы группы $U(2n, R, \Lambda)$ стандартны. Рассматривая произвольные некоммутативные тела с инволюцией, в [8] мы показали, что стандартными являются все наддиагональные подгруппы для любого форменного кольца при $n = 1$, а в [8, 9] установили стандартность всех наддиагональных подгрупп при произвольном n, если форменный параметр Λ минимален – соответствующее форменное кольцо мы назвали *хорошим* (следует заметить, что для некоммутативного тела из-за нетривиальности инволюции группа $U_0(\sigma, \Gamma)$ всегда совпадает с группой $U(\sigma, \Gamma)$ для точной форменной D-сети). Как известно (см., напр., [12, предложение 6.1.2]), форменный параметр тела с инволюцией может отличаться от минимального только в том случае, когда речь идет о теле характеристики 2 с инволюцией первого рода (тривиальной на центре). Это значит, что в *формулировке* соответствующих результатов работ [6, 8, 9] форменную сетевую подгруппу $U(\sigma, \Gamma)$ можно заменить обычной сетевой подгруппой $U(\sigma)$ гиперболической унитарной группы; однако, *техника доказательств* в них (и, тем более, в [7]) существенно связана с форменными сетевыми параметрами.

В представляемой работе мы доказываем, что при произвольном n стандартное описание допускает и решетка наддиагональных подгрупп группы $U(2n, R, \Lambda)$ для *плохого* форменного кольца над некоммутативным телом.

Везде в этой работе мы считаем R фиксированным некоммутативным телом характеристики 2 (не обязательно конечно порожденным над своим центром) *с инволюцией* $^-$ *первого рода, а* (R, Λ) – *нормализованным форменным кольцом над этим телом с форменным параметром Λ, отличным от минимального.* В этой ситуации $\lambda = 1$, а форменный параметр Λ содержится в аддитивной группе R^0 элементов нашего тела, не меняемых инволюцией, и содержит группу следов

$$\operatorname{Tr} R = \{\alpha + \overline{\alpha} \mid \alpha \in R\}.$$

1. Предварительные замечания

Как и в [9], мы будем рассуждать индукцией по степени рассматриваемой группы и с этой целью сформулируем *условие* $\mathbb{T}_{n-1}$:

для любого натурального $m < n$ всякая наддиагональная подгруппа группы $U(2m, R, \Lambda)$ стандартна.

При произвольном n в [8] мы связали с каждой наддиагональной подгруппой H группы $U(2n, R, \Lambda)$ точную форменную D-сеть (σ, Γ), описав ее с помощью содержащихся в H унитарных трансвекций:

$$\sigma_{ij} = \{\alpha \in R \mid T_{ij}(\alpha) \in H\} \quad \text{при} \quad i \neq \pm j,$$

$$\Gamma_i = \left\{\beta \in R^0 \mid T_{i,-i}(\beta) \in H\right\}, \quad \sigma_{i,-i} = \langle \Gamma_i \rangle \quad \text{и} \quad \sigma_{ii} = R.$$

Такая форменная D-сеть – мы говорим, что она *ассоциирована* с H, – является максимальной среди тех точных форменных сетей, чьи сетевые подгруппы содержатся в H. При выполнении условия $\mathbb{T}_{n-1}$ мы доказали в [8, 9], что ассоциированая с H форменная сеть и только она удовлетворяет включениям (1) в следующих ситуациях:

1) каждая принадлежащая H матрица имеет по крайней мере один нулевой элемент;
2) группа H содержит хотя бы одну нетривиальную трансвекцию короткого корневого типа, то есть $\sigma_{ij} = R$ для какой-то пары индексов $i \neq \pm j$;
3) группа H содержит матрицу a, не имеющую нулевых элементов (такие матрицы в дальнейшем мы будем называть *строго ненулевыми*), для которой некоторая частичная сумма длинного типа $S_{i,-i}(a)$ принадлежит группе следов $\mathrm{Tr}\, R$.

Таким образом, в этой работе нам предстоит доказать стандартность наддиагональной подгруппы H в предположении, что эта подгруппа содержит строго ненулевую матрицу, для которой все частичные суммы длинного типа не являются следами. Нам достаточно (и необходимо) найти в H нетривиальную унитарную трансвекцию короткого корневого типа, поэтому мы можем в любой удобный для нас момент заменить H подгруппой, которая сопряжена с ней при помощи матрицы подстановки из группы Вейля W_n (см. [5]): мономиальные унитарные матрицы нормализуют диагональную подгруппу. По этой же причине мы можем использовать скэйлинг форменного кольца с помощью обратимого элемента из группы R^0 (подробности этой процедуры, использованной нами в [8, 9], детально описаны в [12]). Напомним (этот вопрос мы обсуждали в [8]), что если скэйлинг провести с помощью обратимого *следа*, то далее мы будем иметь дело с инволюцией симплектического типа.

План наших рассуждений в представляемой работе таков. Фиксируя строго ненулевую матрицу a из H,

1) мы перенесем на случай произвольного n лемму 19 работы [8] и покажем, что если для некоторого индекса l и какого-то $\theta \neq 1$ хотя бы один элемент матрицы $ad_l(\theta)a^{-1}$ равен нулю, то подгруппа H стандартна (здесь и далее под $d_l(\theta)$ мы понимаем элементарную диагональную унитарную матрицу
$$d_l(\theta) = e + (\theta - 1)e_{ll} + (\overline{\theta}^{-1} - 1)e_{-l,-l}$$
для обратимого θ);
2) мы докажем стандартность H в предположении, что эта группа содержит нетривиальную трансвекцию длинного корневого типа;
3) рассматривая миноры второго порядка матрицы a (см. [8]), мы установим, что для стандарности H достаточно условия
$$\Delta_{ij}^{kl}(a) = 0$$
при некоторых индексах $i \neq \pm j$ и $k \neq l$;
4) мы сформулируем еще один критерий стандартности наддиагональной подгруппы, в каком-то смысле аналогичный предыдущему, – для этого нам придется ввести в рассмотрение новый атрибут унитарной матрицы (столбец из ассоциированных векторов); именно этот критерий позволит нам затем завершить доказательство стандартности всех наддиагональных подгрупп.

Этот раздел нашей работы мы закончим замечанием, относящимся к арифметике некоммутативного тела. Напомним (мы говорили об этом подробно в [8]), что для произвольного кольца с инволюцией можно говорить о мультипликативной группе унитарных элементов этого кольца
$$\mathcal{U}(R) = \left\{\theta \in R \mid \theta\overline{\theta} = 1\right\}.$$
Если R – некоммутативное тело характеристики 2 с инволюцией первого рода, то группа $\mathcal{U}(R)$ состоит только из 1, если на R действует инволюция ортогонального типа, или же $\mathcal{U}(R)$ бесконечна, если речь идет об инволюции симплектического типа.

Лемма 1. *Предположим, что действующая на R инволюция имеет симплектический тип. Если для натурального числа m и каких-то элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_m$ и γ тела R имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \neq \gamma,$$

то существует бесконечно много таких $\theta \in \mathcal{U}(R)$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta \beta_i \neq \theta\gamma.$$

Доказательство. Положим

$$P = \left\{ \theta \in \mathcal{U}(R) \mid \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta \beta_i = \theta\gamma \right\} \quad \text{и} \qquad Q = \mathcal{U}(R) \setminus P,$$

отметив, что множество Q непусто: $1 \in Q$. Мы собираемся доказать, что Q бесконечно, для чего используем индукцию по m.

При $m = 1$ наше утверждение тривиально, если хотя бы один из элементов α_1, β_1 или γ равен 0, поэтому считаем все три рассматриваемых элемента обратимыми. Предполагая, что утверждение леммы неверно, мы легко приходим к противоречию: из конечности Q следует бесконечность P, поэтому мы можем найти такие θ и η из P, что их произведение $\theta\eta$ – также элемент из P, а это дает нам очевидно неверное равенство

$$\theta\alpha_1\eta = \theta\eta\gamma\beta_1^{-1} = \alpha_1\theta\eta = \theta\gamma\beta_1^{-1}\eta.$$

При $m > 1$ гипотеза индукции позволяет считать обратимыми все элементы β_i, а все элементы α_i – даже нецентральными. Мы вновь предположим конечность Q и используем бесконечность P.

По лемме 1 работы Дьедонне [11] из нецентральности α_m следует, что α_m не коммутирует с каким-то элементом из R^0, а потому – и с некоторым унитарным элементом. Легко заметить, что тогда множество

$$P_1 = \{\theta \in P \mid \theta\alpha_m \neq \alpha_m\theta\}$$

бесконечно. Фиксируем какой-нибудь $\theta \in P_1$ и положим

$$\gamma' = \beta_m \quad \text{и} \quad \alpha_i' = (\theta\alpha_m + \alpha_m\theta)^{-1}(\theta\alpha_i + \alpha_i\theta) \quad \text{для каждого} \quad i < m,$$

заметив,что

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i'\beta_i \neq \gamma'.$$

По индукционному предположению для всех элементов η из некоторого бесконечного множества $Q_1 \subseteq \mathcal{U}(R)$ мы имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i'\eta\beta_i \neq \eta\gamma', \tag{2}$$

которое эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\theta\eta\beta_i \neq \theta\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\eta\beta_i. \tag{3}$$

В то же время, из-за конечности Q бесконечным является множество

$$Q_2 = Q_1 \cap P,$$

причем для каждого $\eta \in Q_2$ наряду с (2) мы имеем также

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\eta\beta_i = \eta\gamma. \tag{4}$$

Наконец, для произвольного элемента η из бесконечного множества

$$Q_3 = \{\eta \in Q_2 \mid \theta\eta \in P\}$$

вместе с (4) мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\theta\eta\beta_i = \theta\eta\gamma = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\eta\beta_i,$$

что, очевидно, противоречит (3). □

2. Сопряжение элементарной диагональной матрицы приводит к появлению нулевого элемента

В этом и следующих разделах мы фиксируем натуральное число $n \geqslant 2$ и считаем выполненным условие $\mathbb{T}_{n-1}$. Под H понимается некоторая наддиагональная подгруппа группы $U(2n, R, \Lambda)$ с ассоциированной форменной сетью (σ, Γ). Если не сказано что-то иное, то a – матрица из H.

В доказательствах нескольких утверждений нашей работы будут использоваться лемма 11 из [9] и лемма 2 из [9]. Напомним их общую формулировку.

Лемма 2. *Если матрица a имеет хотя бы один нулевой элемент, то для произвольных индексов i и k справедливы включения*

$$a_{ik}a'_{kj} \in \sigma_{ij} \quad \textit{при всех} \quad j \neq \pm i \quad \textit{и} \quad a_{ik}S_{k,-k}(a^{-1})a'_{-k,-i} \in \Gamma_i.$$

Первое из доказываемых здесь утверждений переносит на общий случай лемму 19 из [8], где соответствующий факт был доказан для $n = 2$.

Лемма 3. *Если a – строго ненулевая матрица, причем для некоторого индекса l и какого-то обратимого $\theta \neq 1$ матрица*

$$b = b(\theta) = ad_l(\theta)a^{-1}$$

имеет хотя бы один нулевой элемент, то подгруппа H стандартна.

Доказательство. Предполагая противное при $n \geqslant 3$, рассмотрим сначала ситуацию, когда для какого-то индекса j уравнение

$$b_{j,-j}(\theta) = 0 \tag{5}$$

имеет решение $\theta \neq 1$. Как установлено в лемме 7 из [8], в таком случае произведение

$$\alpha = a_{j,-l}^{-1}a_{jl}$$

принадлежит группе следов, а самому уравнению (5) удовлетворяют все элементы бесконечной группы

$$G = \left\{\theta \in R \mid \overline{\theta}\alpha\theta = \alpha\right\}.$$

В то же время, уравнению $b_{jj}(\theta) = 0$, как нетрудно заметить, удовлетворяет не более одного элемента группы G, поэтому мы можем найти в G такой $\theta \neq 1$, что произведение $b_{jj}b'_{jj}$ будет ненулевым. Даваемые леммой 2 при $i \neq \pm j$ включения $b_{ij}b'_{jj} \in \sigma_{ij}$ и $b_{i,-j}b'_{-j,-j} \in \sigma_{i,-j}$ вместе с нестандартностью H означают тогда равенства $b_{i,\pm j} = 0$ для всех таких i. Но из этих равенств, как легко понять, следует равенство нулю всех миноров $\Delta_{ik}^{l,-l}(a)$ при любых индексах i и k, что, разумеется, невозможно для обратимой матрицы a.

Считая далее при каждом $\eta \neq 1$ и любом индексе j элементы $b_{j,-j}(\eta)$ обратимыми, заметим, что для всех индексов $i \neq \pm j$ элементы $b_{ij}(\theta)$ должны быть нулевыми – иначе мы имели бы нетривиальные включения $b_{ij}b'_{j,-j} \in \sigma_{i,-j}$. Из-за условия $n \geqslant 3$

это, как несложно подсчитать, вновь приводит нас к тотальному равенству нулю миноров $\Delta_{ik}^{l,-l}(a)$ при произвольных i и k. □

С использованием только что доказанной леммы мы закончим этот раздел работы рассмотрением весьма специфической ситуации:

Лемма 4. *Если a – строго ненулевая матрица и для некоторого индекса l произведения*

$$\mu_i = a_{i,-l}^{-1} a_{il}$$

принадлежат группе R^0 при любом i, то подгруппа H стандартна.

Доказательство. Все миноры $\Delta_{ik}^{l,-l}(a)$ не могут быть нулевыми, поэтому для какой-то пары индексов $i \neq k$ имеется неравенство

$$\mu_i \neq \mu_k. \tag{6}$$

Нетрудно понять также, что неравенство (6) мы можем снабдить дополнительным ограничением $i \neq \pm k$. Полагая

$$\theta = \left(1 + \mu_i^{-1}\mu_k\right)\left(1 + \mu_k^{-1}\mu_i\right)^{-1},$$

заметим, что этот обратимый элемент отличен от 1, а для матрицы $b = ad_l(\theta)a^{-1}$ выполняется равенство $b_{i,-k} = 0$. Для завершения доказательства остается сослаться на лемму 3. □

3. Унитарные трансвекции длинного корневого типа

Здесь мы покажем, что вхождение в группу H нетривиальной трансвекции длинного корневого типа гарантирует стандартность этой наддиагональной подгруппы. Для этого мы усилим лемму 6 из [9].

Лемма 5. *Если входящая в H матрица a – строго ненулевая и H содержит также какую-нибудь матрицу c, имеющую хотя бы один нулевой элемент, но не являющуюся мономиальной, то подгруппа H стандартна.*

Доказательство. Пусть H – контрпример к нашему утверждению. Используя аргументы из начала доказательства леммы 6 работы [9], нетрудно показать, что вместе с матрицей c подгруппа H содержит нетривиальную унитарную трансвекцию $T_{m,-m}(\nu)$

длинного корневого типа. Сопрягая при необходимости H с помощью матрицы подстановки

$$\pi_1 = (1, m)(-1, -m) \in W_n,$$

можно считать, что H содержит нетривиальную унитарную трансвекцию $T_{1,-1}(\nu)$. Умножим матрицу a слева и справа на диагональные унитарные матрицы так, чтобы для всех положительных индексов l выполнялись равенства

$$a_{1l} = a_{l1} = 1, \tag{7}$$

а для остальных элементов первого столбца введем обозначение

$$a_{-l,1} = \alpha_l \quad \text{при} \quad l > 0. \tag{8}$$

Предположим теперь, что один из введенных нами параметров α_l не принадлежит группе R^0. Сумма

$$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = S_{-1,1}(a^{-1}),$$

напротив, содержится в R^0, поэтому найдется и другой индекс $j \neq l$, для которого $\alpha_j \notin R^0$. Выбрав в паре $\{l, j\}$ индекс $k \neq 1$, сопряжем H при помощи матрицы подстановки

$$\pi_2 = (k, n)(-k, -n) \in W_n$$

и будем считать

$$\alpha_n \notin R^0.$$

Далее мы можем применить скэйлинг с помощью $(\alpha_n + \overline{\alpha}_n)^{-1}$ и ввести на R новую инволюцию *симплектического типа*, полагая

$$\tilde{\omega} = (\alpha_n + \overline{\alpha}_n)^{-1}\overline{\omega}(\alpha_n + \overline{\alpha}_n) \quad \text{при всех}\, \omega \in R.$$

Приведенное рассуждение показывает, что с самого начала мы можем считать тип действующей на R инволюции симплектическим, а форменный параметр Γ_1 – содержащим 1; при этом для элементов первой строки и первого столбца матрицы a имеют место равенства (7) и для $\alpha_n = a_{-n,1}$ выполнено дополнительное условие

$$\alpha_n + \overline{\alpha}_n = 1.$$

Теперь нам потребуется принадлежащая H матрица

$$g = aT_{1,-1}(1)a^{-1},$$

у которой n-ый и $(-n)$-ый столбцы равны, соответственно,

$$\begin{pmatrix} \overline{\alpha}_n \\ \overline{\alpha}_n \\ \dots \\ 1+\overline{\alpha}_n \\ \alpha_n\overline{\alpha}_n \\ \dots \\ \alpha_2\overline{\alpha}_n \\ \alpha_1\overline{\alpha}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1+\alpha_n \\ \dots \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

(из-за нестандартности H построенная матрица g – строго ненулевая). Далее заметим, что для матрицы

$$b(\theta) = g d_n(\theta) g^{-1}$$

мы имеем

$$b_{n,-1}(\theta) = (1+\overline{\alpha}_n)(\theta+1) + \left(\overline{\theta}^{-1}+1\right)\alpha_n = \alpha_n\theta + \overline{\theta}^{-1}\alpha_n.$$

Ясно, что уравнение $b_{n,-1}(\theta) = 0$ имеет нетривиальные решения: для централизатора

$$R_1 = \zeta_R(\alpha_n)$$

элемента α_n (этот централизатор инвариантен относительно инволюции, действующей нетривиально на центре подтела R_1) каждый его унитарный элемент θ (таких элементов бесконечно много) является решением рассматриваемого уравнения. Поэтому лемма 3 приводит нас к противоречию с нестандартностью H.

Нам осталось исследовать ситуацию, когда все элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в обозначении (8) принадлежат группе R^0. Проводя скэйлинг с помощью какого-нибудь ненулевого следа, мы вновь можем считать, что имеем дело с инволюцией симплектического типа. Это значит, что определенная выше строго ненулевая матрица g содержится в H. На этот раз для окончания доказательства достаточно заметить, что матрица g удовлетворяет условию леммы 4 при $l = n$. □

Доказанная здесь лемма сыграет важную роль в оставшейся части этой работы: из нее следует, что если подгруппа H нестандартна, то она содержит матрицы только двух сортов – мономиальные и строго ненулевые.

4. Матрица с нулевым минором

В этом разделе мы предложим новый подход к доказательству стандартности наддиагональной подгруппы, связанный с рассмотрением миноров второго порядка.

Лемма 6. *Если a – строго ненулевая матрица и для некоторой четверки индексов $i \neq \pm j$ и $k \neq l$ минор $\Delta_{ij}^{kl}(a)$ равен 0, то подгруппа H стандартна.*

Доказательство. Вновь предполагая противное, разобьем наши рассуждения на несколько частей.

1) Предположим сначала, что

$$\Delta_{12}^{kl}(a) = 0 \quad \text{для всех отрицательных } k \quad \text{и} \quad l.$$

Умножая нашу матрицу слева и справа на подходящие диагональные, будем считать, что

$$a_{1k} = a_{2k} = 1$$

для всех отрицательных k, а для положительных k положим

$$a_{1k} = \alpha_k \quad \text{и} \quad a_{2k} = \alpha_k + \beta_k, \tag{9}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ отличны от 0, а $\beta_1, \dots, \beta_n$ удовлетворяют условию

$$\beta_1 + \ldots + \beta_n = 0.$$

Фиксируем индекс p, для которого $\beta_p \neq 0$, и введем в рассмотрение сумму

$$s = \sum_{\substack{i>0 \\ i \neq p}} \alpha_i.$$

Если s отлична от 0 и β_p, мы рассмотрим матрицу

$$c = a d_p(\theta) d_p^*(\eta) a^{-1}, \quad \text{где} \quad d_p^*(\eta) = \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq p}} d_i(\eta),$$

при

$$\theta = (\alpha_p + \beta_p)^{-1} \alpha_p \quad \text{и} \quad \eta = (s + \beta_p)^{-1} s.$$

Легко подсчитать, что $c_{2,-1} = 0$, а потому матрица c мономиальна. В то же время, прямое вычисление показывает, что

$$c_{1,-1} = \beta_p(\theta + \eta) \quad \text{и} \quad c_{2,-2} = \left(\overline{\theta}^{-1} + \overline{\eta}^{-1}\right) \overline{\beta}.$$

Нетрудно заметить, что оба эти элемента отличны от 0: иначе θ и η оказались бы одинаковыми, сумма s совпала бы с α_p а частичная сумма $S_{1,-1}(a)$ была бы нулевой, что, как мы знаем, возможно только для стандартной H. Поэтому в двух последних столбцах матрицы c ненулевыми являются только элементы побочной диагонали. Следовательно, у мономиальной матрицы

$$c^2 = ad_p(\theta^2)d_p^*(\eta^2)a^{-1}$$

в позициях $(1,-1)$ и $(2,-1)$ стоят нули, а это означает равенства

$$\begin{cases} \alpha_p\theta^2 + s\eta^2 + \overline{\theta}^{-2}\overline{\alpha}_p + \overline{\eta}^{-2}\overline{s} = 0 \\ \alpha_p\theta^2 + s\eta^2 + \overline{\theta}^{-2}\overline{\alpha}_p + \overline{\eta}^{-2}\overline{s} + \beta_p\left(\theta^2+\eta^2\right) = 0. \end{cases}$$

Несложно понять, что такая ситуация невозможна. Действительно, из $\theta^2 = \eta^2 \neq 1$ следовало бы соотношение

$$\overline{\theta}^2 S_{1,-1}(a)\theta^2 = S_{1,-1}(a),$$

что бывает только при $S_{1,-1}(a) \in \operatorname{Tr} R$, а это противоречит стандартности H.

В двух оставшихся случаях рассматриваем матрицу c при

$$\theta = 1.$$

Если $s = 0$, то элемент $\alpha_p = S_{1,-1}(a)$ принадлежит группе R^0, а потому для всякого обратимого $\eta \neq 1$ имеем

$$c_{1,-1} = 0 \quad \text{и} \quad c_{2,-1} = \beta_p(\eta+1) \neq 0.$$

Но тогда из $c_{2,-2} = 0$ следует тождество

$$\beta_p(\eta+1) = \left(\overline{\eta}^{-1}+1\right)\overline{\beta}_p,$$

невозможное, очевидно, при всех обратимых η. Наконец, в случае $s = \beta_p$ из-за $\alpha_p + \beta_p \in R^0$ для произвольного обратимого $\eta \neq 1$ мы имеем

$$c_{2,-2} = 0, \quad c_{2,-1} = \left(\overline{\eta}^{-1}+1\right)\overline{\beta}_p \neq 0$$

и

$$c_{1,-1} = 0 = \beta_p(\eta+1) + \left(\overline{\eta}^{-1}+1\right)\overline{\beta}_p$$

– понятно, что мы вновь получили противоречие.

2) Предположим теперь, что нулевым является минор $\Delta_{ij}^{k,-k}(a)$ для некоторых индексов $i \neq \pm j$ и k. Привычная ссылка на сопряжение матрицей подстановки из группы Вейля позволяет считать $i = 1$ и $j = 2$. После умножения матрицы a на подходящую диагональную слева мы будем иметь равенства

$$a_{1k} = a_{2k} \quad \text{и} \quad a_{1,-k} = a_{2,-k}.$$

Далее остается заметить, что для произвольного $\theta \neq 1$ строго ненулевая матрица

$$b = ad_k(\theta)a^{-1}$$

удовлетворяет условию первой части нашего доказательства.

3) Следующий шаг в наших рассуждениях – рассмотрение сравнительно сложного частного случая, когда

$$\Delta_{12}^{-1,-2}(a) = 0.$$

Этот случай, как понятно, является новым только при $n \geqslant 3$. Можно считать, что

$$a_{1k} = 1 \ \text{ при всех } k < 0 \ \text{ и } \ a_{2,-1} = a_{2,-2} = 1.$$

Вновь используем обозначения (9), дополнив их

$$a_{2,-k} = 1 + \gamma_k \quad \text{при} \quad k \geqslant 3.$$

Среди параметров $\beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_n, \ldots, \gamma_3$, возможно, есть и нулевые, однако β_1 и β_2 наверняка обратимы – иначе наша матрица удовлетворяла бы условию второй части доказательства. По этой же причине мы имеем неравенство

$$\beta_k \neq \gamma_k \alpha_k \quad \text{при} \quad k \geqslant 3,$$

из которого следует, что β_k и γ_k не могут быть нулевыми одновременно. Поэтому параметры β_k можно считать обратимыми при всех k: при $\beta_k = 0$ для какого-то $k \geqslant 3$ можно использовать сопряжение матрицей транспозиции $(k, -k) \in W_n$ с последующим умножением справа на подходящую диагональную матрицу. Отметим, наконец, что среди параметров γ_k хотя бы один отличен от 0 из-за первой части доказательства, а это позволяет считать

$$\gamma_n \neq 0.$$

Прежде всего, для обратимых θ и η мы рассмотрим матрицу

$$c = c(\theta, \eta) = ad_1(\theta)d_2(\eta)a^{-1}$$

и покажем, что если она мономиальна, то $\theta = \eta = 1$ (эти два элемента могут быть единичными только одновременно в силу леммы 3).

Из соотношений

$$c_{2i} = c_{1i} + \beta_1(\theta+1)a'_{1i} + \beta_2(\eta+1)a'_{2i}$$

для всех $i \neq 1, 2$ следует, что если хотя бы один из четырех элементов северо-восточного угла матрицы c обратим, то

$$\beta_1(\theta+1) \neq \beta_2(\eta+1),$$

а потому весь северо-восточный угол c занимает обратимая мономиальная подматрица второго порядка. В этой ситуации четыре элемента $c_{1,\pm n}$ и $c_{2,\pm n}$ должны быть нулевыми, что, как нетрудно понять, невозможно из-за $\Delta_{12}^{n,-n}(a^{-1}) \neq 0$. Следовательно, все четыре элемента северо-восточного угла c – нулевые и

$$\beta_1(\theta+1) = \beta_2(\eta+1). \tag{10}$$

При таком условии для каждого $i > 2$ из $\Delta_{12}^{i,-i}(a^{-1}) \neq 0$ следует, что хотя бы один из четырех элементов $c_{1,\pm i}$ и $c_{2,\pm i}$ должен быть обратим, а это, разумеется, невозможно для $n \geqslant 5$. Если же $n \leqslant 4$, то матрица второго порядка из северо-западного угла c имеет по крайней мере один нулевой столбец, что при условии (10) означает выполнение одного из равенств

$$\beta_1(\theta+1)(a'_{11} + a'_{21}) = 1 \quad \text{или} \quad \beta_1(\theta+1)(a'_{12} + a'_{22}) = 1.$$

Но каждое из этих двух уравнений может иметь не более одного корня, хотя матрица $c^{-1} = c(\theta^{-1}, \eta^{-1})$ также мономиальна. Таким образом, из мономиальности c следует $\theta = \eta = 1$.

Теперь нам потребуются более сложные матрицы

$$g = g(\theta, \eta, \varkappa) = ad_1(\theta)d_2(\eta)d_n(\varkappa)a^{-1}.$$

Мы хотим найти такие θ, η и $\varkappa$, что

$$\Delta_{12}^{n,-n}(g) = 0, \tag{11}$$

а затем использовать вторую часть доказательства. Достаточным условием для (11) является одновременное выполнение равенств

$$g_{2n} = g_{1n} \quad \text{и} \quad g_{2,-n} = g_{1,-n},$$

а это, как несложно подсчитать, значит, что θ, η и $\varkappa$ связаны системой уравнений

$$\begin{cases} \beta_1(\theta+1)\mu_1 = \beta_n(\varkappa+1)\nu_{11} + \gamma_n(\overline{\varkappa}^{-1}+1)\nu_{12} \\ \beta_2(\eta+1)\mu_2 = \beta_n(\varkappa+1)\nu_{21} + \gamma_n(\overline{\varkappa}^{-1}+1)\nu_{22}, \end{cases} \tag{12}$$

где легко вычисляемые коэффициенты μ_i и ν_{ij} обратимы из-за того, что соответствующие им миноры матрицы a^{-1} отличны от 0. Каждому $\varkappa$ система (12) сопоставляет единственную пару (θ, η) элементов тела R. Полагая $\beta = \gamma_n^{-1}\beta_n$, укажем бесконечное множество S обратимых $\varkappa$, которым система (12) сопоставляет *обратимые* θ и η: при $\beta \in R^0$ в качестве S мы возьмем элементы бесконечной аддитивной группы

$$\zeta_R(\beta)^0,$$

удовлетворяющие конечному числу ограничений, а при $\beta \notin R^0$ – элементы бесконечной мультипликативной группы

$$\{\varkappa \in R^* \mid \overline{\varkappa}\beta\varkappa = \beta\},$$

на которые также наложено конечное число ограничений.

Для $\varkappa \in S$ и удовлетворяющих системе (12) θ и η матрицу $g(\theta, \eta, \varkappa)$ можно, конечно, обозначать просто $g(\varkappa)$; эта матрица, разумеется, мономиальна. Рассмотрим теперь подмножество

$$S_1 = \left\{\varkappa \in S \mid \varkappa^{-1} \in S\right\}.$$

Ясно, что оно также бесконечно, причем для каждого $\varkappa \in S_1$

$$g(\varkappa^{-1}) = g(\varkappa)^{-1},$$

поскольку матрица $c(\theta, \eta)$ как мы показали выше, мономиальна только при $\theta = \eta = 1$. Далее, для произвольного $\varkappa_1 \in S_1$ найдется бесконечное много таких $\varkappa_2 \in S_1$, что $\varkappa_1\varkappa_2 \in S_1$; по упомянутой уже причине для таких элементов

$$g(\varkappa_1\varkappa_2) = g(\varkappa_1)g(\varkappa_2).$$

Используя бесконечность множества S_1, несложно показать, что бесконечным является также множество

$$S_2 = \{\varkappa \in S_1 \mid g_{11}(\varkappa) \neq 0,\ g_{22}(\varkappa) \neq 0\}.$$

Для всякого $\varkappa \in S_2$ матрица второго порядка, стоящая в северо-восточном углу $g(\varkappa)$, – нулевая, поэтому такие $\varkappa$ удовлетворяют соотношению

$$\beta(\varkappa + 1) = \left(\overline{\varkappa}^{-1} + 1\right)\overline{\beta}. \tag{13}$$

Для получения нужного противоречия остается вспомнить о том, как мы выбирали множество S: для его элемента равенство (13) выполняется только при $\varkappa = 1$.

4) Закончим доказательство леммы. По понятной причине мы считаем нулевым минор $\Delta_{12}^{kl}(a)$ для некоторых $k \neq \pm l$ и

$$a_{1k} = a_{2k} = a_{1l} = a_{2l} = 1.$$

С учетом второй части доказательства обе суммы

$$\beta_k = a_{1,-k} + a_{2,-k} \quad \text{и} \quad \beta_l = a_{1,-l} + a_{2,-l}$$

отличны от нуля.

Рассматривая матрицу

$$c = c(\theta, \eta) = ad_{-k}(\theta)d_{-l}(\eta)a^{-1},$$

выберем θ и η так, чтобы выполнялись равенства

$$c_{2,-1} = c_{1,-1} \quad \text{и} \quad c_{2,-2} = c_{1,-2}.$$

Легко подсчитать, что для этого θ и η должны быть связаны соотношением

$$\beta_k(\theta + 1) = \beta_l(\eta + 1).$$

При этом условии $\Delta_{12}^{-1,-2}(a) = 0$ и в силу третьей части нашего доказательства матрица c должна быть мономиальной. Но тогда мономиальна и обратная матрица, что дает нам еще одно соотношение

$$\beta_k(\theta^{-1} + 1) = \beta_l(\eta^{-1} + 1).$$

Легко видеть, что одновременно полученные условия могут выполняться только при

$$\beta_k = \beta_l = \beta \quad \text{и} \quad \theta = \eta.$$

Таким образом, матрица $c(\theta,\theta)$ мономиальна при любом обратимом θ.

При $n=2$ приведенные соображения легко ведут к противоречию. Действительно, как нетрудно проверить, обратимые элементы

$$\theta = a_{2,-k}^{-1}a_{1,-k} \quad \text{и} \quad \eta = a_{2,-l}^{-1}a_{1,-l}$$

различны и не равны 1, причем $c_{2,-1}(\theta,\eta)=0$. Это означает мономиальность матрицы $c(\theta,\eta)$. Но тогда мономиальна и матрица

$$c(\theta,\eta)\cdot c(\theta^{-1},\theta^{-1}) = ad_{-l}(\eta\theta^{-1})a^{-1},$$

после чего остается вспомнить лемму 3.

При $n\geqslant 3$ наши аргументы в связи с матрицей $c=c(\theta,\theta)$ напоминают рассуждения из первой части доказательства. Если бы при некотором $i>2$ все четыре элемента $c_{1,\pm i}$ и $c_{2,\pm i}$ оказались нулевыми, то мы имели бы

$$a'_{-k,i}+a'_{-l,i}=a'_{-k,-i}+a'_{-l,-i}=0,$$

то есть минор $\Delta_{-k,-l}^{i,-i}(a^{-1})$ оказался бы нулевым, а это, как показано во второй части, противоречит нестандартности H. Поэтому указанная четверка содержит обратимый элемент для каждого $\theta\neq 1$. Такое возможно только при $n\leqslant 4$, когда стоящая в северо-западном углу c подматрица второго порядка имеет нулевой столбец. Заканчивает наши рассуждения ссылка на то, что каждое из уравнений

$$c_{11}=c_{21}=0 \quad \text{и} \quad c_{12}=c_{22}=0$$

имеет не более одного решения. □

В следующем разделе мы докажем в каком-то смысле аналог леммы 6, рассматривая *нулевой псевдоминор второго порядка.* Но для этого сначала нам придется сопоставить унитарной матрице *псевдостолбец.*

5. Ассоциированные векторы

Следуя работе [13] У. Пендера, посвященной классическим группам над телом характеристики 2 с инволюцией первого рода, мы рассмотрим факторгруппу

$$V = R^0/\operatorname{Tr} R$$

как левое векторное пространство над телом R, определяя умножение равенством

$$\alpha\,(\beta + \operatorname{Tr} R) = \alpha\beta\overline{\alpha} + \operatorname{Tr} R.$$

Для произвольной матрицы $a \in U(2n, R, \Lambda)$ каждая ее частичная сумма длинного типа $S_{i,-i}(a)$ инвариантна относительно инволюции, поэтому мы можем сопоставить нашей матрице $2n$ векторов пространства V

$$v_i(a) = S_{i,-i}(a) + \operatorname{Tr} R$$

– эти векторы мы будем называть *ассоциированными* с данной матрицей. Нам удобно также рассматривать столбец

$$v(a) = \begin{pmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \\ \dots \\ v_{-1}(a) \end{pmatrix}$$

высоты $2n$, составленный из ассоциированных векторов (*ассоциированный столбец* матрицы). Этот столбец можно умножать на произвольные элементы тела R, а также на матрицы с элементами из R (разумеется, слева), имеющие $2n$ столбцов.

Перечислим простейшие свойства введенных объектов, для их доказательства достаточно воспользоваться определением и вспомнить обсуждавшиеся в [8] свойства частичных сумм длинного типа.

Предложение. 1) *Для произвольной мономиальной унитарной матрицы все ассоциированные векторы – нулевые;*

2) *для произвольной унитарной трансвекции короткого корневого типа все ассоциированные векторы – нулевые;*

3) *для произвольной унитарной трансвекции длинного корневого типа только один ассоциированный вектор может быть ненулевым;*

4) *если a и b – две унитарные матрицы одного порядка, то $v(ab) = v(a) + av(b)$;*

5) *ассоциированные столбцы двух взаимно обратных унитарных матриц связаны соотношением $v(a) = av\left(a^{-1}\right)$.*

Используя введенные термины и обозначения, сформулируем теперь уже упоминавшуюся лемму о нулевом псевдоминоре.

Лемма 7. *Если для строго ненулевой матрицы a при каких-то индексах $i \neq \pm j$ имеет место соотношение*

$$a_{i,-i}^{-1} v_i(a) = a_{j,-i}^{-1} v_j(a),$$

то подгруппа H стандартна.

Доказательство. Как обычно, вначале чуть упростим рассматриваемую матрицу. Прежде всего, используя сопряжение с помощью матрицы подстановки из группы Вейля, сведем рассмотрение к случаю $i = 1$ и $j = 2$. Умножением слева на матрицу $d_1\left(a_{1,-1}^{-1}\right) d_2\left(a_{2,-1}^{-1}\right)$, добиваемся равенств

$$a_{1,-1} = a_{2,-1} = 1 \quad \text{и} \quad v_1(a) = v_2(a).$$

Затем умножением справа на подходящую диагональную матрицу превращаем в единицы все элементы левой половины первой строки:

$$a_{1l} = 1 \quad \text{для всех} \quad l > 0;$$

элементы $a_{1,-1}$ и $a_{2,-1}$ при этом, разумеется, изменятся, но останутся одинаковыми, как сохранится и равенство $v_1(a) = v_2(a)$. Наша матрица теперь имеет вид

$$a = \tag{14}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 1+\beta_1 & 1+\beta_2 & \dots & 1+\beta_n & \alpha_n+\gamma_n & \dots & \alpha_2+\gamma_2 & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

при некоторых параметрах α_i, β_i и γ_i. В этих обозначениях

$$S_{2,-2}(a) = S_{1,-1}(a) + \sum_{i>0} \beta_i \overline{\alpha}_i + \sum_{i>1} \beta_i \overline{\gamma}_i + \sum_{i>1} \overline{\gamma}_i,$$

причем

$$\sum_{i>0} \beta_i \overline{\alpha}_i + \sum_{i>1} \gamma_i = 0.$$

Поэтому равенство $v_1(a) = v_2(a)$ означает, что сумма

$$t = \sum_{i>1} \beta_i \overline{\gamma}_i$$

является следом.

Последнее преобразование – это скэйлинг, делающий сумму t центральной и превращающий тип инволюции в симплектический. При $t \neq 0$ скэйлинг мы проведем с помощью t, а при $t = 0$ – с помощью произвольного ненулевого следа. Ясно, что после такого скэйлинга матрица снова представляются в виде (14), где сумма t равна 1 или 0.

Мы опять предположим, что наддиагональная подгруппа, содержащая описанную матрицу, не является стандартной. По лемме 6 тогда все параметры, от которых зависят элементы первых двух строк матрицы a, – ненулевые.

Для обратимых $\theta_1, \dots, \theta_n$ будем рассматривать матрицы

$$c = c(\theta_1, \dots, \theta_n) = a \prod_{i>0} d_i(\theta_i) a^{-1}$$

и постараемся найти такие θ_i, чтобы минор $\Delta_{12}^{-1,-2}(c)$ оказался нулевым.

Начнем с равенств

$$c_{2,-1} + c_{1,-1} = \beta_1 \theta_1 \overline{\alpha}_1 + \sum_{i>1} \beta_i \theta_i \overline{\alpha}_i + \sum_{i>1} \gamma_i \overline{\theta}_i^{-1},$$

$$c_{2,-2} + c_{1,-2} = \beta_1 \theta_1 \overline{\alpha}_1 + \sum_{i>1} \beta_i \theta_i (\overline{\alpha}_i + \overline{\gamma}_i) + \sum_{i>1} \gamma_i \overline{\theta}_i^{-1} (1 + \overline{\beta}_i),$$

из которых следует

$$c_{2,-1} + c_{1,-1} + c_{2,-2} + c_{1,-2} = \sum_{i>1} \beta_i \theta_i \overline{\gamma}_i + \sum_{i>1} \gamma_i \overline{\theta}_i^{-1} \overline{\beta}_i. \qquad (15)$$

Если для произвольного θ из бесконечной группы $\mathcal{U}(R)$ положить

$$\theta_i = \overline{\gamma}_i \theta \overline{\gamma}_i^{-1},$$

то сумма (15) будет равна

$$\sum_{i>1} \beta_i \overline{\gamma}_i \theta + \theta \sum_{i>1} \gamma_i \overline{\beta}_i = t\theta + \theta t = 0.$$

Заметим, что из-за

$$\sum_{i>1} \beta_i \overline{\alpha}_i = \sum_{i>1} \gamma_i + \beta_1 \overline{\alpha}_1 \neq \sum_{i>1} \gamma_i$$

к элементам $\beta_2\overline{\gamma}_2, \ldots, \beta_n\overline{\gamma}_n; \overline{\gamma}_2^{-1}\overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n^{-1}\overline{\alpha}_n$ и $\sum_{i>1}\gamma_i$ мы можем применить лемму 1 и найти такое бесконечное подмножество $Q \subseteq \mathcal{U}(R)$, что для каждого θ из Q

$$\sum_{i>1}\beta_i\overline{\gamma}_i\theta\overline{\gamma}_i^{-1}\overline{\alpha}_i + \theta\sum_{i>1}\gamma_i \neq 0.$$

Легко видеть, что в этой ситуации найдется обратимый θ_1, для которого $c_{2,-1} + c_{1,-1} = 0$ и, следовательно, $\Delta_{12}^{-1,-2}(c) = 0$.

Далее рассуждаем в стиле третьей части доказательства леммы 6. Для произвольного $\theta \in Q$ матрица c оказывается зависящей от одного параметра ($c = c(\theta)$), она мономиальна, а ее северо-восточный угол занимает, как нетрудно понять, нулевая подматрица второго порядка. Этим же свойством обладает и обратная матрица, поэтому

$$\theta^{-1} \in Q \quad \text{и} \quad c(\theta^{-1}) = c(\theta)^{-1}.$$

Используя бесконечность множества Q, мы можем найти такие индексы $k_1, \ldots, k_n$ и такое бесконечное подмножество $Q_1 \subseteq Q$, что

$$c_{ik_i}(\theta) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \theta \in Q_1 \quad \text{при любых} \quad i > 0.$$

Для θ и η из Q_1 матрица $c(\theta)c(\eta^{-1})$ диагональна и, следовательно, $\theta\eta^{-1}$ принадлежит Q, причем

$$c(\theta)c(\eta^{-1}) = c(\theta\eta^{-1}).$$

Итак, каждому θ из некоторого бесконечного подмножества $Q_2 \subseteq Q$ соответствует диагональная матрица

$$c(\theta) = c\left(\theta_1, \ldots, \theta_n\right),$$

то есть найдутся такие обратимые $\eta_1, \ldots, \eta_n$, что

$$a\prod_{i>0} d_i(\theta_i) = \prod_{i>0} d_i(\eta_i)a.$$

Рассматривая левую половину первой строки этой матрицы, мы получаем равенства

$$\theta_1 = \ldots = \theta_n = \eta_1 \neq 1.$$

Но если матрица

$$c = a\prod_{i>0} d_i(\eta_1)a^{-1}$$

диагональна, то

$$0 = c_{1,-1} = \eta_1 S_{1,-1}(a) + S_{1,-1}(a)\overline{\eta}^{-1},$$

что возможно только при $S_{1,-1}(a) \in \operatorname{Tr} R$, когда H стандартна. □

Опираясь на лемму 7, мы докажем в заключительной части работы основной результат этой статьи:

Теорема. *Если (R, Λ) – произвольное форменное кольцо над некоммутативным телом с инволюцией R и n – любое натуральное число, то для всякой наддиагональной подгруппы H группы $U(2n, R, \Lambda)$ существует такая единственная точная форменная D-сеть (σ, Γ) порядка $2n$, что*

$$U(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma).$$

6. Все наддиагональные подгруппы $U(2n, R, \Lambda)$ стандартны

Разумеется, мы продолжаем считать, что R – тело характеристики 2 с инволюцией первого рода. В последний раз предположим, что наддиагональная подгруппа H является контрпримером, и возьмем в ней строго ненулевую матрицу a. Мы уже неоднократно говорили о том, что сопряжение при помощи мономиальной унитарной матрицы переводит нестандартную подгруппу снова в нестандартную; то же самое относится и к скэйлингу. Покажем, что с помощью таких преобразований можно получить наддиагональную подгруппу, которая содержит строго ненулевую матрицу довольно специального вида. Во избежание каскада лишних обозначений после каждого из наших преобразований получающуюся подгруппу мы снова обозначаем через H и через a – образ матрицы a.

Начнем с того, что по лемме 4 для некоторого индекса k произведение $a_{k1}^{-1} a_{k,-1}$ не принадлежит R^0. Если $k \neq 1$, то возьмем какую-нибудь подстановку π_1 из группы Вейля, для которой

$$\pi_1(1) = k,$$

и сопряжем H при помощи матрицы этой подстановки. Это позволит нам дальше считать, что

$$a_{1r}^{-1} a_{1,-r} \notin R^0$$

для некоторого положительного индекса r.

Теперь умножим нашу матрицу справа на произведение

$$\prod_{i>0} d_i(a_{1i}^{-1}),$$

превращая все элементы левой половины первой строки в единицы, и для полученной матрицы положим

$$a_{1,-i} = \alpha_i \quad \text{при всех} \quad i > 0.$$

Поскольку частичная сумма $S_{1,-1}(a) = \sum\limits_{i>0} \alpha_i$ принадлежит R^0, но α_r в R^0 не входит, найдется индекс $s \neq r$, для которого $\alpha_s \notin R^0$; следовательно, $\alpha_m \notin R^0$ для некоторого $m \neq 1$. Это позволяет в группе Вейля найти подстановку π_2, сохраняющую знаки всех индексов и удовлетворяющую условиям

$$\pi_2(1) = 1 \quad \text{и} \quad \pi_2(n) = m.$$

После сопряжения при помощи матрицы π_2 левая половина первой строки a вновь будет состоять из единиц, а подгруппе R^0 не будет принадлежать параметр α_n. Проводя далее скэйлинг с помощью $\alpha_n + \overline{\alpha}_n$, мы получаем инволюцию симплектического типа и $\alpha_n + \overline{\alpha}_n = 1$.

Заметим, наконец, что если бы для какого-то индекса $j \neq \pm 1$ имелось равенство

$$a_{jn}a'_{n,-1} + a_{j,-n}a'_{-n,-1} = a_{jn}\overline{\alpha}_n + a_{j,-n} = 0,$$

то уравнение

$$a_{jn}(\theta+1)\overline{\alpha}_n + a_{j,-n}\left(\overline{\theta}^{-1} + 1\right) = 0$$

обладало бы, очевидно, бесконечным множеством решений, а тогда лемма 3 противоречила бы нестандартности H. Поэтому умножение нашей матрицы слева на произведение $\prod\limits_{j>1} d_j(\nu_j)$ при подходящем выборе обратимых ν_j добавляет к предыдущим условиям на элементы a равенства

$$a_{jn}a'_{n,-1} + a_{j,-n}a'_{-n,-1} = 1 \quad \text{при всех} \quad j > 1.$$

Таким образом, мы можем считать, что на R действует инволюция симплектического типа, а наша нестандартная подгруппа

H содержит строго ненулевую матрицу a, n-ый и $(-n)$-ый столбцы которой равны

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\beta_2 \\ \dots \\ 1+\beta_n \\ \delta_n(1+\gamma_n) \\ \dots \\ \delta_2(1+\gamma_2) \\ \omega+\tau \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_{-n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta_2\overline{\alpha} \\ \dots \\ \alpha+\beta_n\overline{\alpha} \\ \delta_n(\alpha+\gamma_n\overline{\alpha}) \\ \dots \\ \delta_2(\alpha+\gamma_2\overline{\alpha}) \\ \omega\alpha+\tau\overline{\alpha} \end{pmatrix},$$

где

$$\tau = 1 + \sum_{i>1} (1+\overline{\gamma}_i)\,\overline{\delta}_i\beta_i + \sum_{i>1} \left(1+\overline{\beta}_i\right)\delta_i\gamma_i,$$

все параметры $\alpha, \beta_i, \gamma_i$ обратимы и

$$\alpha + \overline{\alpha} = 1.$$

Последнее равенство означает, что подтело

$$R_1 = \zeta_R(\alpha)$$

инвариантно относительно инволюции, а его группа унитарных элементов бесконечна. Для отличных от 1 элементов $\theta \in \mathcal{U}(R_1)$ мы положим

$$b = b(\theta) = ad_n(\theta)a^{-1},$$

а затем, фиксируя определенный индекс $l > 1$, будем рассматривать матрицы

$$c = c\,(\theta, \eta, \varkappa) = b(\theta)d_1(\eta)d_l(\varkappa)b(\theta).$$

Мы покажем, что существует бесконечно много $\theta \in \mathcal{U}(R_1)$, для которых при некоторых обратимых η и $\varkappa$

$$c_{1,-1} = c_{l,-1} \quad \text{и} \quad v_1(c) = v_l(c), \tag{16}$$

то есть матрица c удовлетворяет условию леммы 7, и что все такие матрицы c не могут быть мономиальными.

В связи с соответствующими вычислениями нам удобно ввести в рассмотрение столбцы

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ \delta_n \\ \dots \\ \delta_2 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \\ \delta_n\gamma_n \\ \dots \\ \delta_2\gamma_2 \\ \tau \end{pmatrix},$$

а также *полярные* к ним (мы используем обычную геометрическую терминологию, см., например, статью Э. Бака и Н. Вавилова [10]) строки

$$x = \left(\overline{\omega}, \overline{\delta}_2, \dots, \overline{\delta}_n, 1, \dots, 1, 1\right) \text{ и } y = \left(\overline{\tau}, \overline{\gamma}_2\overline{\delta}_2, \dots, \overline{\gamma}_n\overline{\delta}_n, \overline{\beta}_n, \dots, \overline{\beta}_2, 0\right).$$

Из очевидных соотношений

$$A_n = X + Y \quad \text{и} \quad A_{-n} = X\alpha + Y\overline{\alpha}$$

и доказанного предложения легко следуют равенства

$$b = e + X(\theta+1)x + Y(\theta+1)y,$$

$$v(b) = X(\theta{+}1)\left[v_n(a^{-1}) + \alpha v_{-n}(a^{-1})\right] + Y(\theta{+}1)\left[v_n(a^{-1}) + \overline{\alpha}v_{-n}(a^{-1})\right].$$

Вычисляя n-ую и $(-n)$-ую частичные суммы длинного типа для матрицы a^{-1}, нетрудно обнаружить сравнение

$$S_{n,-n}(a^{-1}) \equiv \overline{\alpha}S_{-n,n}(a^{-1})\alpha + \alpha + \sum_{i>1}\overline{\gamma}_i\overline{\delta}_i\beta_i \pmod{\operatorname{Tr} R}. \tag{17}$$

Из него, как легко понять, следует соотношение

$$\sum_{i>1}\left(\overline{\gamma}_i\overline{\delta}_i\beta_i + \overline{\beta}_i\delta_i\gamma_i\right) = 1,$$

а потому существует такой индекс l, что

$$\overline{\gamma}_l\overline{\delta}_l\beta_l \notin R^0, \tag{18}$$

– мы фиксируем этот индекс. Кроме того, при обозначениях

$$v_{-n}(a^{-1}) = u \quad \text{и} \quad \alpha + \sum_{i>1}\overline{\gamma}_i\overline{\delta}_i\beta_i = w$$

сравнение (17) позволяет ассоциированный столбец b записать в виде

$$v(b) = X(\theta + 1)(u + w) + Y(\theta + 1)w.$$

Теперь обратимся к матрице

$$c = bd_1(\eta)d_l(\varkappa)b = b^2 + b\left(e + d_1(\eta)d_l(\varkappa)\right)b.$$

Несложно подсчитать, что при любом θ

$$c_{1,-1} + c_{l,-1} = \left[1 + \beta_l(\theta + 1)\overline{\tau}\right](\eta + 1)(\theta + 1) +$$

$$+ \left[1 + \beta_l(\theta + 1)\overline{\gamma}_l\overline{\delta}_l\right](\varkappa + 1)(\theta + 1) + \beta_l(\theta + 1)\overline{\beta}_l\left(\overline{\varkappa}^{-1} + 1\right)\delta_l(\theta + 1).$$

Следовательно, если θ удовлетворяет ограничению

$$1 + \beta_l(\theta + 1)\overline{\tau} \neq 0,$$

а при обратимом $\varkappa$ имеется неравенство

$$1+\beta_l(\theta+1)\overline{\tau} \neq \left[1 + \beta_l(\theta + 1)\overline{\gamma}_l\overline{\delta}_l\right](\varkappa+1)+\beta_l(\theta+1)\overline{\beta}_l\left(\overline{\varkappa}^{-1} + 1\right)\delta_l, \quad (19)$$

то найдется такой единственный обратимый η, что для тройки $\theta, \eta, \varkappa$ элементы матрицы c удовлетворяют первому из условий (16). К обсуждению неравенства (19) мы вернемся после того, как обсудим второе из этих условий.

Ассоциированный столбец матрицы c равен

$$v(c) = v(b) + bd_1(\eta)d_l(\varkappa)v(b) =$$

$$= v(b) + bv(b) + b\left(e + d_1(\eta)d_l(\varkappa)\right)v(b) = v(b^2) + bT,$$

где через T обозначен столбец из векторов, первая компонента которого равна

$$(\eta + 1)v_1(b) = (\eta + 1)(\theta + 1)(u + w).$$

После небольшого вычисления получаем

$$v_1(c) + v_l(c) = \mu_1(\theta + 1)(u + w) + \mu_l(\theta + 1)w$$

при

$$\mu_1 = \left[1+\beta_l(\theta+1)\overline{\tau}\right](\eta+1)+\left[1+\beta_l(\theta+1)\overline{\gamma}_l\overline{\delta}_l\right](\varkappa+1)+\beta_l(\theta+1)\overline{\beta}_l\left(\overline{\varkappa}^{-1}+1\right)\delta_l,$$

$$\mu_l = \beta_l(\theta+1) + \left[1 + \beta_l(\theta + 1)\overline{\gamma}_l\overline{\delta}_l\right](\varkappa+1)\beta_l + \beta_l(\theta + 1)\overline{\beta}_l\left(\overline{\varkappa}^{-1} + 1\right)\delta_l\gamma_l.$$

Мы видим, что если для тройки $\theta, \eta, \varkappa$ элементы $c_{1,-1}$ и $c_{l,-1}$ совпадают, то коэффициент μ_1 равен нулю, поэтому для выполнения второго из условий (16) достаточно равенства $\mu_l = 0$. При фиксированном θ это равенство является уравнением относительно $\varkappa$, которое мы можем переписать в виде

$$\left[\overline{\beta_l}^{-1}\overline{\gamma_l}\overline{\delta_l} + \overline{\beta_l}^{-1}(\theta+1)^{-1}\beta_l^{-1}\right]\varkappa + \overline{\varkappa}^{-1}\delta_l\gamma_l\beta_l^{-1} =$$
$$= \overline{\beta_l}^{-1}(\overline{\theta}+1)^{-1}\beta_l^{-1} + \overline{\beta_l}^{-1}\overline{\gamma_l}\overline{\delta_l} + \delta_l\gamma_l\beta_l^{-1}. \qquad (21)$$

Если θ удовлетворяет еще одному ограничению

$$1 + \beta_l(\theta+1)\overline{\gamma_l}\overline{\delta_l} \neq 0,$$

то, как нетрудно увидеть, уравнению (21) удовлетворяет

$$\varkappa = \left[\overline{\beta_l}^{-1}\overline{\gamma_l}\overline{\delta_l} + \overline{\beta_l}^{-1}(\theta+1)^{-1}\beta_l^{-1}\right]^{-1}\overline{\beta_l}^{-1}\overline{\gamma_l}\overline{\delta_l} =$$
$$= \left[1 + \overline{\delta_l}^{-1}\overline{\gamma_l}^{-1}(\theta+1)^{-1}\beta_l^{-1}\right]^{-1} \neq 1. \qquad (22)$$

Возвращаясь теперь к неравенству (19), заметим, что для указанного $\varkappa$ это неравенство означает еще одно ограничение на θ

$$\theta\left(\overline{\tau} + \gamma_l^{-1}\right) \neq \overline{\tau}.$$

Итак, если θ – унитарный элемент тела R_1, удовлетворяющий конечному числу ограничений (назовем такой элемент допустимым), то для $\varkappa$ и η, о которых говорилось выше, матрица c удовлетворяет обоим условиям (16). Такая матрица, конечно, должна быть мономиальной, а все ее ассоциированные векторы – нулевыми. В этой ситуации равенство (20) означает, что

$$T = b^{-1}v(b^2) = v(b) + v(b^{-1}) = X(\theta+\overline{\theta})(u+w) + Y(\theta+\overline{\theta})w.$$

Рассматривая первую компоненту этого столбца, мы получаем

$$(\eta+1)(\theta+1)(u+w) = (\theta+\overline{\theta})(u+w),$$

что из-за $u + w \neq 0$ означает

$$\eta = \overline{\theta}.$$

Заметим теперь, что допустимый θ можно выбрать так, что обратный к нему также допустим. Если описанным выше способом θ^{-1} сопоставить $\varkappa'$ и $\eta' = \theta$, то матрица $c\left(\theta^{-1}, \eta', \varkappa'\right)$ также должна быть мономиальной. Но тогда мономиально и произведение

$$c\left(\theta,\overline{\theta},\varkappa\right)c\left(\overline{\theta},\theta,\varkappa'\right)=b(\theta)d_l(\varkappa\varkappa')b(\theta^{-1}),$$

откуда в силу леммы 3 и нестандартности H должно следовать равенство

$$\varkappa\varkappa'=1. \tag{23}$$

Однако, если $\varkappa$ и $\varkappa'$ вычислить с помощью (22), то из (23) мы получим равенство

$$1=(\theta+1)^{-1}\beta_l^{-1}\overline{\delta_l}^{-1}\overline{\gamma_l}^{-1}(\overline{\theta}+1)^{-1},$$

противоречащее условию (18).

Таким образом, контрпримера к нашей теореме нет.

Автор благодарит Н. А. Вавилова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. МИАН СССР **148** (1978), 43–57.
3. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. ЛГУ No. 1 (1981), 10–15.
4. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах в гиперболической унитарной группе.* — Алгебра и анализ **9**:4 (1997), 79–86.
5. Е. В. Дыбкова, *О сопряженности сетевых подгрупп в гиперболической унитарной группе над полем.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та Сер. 1 No. 22 (1997), 10–12.
6. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
7. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп симплектической группы над полем характеристики* 2. — Алгебра и анализ **10**:4 (1998), 113–129.
8. Е. В. Дыбкова, *О наддиагональных подгруппах гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 154–206.
9. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 121–135.

10. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7**:2 (2000), 159–196.
11. J. Dieudonné, *On the structure of unitary groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 367–385.
12. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al. (1989).
13. W. M. Pender, *Classical groups over division rings of characteristic two.* — Bull. Austral. Math. Soc. **7** (1972), 191–226.

Dybkova E. V. The theorem of Borewich for the hyperbolic unitary group over a skew field.

We complete the series of the papers where we prove that the lattice of overdiagonal subgroups in the hyperbolic unitary group over a skew field admits the standard description. We consider a skew field of characteristic 2 with involution of the first kind. A form parameter differs from the minimal one.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 28 октября 2004 г.